Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.982

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БАНАХОВЫХ ПРЕДЕЛОВ

Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев

Аннотация. Изучаются функции $\{B(r_n(t))\}$, где B — банахов предел и $\{r_n(t)\}$ — функции Радемахера.

Ключевые слова: банахов предел, система Радемахера, диаметр и радиус множества.

Через l_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_n |x_n|.$$

Линейный функционал $B \in l_\infty^*$ называется *банаховым пределом*, если

1) $B(1, 1, \dots) = 1$;

2) $B \geq 0$;

3) $B(Tx) = B(x)$ для любого $x \in l_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Существование банаховых пределов обосновано в [1, гл. 2, § 3]. Из определения вытекает, что $\|B\|_{l_\infty^*} = 1$ и $B(x_1, x_2, \dots) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ для любой сходящейся последовательности и для любого банахова предела B. Обозначим множество банаховых пределов через $\mathfrak{B}$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ — выпуклое замкнутое множество на единичной сфере пространства l_∞^*.

Лоренц [2] доказал, что для заданных $a \in R^1$, $x \in l_\infty$ равенство $B(x) = a$ справедливо для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = a$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Множество таких $x \in l_\infty$ обозначается через ac и называется *пространством почти сходящихся последовательностей*. Сачестон [3] уточнил этот результат и доказал, что

$$q(x) \leq B(x) \leq p(x) \tag{1}$$

для всех $x \in l_\infty$, $B \in \mathfrak{B}$, где

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Австралийского научного совета.

Неравенства (1) точные: для любого $x \in l_\infty$ и любого $a \in [q(x), p(x)]$ существует такой $B \in \mathfrak{B}$, что $B(x) = a$.

Функционал $p(x)$ является выпуклым на l_∞. Цель настоящей работы — продолжение изучения множества $\mathfrak{B}$.

Последовательность функций

$$r_n(t) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi t, \quad n \in \mathbb{N}, \ t \in [0,1]$$

называется *системой Радемахера*. Каждому $B \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие функцию

$$f_B(t) = B(r_n(t)).$$

Система Радемахера тесно связана с разложением $t \in (0,1)$ в двоичную дробь

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} t_k 2^{-k}, \quad t_k = 0 \text{ или } 1. \tag{2}$$

Функция f_B называется *характеристической функцией банахова предела* B. Это название оправдывает

Теорема 1. *Если $A, B \in \mathfrak{B}$ и $f_A(t) \le f_B(t)$ для всех $t \in (0,1)$, то $A = B$, т. е. $A(x) = B(x)$ для всех $x \in l_\infty$.*

Доказательство. Так как

$$f_A(1-t) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi (1-t) = -\operatorname{sign} \sin 2^n \pi t = -f_A(t) \tag{3}$$

для всех $t \in [0,1]$, из $f_A \le f_B$ вытекает $f_A = f_B$. Это означает, что $A(x) = B(x)$ для всех $x = \{\operatorname{sign} \sin 2^n \pi t\}$, $0 \le t \le 1$, а также для всех $x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} \sin 2^n \pi t)$, $0 \le t \le 1$. Обозначим через $2^{\mathbb{N}}$ множество последовательностей из 0 и 1. Любая последовательность из $2^{\mathbb{N}}$, содержащая бесконечное число нулей, может быть записана в указанном выше виде. Если $x \in 2^{\mathbb{N}}$ содержит лишь конечный набор нулей, то $A(x) = B(x) = 1$. Таким образом, $A(x) = B(x)$ для любого $x \in 2^{\mathbb{N}}$.

Пусть $y = (y_1, y_2, \dots)$, $0 \le y_k < 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Существует такая последовательность $1 \le m_k \le n$, что

$$\frac{m_k - 1}{n} \le y_k < \frac{m_k}{n} \tag{4}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Для $1 \le i \le n$, $k \in \mathbb{N}$ положим

$$u_{i,k} = \begin{cases} 1, & i < m_k, \\ 0, & i \ge m_k, \end{cases} \quad v_{i,k} = \begin{cases} 1, & i \le m_k, \\ 0, & i > m_k, \end{cases}$$

и рассмотрим последовательности

$$u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \dots), \quad v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \dots).$$

В силу (4)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \le y \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Отсюда

$$A\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i\right) \le Ay \le A\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i\right),$$

$$B\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\le By\le B\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i\right),\quad A\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\le\frac{1}{n},$$
$$B\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\le\frac{1}{n}.$$

Ранее доказано, что $A(u_i)=B(u_i)$, $A(v_i)=B(v_i)$ для всех $i=1,2,\dots,n$. Поэтому

$$|A(y)-B(y)|\le\frac{1}{n}.$$

Так как $n\in\mathbb{N}$ произвольно, то $A(y)=B(y)$. Таким образом, это равенство установлено для всех $y\in l_\infty$, $y\ge 0$, $\|y\|_{l_\infty}<1$. Отсюда вытекает, что оно справедливо для всех $y\in l_\infty$.

Лемма 2. *Для любого $\lambda\in[0,1]$ существует такой $x=(x_1,x_2,\dots)\in 2^{\mathbb{N}}\cap ac$, что*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n}x_k=\lambda \tag{5}$$

равномерно по $m\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Для $\lambda=0$ положим

$$x_k=\begin{cases}1, & \text{если } k=2^j,\\ 0, & \text{если } k\ne 2^j.\end{cases}$$

В этом случае проверка (5) очевидна.

Для $\lambda\in(0,1]$ положим

$$x_k=\begin{cases}1, & \text{если } [k\lambda,(k+1)\lambda)\cap\mathbb{N}\ne\varnothing,\\ 0, & \text{если } [k\lambda,(k+1)\lambda)\cap\mathbb{N}=\varnothing.\end{cases}$$

Так как

$$\sum_{k=m+1}^{m+n}x_k=|[(m+1)\lambda,(m+n+1)\lambda\cap\mathbb{N})|,$$

то

$$[n\lambda]\le\sum_{k=m+1}^{m+n}x_k\le[n\lambda]+1$$

и

$$\frac{[n\lambda]}{n}\le\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n}x_k\le\frac{[n\lambda]+1}{n}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m+1}^{m+n}x_k=\lambda$$

равномерно по $m\in\mathbb{N}$. $\square$

Изложенное выше доказательство принадлежит Б. С. Митягину. Оно значительно короче доказательства, полученного ранее авторами.

Формула (2) определяет меру на $2^{\mathbb{N}}$, которую мы также обозначим через mes. Обозначим через U множество тех $x\in 2^{\mathbb{N}}$, для которых $q(x)=0$, $p(x)=1$. Хорошо известно, что для любого $n\in\mathbb{N}$ мера множества тех $t\in(0,1)$, для которых число стоящих подряд 0 или 1 в разложении (2) не прехвосходит n, равна 0. Отсюда вытекает, что $q(x)=0$ и $p(x)=1$ для почти всех $x\in 2^{\mathbb{N}}$, т. е. $\operatorname{mes}U=1$. Через U_0 обозначим образ U при отображении $2^{\mathbb{N}}$ в $(0,1)$ по формуле (2).

Теорема 3. *Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Тогда*

(i) *$f_B(t)$ периодична с периодом r, где r — любое двоично-рациональное число из $(0,1)$, т. е. если $0 < t_1 < t_2 < 1$, $t_2 - t_1$ — двоично-рациональное число, то $f_B(t_1) = f_B(t_2)$;*

(ii) *$f_B(t) = f_B\left(\frac{t}{2}\right)$ для всех $t \in (0,1)$;*

(iii) *для любого $\lambda \in [0,1]$ существует такой $x \in 2^{\mathbb{N}} \cap ac$, что $B(x) = \lambda$ для любого $B \in \mathfrak{B}$ и $\operatorname{Im} f_B = [-1,1]$;*

(iv) *график f_B плотен в прямоугольнике $[0,1] \times [-1,1]$;*

(v) *$\sup\limits_{t \in U_0} f_B(t) = 1$, $\inf\limits_{t \in U_0} f_B(t) = -1$;*

(vi) *$f_B(t) + f_B(1-t) = 0$ для всех $t \in (0,1)$.*

Доказательство. Если $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$ отличаются лишь в конечном числе индексов, то $B(x) = B(y)$. Отсюда вытекает (i).

Так как

$$\operatorname{sign} \sin 2^n \pi t = \operatorname{sign} \sin 2^{n+1} \pi \frac{t}{2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$, инвариантность B относительно сдвига влечет свойство (ii). Элемент $x \in 2^{\mathbb{N}}$, построенный в лемме 2, не зависит от $B \in \mathfrak{B}$. Поэтому из леммы 2 и теоремы Лоренца [2] вытекает, что для любого $\lambda \in [0,1]$ существует такой $x \in 2^{\mathbb{N}} \cap ac$, что $B(x) = \lambda$ для всех $B \in \mathfrak{B}$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im} f_B = [-1,1]$.

Очевидно, (i) и (iii) влекут (iv).

Для доказательства (v) обозначим $\inf\limits_{x \in 2^{\mathbb{N}}} B(x)$ через ε. Для любого $n \in \mathbb{N}$ можно построить такие $z_1, z_2, \dots, z_n \in U$, что их носители не пересекаются и $z_1 + z_2 + \dots + z_n \in U$. Например, можно взять

$$z_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } 2^i + i(k-1) < j \le 2^i + ik, \ i > n, \ k = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{для остальных } j. \end{cases}$$

Так как z_k содержит сколь угодно длинные последовательности из 0 и 1, то в силу теоремы Сачестона [3] $q(z_k) = 0$, $p(z_k) = 1$ для любого $k = 1, 2, \dots, n$, т. е. $z_k \in U$. Аналогичным образом доказывается, что $z_1 + z_2 + \dots + z_n \in U$.

Имеем

$$1 \ge B(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = \sum_{k=1}^{n} B(z_k) \ge n \inf_{t \in U_0} f_B(t) = n\varepsilon.$$

Отсюда $\varepsilon = 0$ и $\inf\limits_{t \in U_0} f_B(t) = \inf\limits_{x \in U} B(2x-1) = 2 \inf\limits_{x \in U} Bx - 1 = -1$. Отображение $x \to 1 - x$ переводит U в себя. Применяя (3), получаем

$$\sup_{t \in U_0} f(t) = \sup_{t \in U_0} (-f(1-t)) = -\inf_{s \in U_0} f(s) = 1.$$

Свойство (vi) доказано ранее (см. (3)). $\square$

Лемма 4. *Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Если функция $f_B(t)$ измерима, то $f_B(t) = 0$ почти при всех $t \in (0,1)$.*

Доказательство. Функция

$$\Psi(s) = \Psi_B(s) = \int_0^s f_B(t)\, dt$$

определена и непрерывна на $[0,1]$. Если s_1, s_2 двоично-рациональны, то в силу теоремы 3(i)

$$\Psi(s_1+s_2)=\int\limits_0^{s_1+s_2} f_B(t)\,dt=\int\limits_0^{s_1} f_B(t)\,dt+\int\limits_{s_1}^{s_1+s_2} f_B(t)\,dt$$
$$=\int\limits_0^{s_1} f_B(t)\,dt+\int\limits_0^{s_2} f_B(t+s_1)\,dt=\int\limits_0^{s_1} f_B(t)\,dt+\int\limits_0^{s_2} f_B(t)\,dt=\Psi(s_1)+\Psi(s_2).$$

Так как $\Psi(s)$ непрерывна на $(0,1)$, равенство

$$\Psi(s_1+s_2)=\Psi(s_1)+\Psi(s_2)$$

справедливо для всех $s_1, s_2 \in (0,1)$, $s_1+s_2 \le 1$. Как известно, отсюда вытекает, что $\Psi(s)=Cs$ для всех $s\in[0,1]$ и для некоторого $C\in\mathbb{R}^1$. Применяя (3), получаем

$$2\Psi(1)=\int\limits_0^1 f_B(s)\,ds+\int\limits_0^1 f_B(1-s)\,ds=\int\limits_0^1 \left(f_B(s)+f_B(1-s)\right)\,ds=0.$$

Таким образом, $C=0$ и

$$\int\limits_0^s f_B(t)\,dt=0$$

для всех $s\in[0,1]$. Дифференцируя это равенство и пользуясь теоремой о производной неопределенного интеграла, получаем требуемое утверждение. $\square$

Лемма 5. *Если $A, B \in \mathfrak{B}$, то*

$$\|A-B\|_{l_\infty^*}=\sup_{0<t<1}(f_A(t)-f_B(t)).$$

Доказательство. Если E — банахово пространство и $f\in E^{**}$, то

$$\|f\|_{E^{**}}=\sup\{f(x):\, x\in E^*, \|x\|_{E^*}\le 1\}$$

и по теореме Крейна — Мильмана супремум достигается на множестве экстремальных точек единичного шара E^*. Экстремальными точками единичного шара пространства l_∞ являются последовательности $y=(\pm1,\pm1,\dots)$. Если последовательность $y=(\pm1,\pm1,\dots)$ содержит лишь конечное число $+1$ или -1, то Ay равно By и равно -1 или $+1$. Отсюда $(A-B)y=0$. Для любой последовательности y с бесконечным числом $+1$ и -1 существует такое $t\in(0,1)$, что $y=r_n(t)$. Поэтому

$$\|A-B\|_{l_\infty^*}=\sup_{y\in \operatorname{ext} S(l_\infty)}(A-B)y=\sup_{0<t<1}(f_A(t)-f_B(t)). \qquad \square$$

Если E — банахово пространство и A — ограниченное подмножество E, то *диаметром, радиусом* и *относительным радиусом* A в E называются числа

$$d(A,E)=\sup_{x,y\in A}\|x-y\|_E,\ r_0(A,E)=\inf_{x\in E}\sup_{y\in A}\|x-y\|_E,\ r(A,E)=\inf_{x\in A}\sup_{y\in A}\|x-y\|_E.$$

Неравенства $r_0(A,E)\le r(A,E)\le d(A,E)\le 2r_0(A,E)$ известны и очевидны. Так как $\mathfrak{B}$ принадлежит единичной сфере пространства l_∞^*, то $r_0(\mathfrak{B},l_\infty^*)\le 1$. Из доказанной ниже теоремы 6 вытекает, что $r_0(\mathfrak{B},l_\infty^*)=1$ и $d(\mathfrak{B},l_\infty^*)=2$.

Теорема 6. $d(\mathfrak{B}, l_\infty^*) = 2$.

Доказательство. Пусть $B \in \mathfrak{B}$ и $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 3(v) существует такой $x \in U$, что $B(x) < \varepsilon$. Условие $x \in U$ влечет $p(x) = 1$. По теореме Сачестона [3] существует такой $A \in \mathfrak{B}$, что $A(x) = 1$. Положим $z = 2x - 1$. Тогда

$$\|A - B\|_{l_\infty^*} \geq (A - B)z = (A - B)(2x - 1) = 2(A - B)x > 2(1 - \varepsilon).$$

Неравенство $\|A - B\|_{l_\infty^*} \leq 2$ очевидно. $\square$

Для любого $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$ положим

$$(H_0 x)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оператор H_0, называемый *преобразованием Чезаро*, ограничен в l_∞ и $\|H_0\|_{l_\infty} = 1$. Существует банахов предел B, инвариантный относительно преобразования Чезаро, т. е. $B(H_0 x) = B(x)$ для всех $x \in l_\infty$ [4, 5].

Теорема 7. *Если $B \in \mathfrak{B}$ инвариантен относительно преобразования Чезаро, то $f_B(t) = 0$ почти для всех $t \in [0, 1]$.*

Доказательство. Согласно закону больших чисел $\lim\limits_{n\to\infty} (H_0 x)_n = 1/2$ для почти всех $x \in 2^{\mathbb{N}}$ [6, 9.2.14]. Для таких $x \in 2^{\mathbb{N}}$

$$B(x) = B(H_0 x) = 1/2.$$

Следовательно, функция $f_B(t)$ измерима и равна 0 почти везде. $\square$

Заметим, что с помощью теоремы Лоренца [2] нетрудно доказать существование банахова предела, который не инвариантен относительно преобразования Чезаро.

По теореме Крейна — Мильмана $\mathfrak{B}$ совпадает с замыканием $\operatorname{conv}\operatorname{ext}\mathfrak{B}$ в топологии $\sigma(l_\infty^*, l_\infty)$. Экстремальные точки $\mathfrak{B}$ изучены в работе Фремлина, Талаграна [7]. Из результатов этой работы вытекает существование такого $B \in \mathfrak{B}$, что $f_B(t)$ неизмерима. Это утверждение усиливает теорему В. Серпинского [8, пример 6, с. 43], который доказал существование такого $\varphi \in l_\infty^*$, что $\varphi(r_n(t))$ неизмерима. В [7] также доказано существование такого $B \in \operatorname{ext}\mathfrak{B}$, что $f_B(t)$ измерима. Лемма 4 в несколько ином виде также содержится в [7].

Изучению множества $\mathfrak{B}$ посвящена работа А. А. Седаева [9]. Из результатов этой работы вытекает, что функция $f_B(t)$ измерима, если существует последовательность $z_n \in l_1$, $\|z_n\|_{l_1} \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к B в топологии $\sigma(l_\infty^*, l_\infty)$. Поэтому для любого $B \in \mathfrak{B}$ с неизмеримой функцией $f_B(t)$ не существует последовательности z_n из единичного шара l_1, сходящейся к B в топологии $\sigma(l_\infty^*, l_\infty)$. С другой стороны, по теореме Голдстайна [10, 5.4.5] всякий элемент из единичного шара l_∞^*, в частности всякий банахов предел, принадлежит замыканию единичного шара l_1 в топологии $\sigma(l_\infty^*, l_\infty)$.

Авторы благодарят К. С. Казаряна, С. В. Конягина, Б. С. Митягина, А. А. Седаева, Д. Фремлина и рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Банах С.* Теория линейных операций. М.; Ижевск: Dynamics, 2001.
2. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. 1948. V. 80. P. 167–190.
3. *Sucheston L.* Banach limits // Amer. Math. Monthly. 1967. V. 74. P. 308–311.
4. *Eberlein W. F.* Banach–Hausdorff limits // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. V. 1. P. 662–665.
5. *Доддс Р. Г., де Пагтер Б., Седаев А. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А.* Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 6. С. 111–136.
6. *Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н.* Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992.
7. *Fremlin D., Talagrand M.* A decomposition theorem for additive set-functions, with application to Pettis integrals and ergodic means // Math. Z. 1979. Bd 168. S. 117–142.
8. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector measures. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977. (Math. Surv.; V. 15).
9. *Седаев А. А.* Об аппроксимации пределов Банаха элементами пространства l_1 // Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Серия Физика. Математика. 2006. № 1. С. 187–192.
10. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 30 августа 2009 г.

Семенов Евгений Михайлович
Воронежский гос. университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
semenov@math.vsu.ru

Сукочев Федор Анатольевич
School of Mathematics and Statistics,
University of New South Wales,
Sydney, 2052, Australia
f.sukochev@unsw.edu.au