Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА РИМАНОВЫХ SOL–МНОГООБРАЗИЯХ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

А. А. Яковлев

Аннотация. Получена адиабатическая асимптотика функции распределения спектра оператора Лапласа на римановом Sol-многообразии с одномерным инвариантным слоением.

Ключевые слова: оператор Лапласа, Sol-многообразие, слоение, след оператора, функция распределения спектра, адиабатические пределы.

1. Введение

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения спектра оператора Лапласа на римановых Sol-многообразиях со слоением в адиабатическом пределе. Под адиабатическими асимптотическими задачами в спектральной теории дифференциальных операторов понимаются задачи исследования асимптотического поведения спектра самосопряженного эллиптического дифференциального оператора в частных производных, зависящего от малого параметра, в случае, когда малый параметр входит только в коэффициенты, стоящие перед производными по отношению к выбранной группе переменных (см., например, [1]).

Асимптотические задачи такого рода впервые возникли в квантовой молекулярной физике в работе Борна и Оппенгеймера в 1927 г., в которой предложено для описания квантовых уровней энергии молекулы использовать приближение, основанное на малости отношения массы электрона к массе ядра, что приводит к изучению асимптотического поведения спектра оператора Шредингера

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta_x - \frac{h^2}{2M}\Delta_y + V(x,y),$$

описывающего квантовую теорию молекулы (квантового гамильтониана), в пределе $m/M \to 0$. Математическое обоснование приближения Борна — Оппенгеймера началось значительно позже, в начале 80-х годов прошлого века, и активно продолжается до настоящего времени (см., например, [2] и приведенные там ссылки). В дальнейшем аналогичные задачи также изучались и нашли свое применение в других областях механики и квантовой физики таких, как теория оболочек, физика анизотропных сред, квантовая механика кристаллов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00208).

В 1985 г. Виттен применил метод адиабатических пределов при изучении глобальных гравитационных аномалий в теории струн [3]. Виттен рассматривал адиабатические пределы для римановых расслоений над окружностью. Он связал адиабатический предел η-инварианта оператора Дирака на тотальном пространстве расслоения с так называемой глобальной аномалией в теории струн. Результат Виттена был строго обоснован в работах [4, 5] и распространен в работе [6] на случай риманова расслоения над компактным многообразием произвольной размерности. Различные аспекты адиабатических пределов для расслоений изучались в работах [7–12].

Техника адиабатических пределов нашла многочисленные применения в локальной теории индекса (см., например, обзор [13]). Отметим также применение адиабатических пределов для описания типа теории Ходжа спектральной последовательности Лере для расслоений, найденное в работе [10]. Некоторые из этих результатов обобщены на случай римановых слоений [14–16].

Асимптотическое поведение функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе рассматривалось ранее в работе [16] для римановых слоений и в работе [17] для одномерных слоений на римановых многообразиях Гейзенберга (см. также [18]).

Ниже мы понимаем адиабатические пределы в том смысле, в котором они введены Виттеном в работе [3]. Точнее, пусть $(M, \mathscr{F})$ — замкнутое многообразие со слоением, снабженное римановой метрикой g. Таким образом, касательное расслоение TM к M представляется в виде прямой суммы

$$TM = F \oplus H,$$

где $F = T\mathscr{F}$ — касательное расслоение к $\mathscr{F}$ и $H = F^{\perp}$ — ортогональное дополнение к F. Пусть g_F (g_H) обозначает ограничение метрики g на F (H). Тем самым $g = g_F + g_H$. Определим однопараметрическое семейство g_ε римановых метрик на M по формуле

$$g_\varepsilon = g_F + \varepsilon^{-2} g_H, \quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Рассмотрение семейства римановых многообразий (M, g_ε) и исследование его свойств при $\varepsilon \to 0$ будем называть *переходом к адиабатическому пределу.*

В данной работе рассматриваются адиабатические пределы на римановых Sol-многообразиях и основным результатом является вычисление асимптотики функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе.

Результаты работы частично анонсированы в [19].

Автор благодарен Ю. А. Кордюкову за постановку задачи и внимание к работе и И. А. Тайманову за полезные замечания.

2. Обозначения и основные результаты

Рассмотрим действие дискретной группы $\mathbb{Z}$ на цилиндре $\widetilde{M}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, определяемое диффеоморфизмом

$$T_A : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R},$$

задаваемым по формуле

$$T_A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ z + 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где (x, y) — стандартные периодические по модулю 1 координаты на торе $\mathbb{T}^2$, $z \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ и $|\operatorname{tr} A| > 2$.

Определение 1. Sol-*многообразием* M_A^3 называется фактор-пространство $\widetilde{M}^3/\mathbb{Z}$.

Хорошо известно, что M_A^3 является компактным многообразием. Обозначим через λ и λ^{-1} собственные значения матрицы A и предположим, что $\lambda > 1$. Пусть $\{e_u, e_v\}$ — соответствующий положительно ориентированный базис собственных векторов матрицы A. Введем другую, более удобную нам, координатную систему (u, v, w) на $\widetilde{M}^3$ по формулам

$$(x, y) = ue_u + ve_v, \quad w = z \ln \lambda.$$

В координатах (u, v, w) преобразование T_A принимает следующий вид:

$$T_A : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda^{-1} v \\ w + \ln \lambda \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в новых координатах (u, v) периодичность на торе $\mathbb{T}^2$ определяется следующим образом: две точки (u, v) и (u', v') определяют одну и ту же точку на $\mathbb{T}^2$, если и только если $(u - u', v - v') = k\big(c_1^1, c_1^2\big) + m\big(c_2^1, c_2^2\big)$, где $k, m \in \mathbb{Z}$ и $\big\{e_1 = \big(c_1^1, c_1^2\big),\ e_2 = \big(c_2^1, c_2^2\big)\big\}$ — базис целочисленной решетки Γ тора $\mathbb{T}^2$, определяемый уравнением

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Известно, что $\widetilde{M}^3$ может быть реализовано как подгруппа Ли группы Ли $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$\gamma(u, v, w) = \begin{pmatrix} e^w & 0 & u \\ 0 & e^{-w} & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Групповая операция на $\widetilde{M}^3$ задается формулой

$$\gamma(u, v, w)\gamma(u_0, v_0, w_0) = \gamma(u + e^w u_0, v + e^w v_0, w + w_0).$$

Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{m}^3$ группы Ли $\widetilde{M}^3$ является подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathrm{gl}(3, \mathbb{R})$, состоящей из матриц вида

$$X(u, v, w) = \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & -w & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Операция в алгебре Ли $\mathfrak{m}^3$ задается по формуле

$$[X(u, v, w), X(u_0, v_0, w_0)] = X(wu_0 - w_0 u, -wv_0 + w_0 v, 0).$$

Обозначим через

$$U = X(1, 0, 0), \quad V = X(0, 1, 0), \quad W = X(0, 0, 1)$$

стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{m}^3$.

Другим способом алгебру Ли $\mathfrak{m}^3$ можно определить как алгебру Ли левоинвариантных векторных полей на $\widetilde{M}^3$. Левоинвариантные векторные поля, соответствующие матрицам U, V, W в точке $\gamma_0 = \gamma(u_0, v_0, w_0)$, имеют следующий вид:

$$U = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\gamma_0 \exp(tU)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (e^{w_0}t, 0, 0) = e^{w_0}\frac{\partial}{\partial u};$$

$$V = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\gamma_0 \exp(tV)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (0, e^{-w_0}t, 0) = e^{-w_0}\frac{\partial}{\partial v};$$

$$W = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\gamma_0 \exp(tW)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (0, 0, t + w_0) = \frac{\partial}{\partial w}.$$

Определение 2. *Римановым* Sol-*многообразием* M_A^3 называется компактное многообразие $G_A\backslash\widetilde{M}^3$ с метрикой g: G_A — дискретная подгруппа группы Ли $\widetilde{M}^3$, состоящая из $\gamma(u, v, w) \in \widetilde{M}^3$ таких, что

$$(u, v) = k\big(c_1^1, c_1^2\big) + l\big(c_2^1, c_2^2\big) \in \Gamma, \quad w = m \ln\lambda, \ k, l, m \in \mathbb{Z},$$

g — риманова метрика на $G_A\backslash\widetilde{M}^3$, чей подъем на $\widetilde{M}^3$ инвариантен при левых сдвигах на элементы группы $\widetilde{M}^3$ (такие метрики мы называем *локально левоинвариантными*).

Легко видеть, что локально левоинвариантная метрика g единственным образом определяется своим значением в единице $\gamma(0, 0, 0)$ группы Ли $\widetilde{M}^3$, которое задается симметрической положительно определенной 3×3-матрицей.

Предположим, что g определяется в единице $G_A\gamma(0, 0, 0)$ единичной матрицей

$$g(G_A\gamma(0, 0, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, базис U, V, W является ортонормированным. Тогда в локальных координатах метрика g имеет вид

$$g(G_A\gamma(u, v, w)) = (U^*)^2 + (V^*)^2 + (W^*)^2 = e^{-2w}du^2 + e^{2w}dv^2 + dw^2,$$

где U^*, V^*, W^* — двойственный базис к базису U, V, W:

$$U^* = e^{-w}du, \quad V^* = e^{w}dv, \quad W^* = dw.$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим левоинвариантное векторное поле на $\widetilde{M}^3$, ассоциированное с

$$X(1, \alpha, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{m}^3.$$

Орбиты соответствующего векторного поля на M_A^3 определяют одномерное слоение $\mathscr{F}$. Слой $L_{G_A\gamma(u,v,w)}$ слоения $\mathscr{F}$, проходящий через точку $G_A\gamma(u, v, w) \in M_A^3$, имеет вид

$$L_{G_A\gamma(u,v,w)} = \big\{G_A\gamma(u + e^{w}t, v + \alpha e^{-w}t, w) \in M_A^3 : t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Обозначим, как и выше, через $F = T\mathscr{F}$ касательное расслоение к слоению $\mathscr{F}$ и через $H = F^{\perp}$ — ортогональное дополнение к F, т. е. касательное расслоение TM к многообразию M представимо в виде $TM = F \oplus H$. Имеем соответствующее разложение римановой метрики

$$g = g_F + g_H.$$

Легко видеть, что $F = \langle U_1 \rangle$, $H = \langle U_2, U_3 \rangle$, где

$$U_1 = \frac{U + \alpha V}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{e^w \frac{\partial}{\partial u} + \alpha e^{-w} \frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \left(\frac{e^w}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \frac{\alpha e^{-w}}{\sqrt{1+\alpha^2}}, 0 \right),$$

$$U_2 = \frac{\alpha U - V}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \alpha \frac{e^w \frac{\partial}{\partial u} - w \frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \left(\frac{\alpha e^w}{\sqrt{1+\alpha^2}}, -\frac{e^{-w}}{\sqrt{1+\alpha^2}}, 0 \right),$$

$$U_3 = W = \frac{\partial}{\partial w} = (0,0,1).$$

Выберем произвольный вектор $\xi = YU_2 + ZU_3 \in H_{\gamma(u,v,w)}$ $(|\xi|_g^2 = |\xi|_{g_H}^2 = Y^2 + Z^2)$ и сдвинем его вдоль орбит траектории векторного поля $X = X(1, \alpha, 0)$. Получим вектор

$$(\exp tX)_* \xi = (\alpha e^w Y + te^w Z, -e^{-w} Y - \alpha t e^{-w} Z, Z) \in H_{(u + e^w t, v + \alpha e^{-w} t, w)}.$$

Вычислим квадрат длины вектора $(\exp tX)_* \xi$ относительно g_H (трансверсальной части метрики g):

$$((\exp tX)_* \xi, (\exp tX)_* \xi)_{g_H} = ((\exp tX)_* \xi, U_2)_g^2 + ((\exp tX)_* \xi, U_3)_g^2$$
$$= \left(Y + \frac{2\alpha t Z}{\alpha^2 + 1} \right)^2 + Z^2.$$

Таким образом, если $\alpha = 0$, то трансверсальная часть метрики инвариантна при действии движения вдоль векторного поля, задаваемого слоением $\mathscr{F}$ (транверсальное действие изометрично), метрика g трансверсально проектируема и слоение $\mathscr{F}$ риманово. Если $\alpha \neq 0$, то трансверсальная часть метрики зависит от движения вдоль векторного поля, задаваемого слоением $\mathscr{F}$, следовательно, метрика g не является трансверсально проектируемой.

Рассмотрим адиабатический предел, ассоциированный с римановым Sol-многообразием $(G_A \backslash \widetilde{M}^3, g)$, где g — локально левоинвариантная метрика, соответствующая единичной матрице, и слоением $\mathscr{F}$. Тогда риманова метрика g_ε на $(G_A \backslash \widetilde{M}^3)$, определяемая по формуле (1), в локальных координатах (u, v, w) имеет вид

$$g_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2 + \alpha^2}{\varepsilon^2 (1 + \alpha^2)} e^{-2w} \, du^2 + 2 \frac{(1 - \varepsilon^{-2})\alpha}{(1+\alpha^2)} \, du dv + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 (1+\alpha^2)} e^{2w} dv^2 + \varepsilon^{-2} \, dw^2. \quad (3)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим оператор Лапласа — Бельтрами на функциях, определенный метрикой g_ε:

$$\Delta_\varepsilon = d^*_{g_\varepsilon} d,$$

где $d : C^\infty(\Gamma \backslash H) \to C^\infty(\Gamma \backslash H, \Lambda^1 T^*(\Gamma \backslash H))$ — дифференциал де Рама, $d^*_{g_\varepsilon} : C^\infty(\Gamma \backslash H, \Lambda^1 T^*(\Gamma \backslash H)) \to C^\infty(\Gamma \backslash H)$ — сопряженный оператор к d относительно скалярных произведений, определяемых метрикой g_ε. Оператор Δ_ε является самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором с положительно определенным скалярным главным символом в гильбертовом пространстве

$L^2(\Gamma\backslash H, g_\varepsilon)$ квадратично интегрируемых функций на $\Gamma\backslash H$, наделенном скалярным произведением, индуцированным метрикой g_ε. Для любого $\varepsilon > 0$ спектр оператора Δ_ε состоит из собственных значений конечной кратности:

$$0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \leq \dots, \quad \lambda_j(\varepsilon) \to +\infty \quad \text{при } j \to \infty.$$

Основным результатом данной работы является асимптотическая формула функции распределения спектра

$$N_\varepsilon(t) = \sharp\{i : \lambda_i(\varepsilon) \leq t\}$$

в адиабатическом пределе.

Теорема 1. *Для любого $t > 0$ справедливы следующие асимптотические формулы для функции распределения спектра $N_\varepsilon(t)$ оператора Лапласа — Бельтрами, определенного метрикой g_ε:*

при $\alpha \neq 0$

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi^2} t^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}),$$

при $\alpha = 0$

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{6\pi^2} t^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}).$$

Асимптотическое поведение функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе рассматривалось ранее в работе [16] для римановых слоений и в работе [17] для одномерных слоений на римановых многообразиях Гейзенберга (см. также [18]). Во всех рассмотренных случаях функция $N_\varepsilon(t)$ имеет порядок ε^{-q}, где q — коразмерность слоения (в нашем случае $q = 2$), но коэффициенты при ε^{-q} в каждом случае различны. Отметим также, что формулы, приведенные в теореме, отличны от классической формулы Вейля, которая описывает асимптотическое поведение функции распределения спектра $N_\varepsilon(t)$ оператора Лапласа Δ_ε при $t \to \infty$ (см. [20]).

При $\alpha \neq 0$ доказательство теоремы использует вычисление спектра оператора Лапласа на римановом Sol-многообразии, приведенное в работе [20], являющейся продолжением исследований геодезических потоков на римановых Sol-многообразиях (см. [21, 22]), и квазиклассические спектральные асимптотики [23] для модифицированного оператора Матье

$$H_\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + a\,\mathrm{ch}(2\mu x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

При $\alpha = 0$ слоение является римановым и метрика — трансверсально проектируемой, тем самым применим общий результат об асимптотическом поведении функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе, ассоциированном с римановым слоением, полученный в работе [16].

3. Спектр оператора Лапласа и модифицированный оператор Матье

Начнем с того, что предварительно приведем описание спектра оператора Лапласа на Sol-многообразии в терминах собственных значений модифицированного оператора Матье.

Оператор Лапласа, соответствующий метрике (3), в координатах (u, v, w) имеет вид

$$\Delta_\varepsilon = -\frac{1+\varepsilon^2\alpha^2}{1+\alpha^2} e^{2w} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{2\alpha(1-\varepsilon^2)}{1+\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{\alpha^2+\varepsilon^2}{1+\alpha^2} e^{-2w} \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2}. \tag{4}$$

Для вывода этой формулы можно воспользоваться следующим, хорошо известным утверждением (см., например, [24]).

Предложение 2. *Пусть U_1, U_2, U_3 — g-ортонормированный базис в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы Ли H. Оператор Лапласа — Бельтрами записывается в виде*

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{3} \widehat{U}_i^2 f,$$

где $\widehat{U}_i$ обозначает левоинвариантный дифференциальный оператор первого порядка на $C^\infty(H)$, соответствующий элементу $U_i \in \mathfrak{h}$:

$$\widehat{U}_i f(\gamma) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma \exp(tU_i)).$$

В качестве ортонормированного базиса можно взять базис

$$U_1 = X\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}, \frac{\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}, 0\right), \quad U_2 = X\left(\frac{-\varepsilon\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}, 0\right),$$
$$U_3 = X(0, 0, \varepsilon).$$

Положим

$$E_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon^2\alpha^2}{1+\alpha^2}, \quad F_\varepsilon = \frac{\alpha(1-\varepsilon^2)}{1+\alpha^2}, \quad G_\varepsilon = \frac{\alpha^2+\varepsilon^2}{1+\alpha^2}. \tag{5}$$

Так как коэффициенты оператора Лапласа (4) зависят только от w, используя метод разделение переменных, видим, что собственные функции оператора Δ_ε имеют вид

$$\Psi_\varepsilon(u, v, w) = e^{2\pi i(\gamma,(u,v))} f_\varepsilon(w),$$

где $\gamma \in \Gamma^*$, $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$. Имеет место формула

$$\Delta_\varepsilon \Psi_\varepsilon(u, v, w) = \Bigg(-\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + (8\pi^2\sqrt{E_\varepsilon G_\varepsilon}|Q(\gamma)| \cosh(2(w+\alpha(\gamma))) + 8\pi^2 F_\varepsilon Q(\gamma)) f_\varepsilon(w)\Bigg) e^{2\pi i(\gamma,(u,v))}.$$

Напомним, что $\{e_u, e_v\}$ — собственные векторы матрицы A и $\{e_1, e_2\}$ — базис решетки Γ. Пусть $\{e_u^*, e_v^*\}$— двойственный базис в $\mathbb{R}^2$ к базису $\{e_u, e_v\}$. Поскольку $(\lambda e_u, e_u^*) = (Ae_u, e_u^*) = (e_u, A^* e_u^*) = (e_u, \lambda e_u^*)$, векторы e_u^*, e_v^* являются собственными векторами матрицы A^* с собственными значениями λ, λ^{-1} соответственно. По определению двойственности имеем $\gamma = (\gamma, e_u)e_u^* + (\gamma, e_v)e_v^*$.

Определим квадратичную форму $Q(\gamma) = (\gamma, e_u)(\gamma, e_v)$ на решетке Γ^* и

$$\alpha_\varepsilon(\gamma) = \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{|E_\varepsilon|}{|G_\varepsilon|}}\left|\frac{(\gamma, e_u)}{(\gamma, e_v)}\right|\right)}{2}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3 [20]. *Функция $\Psi_\varepsilon = e^{2\pi i(\gamma,(u,v))} f_\varepsilon(w)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_\varepsilon \Psi_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon \Psi_\varepsilon$ на M_A^3, если и только если γ — элемент двойственной решетки к Γ и $f_\varepsilon(w)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Матье*

$$\left(-\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + 8\pi^2\sqrt{E_\varepsilon G_\varepsilon}|Q(\gamma)| \operatorname{ch}(2(w+\alpha(\gamma)))\right) f_\varepsilon(w) = \mu_\varepsilon f_\varepsilon(w),$$

где собственные значения Λ_ε и μ_ε связаны сдвигом

$$\Lambda_\varepsilon = \mu_\varepsilon + 8\pi^2 F_\varepsilon Q(\gamma). \tag{6}$$

Ввиду того, что спектр оператора Матье не зависит от сдвига переменной, мы можем перейти к эквивалентной задаче поведения спектра оператора

$$\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + 8\pi^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2(1-\varepsilon^2)^2}{(1-\alpha^2)^2}} |Q(\gamma)| \operatorname{ch}(2w). \qquad (7)$$

Таким образом, спектральная задача для оператора Лапласа (4) на Sol-многообразии M_A^3 сводится к спектральной задаче для модифицированного оператора Матье $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ на $\mathbb{R}$.

Заметим, что $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ является гиперболической версией стандартного оператора Матье, спектр его дискретный, собственные функции известны как модифицированные функции Матье (см. [25]). Обозначим через $f_{\varepsilon,\gamma,k}(w)$ собственную функцию оператора $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$, соответствующую собственному значению $\mu_{\varepsilon,\gamma,k}$.

Таким образом, с каждым элементом двойственной решетки $\gamma \in \Gamma^*$ мы можем ассоциировать последовательность собственных функций $\Psi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,z) = e^{2\pi i(\gamma,(u,v))} f_{\varepsilon,\gamma,k}(z)$, $k \in \mathbb{N}$, оператора Δ_ε. Эти функции корректно определены на накрытии $\tilde{M}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, но не на Sol-многообразии, а именно, они не инвариантны под действием (2). Рассмотрим следующий ряд:

$$\Phi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\varepsilon,\gamma,k}(\lambda^n u, \lambda^{-n} v, w + n\ln\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_{\varepsilon,A^{*n}\gamma,k}(u,v,w).$$

Ввиду того, что собственные функции оператора Матье $f_{\varepsilon,\gamma,k}(w)$ быстро убывают по ω, этот ряд абсолютно сходится. Легко видеть, что таким образом мы получили собственные функции $\Phi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,w)$ оператора Лапласа на M_A^3.

Заметим, что собственные функции $\Phi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,w)$ на M_A^3 зависят только от орбит $[\gamma] = \{A^{*^n}(\gamma)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ относительно действия A^* на Γ^*: $\Phi_{\varepsilon,\gamma,k}(u,v,w) = \Phi_{\varepsilon,[\gamma],k}(u,v,w)$.

Будем рассматривать также собственные функции при $\gamma = 0$. Легко видеть, что это экспоненты

$$\Phi_{\varepsilon,0,l}(u,v,w) = e^{\frac{2\pi}{\ln\lambda} ilw}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

с собственными значениями $\mu_\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\ln\lambda}\right)^2 \varepsilon^2 l^2$.

Теорема 4 [20]. *Набор функций, состоящий из* $\Phi_{\varepsilon,[\gamma],k}(u,v,z), [\gamma] \in \Gamma^* \backslash \{0\} / A^*$, *и* $\Phi_{\varepsilon,0,l}(z)$, *образует полный базис собственных функций оператора Лапласа на* Sol-*многообразии* M_A^3 *в* $L_2(M_A^3)$.

Нижеприведенные результаты теории чисел хорошо известны (см., например, [26]).

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ — матрица такая, что $|\operatorname{tr} A| > 2$.

Обозначим через λ и λ^{-1} собственные значения матрицы A и предположим, что $\lambda > 1$.

Рассмотрим A как автоморфизм решетки $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$, порожденной некоторым базисом e_1, e_2. Для A можно определить бинарную квадратичную форму Q_A по формуле

$$Av \wedge v = Q_A(v) e_1 \wedge e_2,$$

где $v \in \mathbb{R}^2$. Если $v = xe_1 + ye_2$, то

$$Q_A(v) = Q_A(x,y) = \det \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y & x \\ a_{21}x + a_{22}y & y \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $Q_A(v)$ инвариантна под действием A, т. е. $Q_A(v) = Q_A(Av)$.

4. Доказательство основной теоремы

Пусть $\{l_1, l_2\}$ — положительно ориентированный базис двойственной решетки Γ^*. Рассмотрим бинарную квадратичную форму Q_{A^*}, определенную выше:

$$A^*\gamma \wedge \gamma = Q_{A^*}(\gamma) l_1 \wedge l_2, \quad \gamma \in \Gamma^*.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}A^*\gamma \wedge \gamma = (\lambda(\gamma, e_u)e_u^* + \lambda^{-1}(\gamma, e_v)e_v^*) \wedge ((\gamma, e_u)e_u^* + (\gamma, e_v)e_v^*)\\ = (\gamma, e_u)(\gamma, e_u)(\lambda - \lambda^{-1})e_u^* \wedge e_v^*.\end{aligned}$$

Имеет место соотношение

$$\frac{e_u^* \wedge e_v^*}{l_1 \wedge l_2} = \frac{|e_u^*||e_v^*| \sin\Theta}{\mathscr{A}(\Pi(l_1, l_2))},$$

где Θ— угол между e_u^* и e_v^*, $\mathscr{A}(\Pi(l_1, l_2))$— площадь параллелограмма $\Pi(l_1, l_2)$, которая в силу двойственности равна $\mathscr{A}(\Pi(l_1, l_2)) = \frac{1}{\mathscr{A}(\mathbb{T}^2)}$.

В обозначениях разд. 3 двойственная метрика g_ε^* к метрике g_ε имеет вид

$$g_\varepsilon^* = \begin{pmatrix} E_\varepsilon & F_\varepsilon \\ F_\varepsilon & G_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\cos(\Theta) = \frac{(e_u^*, e_v^*)}{|e_u^*||e_v^*|} = \frac{F_\varepsilon}{E_\varepsilon G_\varepsilon}, \quad \sin(\Theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\Theta)} = \frac{\sqrt{\det g_\varepsilon^*}}{E_\varepsilon G_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{E_\varepsilon G_\varepsilon}.$$

Заметим, что площадь тора $\mathscr{A}(\mathbb{T}^2)$ в метрике g_ε равна $\mathscr{A}(\mathbb{T}^2) = \varepsilon^{-1}$. Получаем

$$|Q(\gamma)| = \frac{|Q_{A*}(\gamma)|}{\lambda - \lambda^{-1}}. \tag{8}$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Предварительно исследуем задачу поведения спектра оператора Матье $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ при $\varepsilon \to 0$, которая в силу (8) примет вид

$$\left(-\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)| \operatorname{ch}(2w)\right) f_{\varepsilon,\gamma}(w) = \mu_{\varepsilon,\gamma} f_{\varepsilon,\gamma}(w),$$

где

$$a(\varepsilon) = \frac{8\pi^2 \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\alpha^2(1-\varepsilon^2)^2}{(1+\alpha^2)^2}}}{\lambda - \lambda^{-1}}.$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a(\varepsilon) = \frac{8\pi^2 \alpha}{(1 + \alpha^2)(\lambda - \lambda^{-1})} \neq 0. \tag{9}$$

Более того,

$$\begin{aligned}a(\varepsilon) = \frac{8\pi^2}{\lambda - \lambda^{-1}} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}\varepsilon^2 + \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha}\varepsilon^2\right) + o(\varepsilon^2)\\ = \frac{8\pi^2}{\lambda - \lambda^{-1}} \left(F_\varepsilon + \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha}\varepsilon^2\right) + o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{10}$$

Ввиду того, что $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma} \geq a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)|$ и при $\gamma \neq 0$ потенциал оператора $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ отстоит от нуля, а также с учетом связи собственных значений оператора Лапласа Δ_ε и собственных значений модифицированного оператора Матье (6), имеем

$$N_\varepsilon(t) = \sum_{\gamma: a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)| < t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda-\lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma)} N_\varepsilon{}^\gamma \left(t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma) \right), \qquad (11)$$

где $N_\varepsilon^\gamma(t)$— функция распределения спектра оператора $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ при фиксированном γ. Заметим, что количество элементов γ, удовлетворяющих условию

$$a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)| < t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma),$$

при $Q_{A^*}(\gamma) > 0$ равномерно ограничено сверху при $\varepsilon \to 0$, а при $Q_{A^*}(\gamma) < 0$ неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$, поскольку согласно (10) на $Q_{A^*}(\gamma)$ имеем условие вида

$$-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)} t\varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}) < Q_{A^*}(\gamma) < 0.$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ имеем одномерный оператор Лапласа, определенный на периодических функциях с периодом $\ln\lambda$. Легко видеть, что собственными функциями этого оператора являются экспоненты $e^{\frac{2\pi}{\ln\lambda} ilw}$, $l \in \mathbb{Z}$, с собственными значениями

$$\mu_\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\ln\lambda}\right)^2 \varepsilon^2 l^2.$$

Таким образом,

$$N_\varepsilon^{\gamma=0}(t) = \frac{\ln\lambda}{\pi} \varepsilon^{-1}\sqrt{t} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \to 0.$$

При фиксированном $\gamma \neq 0$ рассмотрим оператор

$$\widetilde{\mathscr{M}}_{\varepsilon,\gamma} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2} + a(0)|Q_{A^*}(\gamma)| \operatorname{ch}(2w).$$

Обозначим через $\widetilde{N}_\varepsilon^\gamma(t)$ функцию распределения оператора $\widetilde{\mathscr{M}}_{\varepsilon,\gamma}$. Применяя к оператору $\widetilde{\mathscr{M}}_{\varepsilon,\gamma}$ квазиклассическую формулу Вейля для функции распределения спектра оператора Шредингера (см. [23]), имеем

$$\begin{aligned} \mathscr{N}_\varepsilon(t, Q_{A^*(\gamma)}) &= \widetilde{N}_\varepsilon^\gamma \left(t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda - \lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\varepsilon^{-1} \oint \sqrt{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda-\lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma) - a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|\cosh(2x)}\, dx + o(\varepsilon^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$F_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, \quad a(0) = \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda - \lambda^{-1}}. \qquad (12)$$

Делая замену переменных $\cosh(2x) = \xi$ и полагая $g = \frac{a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|}{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda-\lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma)}$, получаем

$$\mathscr{N}_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) = 2\varepsilon^{-1} \frac{\sqrt{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda-\lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma)}}{2\pi} \int_1^{1/g} \frac{\sqrt{1-g\xi}}{\sqrt{\xi^2-1}}\, d\xi + o(\varepsilon^{-1}).$$

Интеграл $\int\limits_1^{1/g} \frac{\sqrt{1-g\xi}}{\sqrt{\xi^2-1}}\,d\xi$ может быть вычислен в терминах полных эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$\int\limits_1^{1/g} \frac{\sqrt{1-g\xi}}{\sqrt{\xi^2-1}}\,d\xi = 2\sqrt{1+g}\,(K(k)-E(k))\,, \tag{13}$$

где

$$K(k) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{((1-x^2)(1-k^2x^2))^{\frac{1}{2}}}, \quad E(k) = \int\limits_0^1 \left(\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$k^2 = \frac{1-g}{1+g}, \quad g = \frac{a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|}{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda-\lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma)}.$$

Имеем

$$k^2 = \frac{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda-\lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma) - a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|}{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda-\lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma) + a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|}.$$

Таким образом,

$$\mathscr{N}_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) = 2\varepsilon^{-1} \frac{\sqrt{t - \frac{8\pi^2 F_0}{\lambda-\lambda^{-1}} Q_{A^*}(\gamma)}}{\pi} \sqrt{1+g}\,(K(k)-E(k)) + o(\varepsilon^{-1}).$$

Учитывая (12), получаем

$$\mathscr{N}_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) = 2\varepsilon^{-1} \frac{\sqrt{t - \frac{8\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{(\lambda-\lambda^{-1})} Q_{A^*}(\gamma)}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\frac{8\pi^2}{(\lambda-\lambda^{-1})}\frac{\alpha}{1+\alpha^2} Q_{A^*}(\gamma)}{t - \frac{8\pi^2}{(\lambda-\lambda^{-1})}\frac{\alpha}{1+\alpha^2} Q_{A^*}(\gamma)}}$$
$$\times \left(K\left(\sqrt{\frac{t}{t - \frac{16\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{(\lambda-\lambda^{-1})} Q_{A^*}(\gamma)}}\right) - E\left(\sqrt{\frac{t}{t - \frac{16\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{(\lambda-\lambda^{-1})} Q_{A^*}(\gamma)}}\right)\right) + o(\varepsilon^{-1}).$$

Таким образом,

$$\mathscr{N}_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) = \varepsilon^{-1} V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) + o(\varepsilon^{-1}), \tag{14}$$

где

$$V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) = \sqrt{t}\,\frac{\sqrt{1 - \frac{16\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})} Q_{A^*}(\gamma)}}{\pi}$$
$$\times \left(K\left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{16\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})} Q_{A^*}(\gamma)}}\right) - E\left(\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{16\pi^2 \frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})} Q_{A^*}(\gamma)}}\right)\right).$$

Согласно известному факту теории чисел о количестве целых точек под гиперболой (см., например, [27]), число точек $M(Q_0)$ решетки Γ^* по модулю A^* со значениями $Q_0 < Q_{A^*} < 0$ пропорционально площади фундаментальной области, а именно

$$M(Q_0) = \frac{2}{\lambda-\lambda^{-1}}|Q_0| + o(Q_0), \quad Q_0 \to -\infty.$$

Положим

$$V_\varepsilon(t)=\sum_{\gamma:-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)}t\varepsilon^{-2}+o(\varepsilon^{-2})<Q_{A^*}(\gamma)<0} V_\varepsilon(t,Q_{A^*}(\gamma)). \tag{15}$$

Тогда при $\varepsilon\to 0$ получаем

$$V_\varepsilon(t)=\int\limits_{-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha t}{4\pi^2(1+\alpha^2)}\varepsilon^{-2}}^{0} M'(Q_{A^*})V_\varepsilon(t,Q_{A^*})\,dQ_{A^*}+o(\varepsilon^{-1})$$

$$=\frac{4\sqrt{t}}{(\lambda-\lambda^{-1})\pi}\int\limits_{-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha t}{4\pi^2(1+\alpha^2)}\varepsilon^{-2}}^{0}\sqrt{1-\frac{16\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}Q_{A^*}}{t(\lambda-\lambda^{-1})}}$$

$$\times\left(K\left(\sqrt{\frac{1}{1-\frac{16\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})}Q_{A^*}}}\right)-E\left(\sqrt{\frac{1}{1-\frac{16\pi^2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}}{t(\lambda-\lambda^{-1})}Q_{A^*}}}\right)\right)dQ_{A^*}+o(\varepsilon^{-1}).$$

Сделав замену переменных

$$Q_{A^*}=\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\frac{(\lambda-\lambda^{-1})t}{16\pi^2}Q,$$

имеем

$$V_\varepsilon(t)=\frac{4}{\lambda-\lambda^{-1}}\sqrt{t}\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\frac{(\lambda-\lambda^{-1})t}{16\pi^3}$$

$$\times\int\limits_{-(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1})^2}^{0}\sqrt{1-Q}\left(K\left(\frac{1}{\sqrt{1-Q}}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{1-Q}}\right)\right)dQ+o(\varepsilon^{-1})$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\frac{1+\alpha^2}{\alpha}t^{\frac{3}{2}}\int\limits_{0}^{(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1})^2}\sqrt{1+Q}\left(K\left(\frac{1}{\sqrt{1+Q}}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{1+Q}}\right)\right)dQ+o(\varepsilon^{-1}).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{0}^{(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1})^2}\sqrt{1+Q}\left(K\left(\frac{1}{\sqrt{1+Q}}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{1+Q}}\right)\right)dQ.$$

Этот несобственный интеграл сходится в нуле, так как E ограничена, K ведет себя как логарифм (см, например, [28]). На бесконечности

$$K\left(\frac{1}{t}\right)-E\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{4}t^{-2}+o(t^{-2}),\quad t\to+\infty.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{0}^{(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1})^2}\sqrt{1+Q}\left(K\left(\frac{1}{\sqrt{1+Q}}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{1+Q}}\right)\right)dQ$$

$$=2\frac{\pi}{4}\sqrt{\left(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1}\right)^2}+o(\varepsilon^{-1}),\quad \varepsilon\to 0, \tag{16}$$

следовательно,

$$V_\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi^3}\frac{1+\alpha^2}{\alpha}t^{\frac{3}{2}}2\frac{\pi}{4}\sqrt{\left(2\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\varepsilon^{-1}\right)^2} + o(\varepsilon^{-1})$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}t^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \to 0. \quad (17)$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma:-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)}t\varepsilon^{-2}+o(\varepsilon^{-2})<Q_{A^*}(\gamma)<0} \left(\varepsilon^2 {N_\varepsilon}^\gamma\left(t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)\right)\right.$$
$$\left. - \varepsilon V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma))\right) = o(1) \quad (18)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Действительно, поскольку потенциал $a(\varepsilon)|Q_{A^*}(\gamma)|\operatorname{ch}(2w)$ оператора $\mathscr{M}_{\varepsilon,\gamma}$ стремится к потенциалу $a(0)|Q_{A^*}(\gamma)|\operatorname{ch}(2w)$ оператора $\widetilde{\mathscr{M}}_{\varepsilon,\gamma}$ и отстоит от нуля (см. (9)), при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$N_\varepsilon^\gamma(t) = \widetilde{N}_\varepsilon^\gamma(t) + o(\varepsilon^{-1}).$$

В силу (14) получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left({N_\varepsilon}^\gamma\left(t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)\right) - \varepsilon^{-1}V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma))\right) = 0.$$

Поскольку выполнено (17), то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma:-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)}t\varepsilon^{-2}+o(\varepsilon^{-2})<Q_{A^*}(\gamma)<0} \varepsilon V_\varepsilon(t, Q_{A^*}(\gamma)) < C_1(t),$$

где $C_1(t)$ — некоторая константа. Используя вариационный принцип (см., например, [29]), можно показать, что при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^2 N_\varepsilon(t) = \sum_{\gamma:-\frac{(\lambda-\lambda^{-1})\alpha}{4\pi^2(1+\alpha^2)}t\varepsilon^{-2}+o(\varepsilon^{-2})<Q_{A^*}(\gamma)<0} \varepsilon^2 {N_\varepsilon}^\gamma\left(t - \frac{8\pi^2 F_\varepsilon}{\lambda-\lambda^{-1}}Q_{A^*}(\gamma)\right) < C_2(t)$$

с некоторой константой $C_2(t)$ (см. также [30]). Тем самым применима теорема Лебега о мажорантной сходимости и мы получаем (18).

Таким образом, согласно (11) в силу (18), (15), (17) в случае $\alpha \neq 0$ асимптотическая формула функции распределения спектра оператора Лапласа Δ_ε в адиабатическом пределе имеет вид

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi^2}t^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Выше показано, что в случае $\alpha = 0$ метрика g является трансверсально проектируемой и слоение $\mathscr{F}$ giманово...

Индуцированная метрика на слое

$$L_{G_A\gamma(u,v,w)} = \{G_A\gamma(u+e^w t, v, w) \in M_A^3 : t \in \mathbb{R}\},$$

проходящем через точку $\gamma(u,v,w)$, имеет вид

$$g_{\mathscr{F}} = dt^2.$$

Таким образом, послойный оператор Лапласа задается формулой

$$\Delta_F = -e^{2w}\frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

Группоид голономии слоения $\mathscr{F}$ имеет вид $G = M_A^3 \times \mathbb{R}$. Для любого $\gamma(u,v,w) \in M_A^3$ слой слоения $\mathscr{F}$, проходящий через точку $\gamma(u,v,w)$, отождествляется с $\mathbb{R}$ и ограничение оператора Δ_F на слой совпадает с оператором

$$A = -\frac{d^2}{dt^2},$$

действующим в пространстве $L^2(\mathbb{R}, dt)$.

Найдем спектральный проектор оператора A в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Справедливо равенство

$$A_1U(\xi) = FAF^{-1}U(\xi) = |\xi|^2U(\xi), \quad U \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

где F — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$. Аналогичное равенство получается для спектральных проекторов:

$$\chi_\lambda(A_1) = F\chi_\lambda(A)F^{-1},$$

где χ_λ — характеристическая функция полуоси $(-\infty, \lambda)$. Легко видеть, что оператор $\chi_\lambda(A_1)$ есть оператор умножения на функцию

$$\chi_\lambda(|\xi|^2) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\xi|^2 < \lambda, \\ 0, & \text{если } |\xi|^2 \geq \lambda. \end{cases}$$

Таким образом, спектральный проектор $\chi_\lambda(A)$ оператора A имеет вид

$$\chi_\lambda(A)U(t) = F^{-1}\chi_\lambda(|\xi|^2)FU(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left[i(t-t_1)\xi\right]\chi_\lambda(|\xi|^2)U(t)\,dt_1 d\xi.$$

Ядро спектрального проектора $\chi_\lambda(A)$ оператора A в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ задается формулой

$$E_\lambda(t,t_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left[i(t-t_1)\xi\right]\chi_\lambda(|\xi|^2)\,d\xi.$$

Касательное ядро e_λ оператора Δ_F связано с ядром E_λ спектрального проектора $\chi_\lambda(A)$ оператора A в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ следующим образом. Для любого $\gamma = (x,y,t) \in G = M_A^3 \times \mathbb{R}$

$$e_\lambda(\gamma) = E_\lambda(0,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-it\xi\right)\chi_\lambda\left(|\xi|\right)d\xi.$$

Ограничение касательного ядра e_λ на M^3_A имеет вид

$$e_\lambda(x,y) = E_\lambda(0,0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\alpha^2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_\lambda\left(|\xi|\right)\, d\xi = \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Получаем, что функция распределения спектра $N_{\mathscr{F}}(\lambda)$ оператора Δ_F имеет вид

$$N_{\mathscr{F}}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{T}^2} e_\lambda(x,y)\, dxdy = \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Согласно [16]

$$N_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{t} (t-\tau)\, d_\tau N_{\mathscr{F}}(\tau) + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Из двух приведенных выше формул непосредственно следует, что

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{6\pi^2} t^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \to 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маслов В. П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
2. *Hagedorn G., Joye A.* Mathematical analysis of Born–Oppenheimer approximations // Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 203–226. (Proc. Sympos. Pure Math.; 76, Part 1).
3. *Witten E.* Global gravitational anomalies // Comm. Math. Phys. 1985. V. 100, N 2. P. 197–229.
4. *Bismut J. M., Freed D. S.* The analysis of elliptic families. II. Dirac operators, eta invariants and the holonomy theorem // Comm. Math. Phys. 1986. V. 107, N 1. P. 103–163.
5. *Cheeger J.* η-Invariants, the adiabatic approximation and conical singularities. I. The adiabatic approximation // J. Differ. Geom. 1987. V. 26, N 1. P. 175–221.
6. *Bismut J. M., Cheeger J.* η-Invariants and their adiabatic limits // J. Amer. Math. 1989. V. 2, N 33–70. P. .
7. *Colbois B., Courtois G.* Petites valeurs propres et classe d'Euler des S^1-fibres // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 2000. V. 33, N 5. P. 611–645.
8. *Dai X.* Adiabatic limits, non-multiplicity of signature and the Leray spectral sequence // J. Amer. Math. Soc. 1991. V. 4, N 2. P. 265–321.
9. *Dai X.* APS boundary conditions, eta invariants and adiabatic limits // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. V. 354, N 1. P. 107–122.
10. *Mazzeo R. R., Melrose R. B.* The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration // J. Differ. Geom. 1990. V. 31, N 1. P. 185–213.
11. *Jammes P.* Sur le spectre des fibres en tore qui s'effondrent // Manuscripta Math. 2003. V. 110, N 1. P. 13–31.
12. *Jammes P.* Effondrement, spectre et proriétés diophantiennes des flots Riemanniens. (Препринт). math.DG/0505417, 2005.
13. *Bismut J. M.* Local index theory and higher analytic torsion // Proc. Intern. Congr. Math. Berlin, 1998. Doc. Math. 1998. Extra V. I. P. 143–162.
14. *Forman R.* Spectral sequences and adiabatic limits // Comm. Math. Phys. 1995. V. 168, N 1. P. 57–116.
15. *Álvarez López J., Kordyukov Yu. A.* Adiabatic limits and spectral sequences for Riemannian foliations // Geom. Funct. Anal. 2000. V. 10, N 5. P. 977–1027.
16. *Kordyukov Yu. A.* Adiabatic limits and spectral geometry of foliations // Math. Ann. 1999. V. 313, N 4. P. 763–783.
17. *Яковлев А. А.* Адиабатические пределы на римановых многообразиях Гейзенберга // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 2. С. 149–160.
18. *Kordyukov Yu. A., Yakovlev A. A.* Adiabatic limits and the spectrum of the Laplacian on foliated manifolds // C^*-algebras and elliptic theory. II. Trends Math. Basel: Birkhauser, 2008. P. 123–144. E-print arXiv:math/0703785.

19. *Яковлев А. А.* Адиабатические пределы на римановых Sol-многообразиях // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 2. С. 318–320.
20. *Bolsinov A. V., Dullin H. R., Veselov A. P.* Spectra of Sol-manifolds: arithmetic and quantum monodromy // Comm. Math. Phys. 2006. V. 264, N 3. P. 583–611.
21. *Bolsinov A. V., Taimanov I. A.* Integrable geodesic flows with positive topological entropy // Invent. Math. 2000. V. 140, N 3. P. 639–650.
22. *Болсинов А. В., Тайманов И. А.* Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2000. Т. 231. С. 42–58.
23. *Helffer B., Martinez A., Robert D.* Ergodicite et limite semi-classique // Comm. Math. Phys. 1987. V. 109, N 2. P. 313–326.
24. *Gordon C. S., Wilson E. N.* The spectrum of the Laplacian on Riemannian–Heisenberg manifolds // Michigan Math. J. 1986. V. 33, N 2. P. 253–271.
25. *Whitteker E. T., Watson G. N.* A Course in modern analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
26. *Landau E.* Elementary number theory. New York: Chelsea, 1958.
27. *Loo Keng Hua.* Introduction to number theory. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.
28. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. Т. 3.
29. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1981. Т. 4.
30. *Kordyukov Yu. A.* Semiclassical spectral asymptotics on foliated manifolds // Math. Nachr. 2002. V. 245, N 1. P. 104–128.

Статья поступила 13 декабря 2008 г.

Яковлев Андрей Александрович
Уфимский гос. технический университет, кафедра математики,
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
yakovlevandrey@yandex.ru