Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 517.518.1+517.518.17

О ЛОГАРИФМИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМОМ КРИВОЙ ВАН КОХА

С. П. Пономарев

Аннотация. Продолжены начатые в [1] исследования. Изучены дифференциальные свойства логарифмического потенциала, определенного классом комплексных мер, распределенных на кривых Ван Коха. Доказано, что в отличие от классического случая регулярных кривых этот потенциал принадлежит классу C^1 на всей плоскости $\mathbb{C}$. Рассмотрен аналог задачи Робена. Доказательства основаны на представленных в [1] результатах.

Ключевые слова: кривая Ван Коха, логарифмический потенциал, интеграл типа Коши, задача Робена.

Посвящается Ю. Г. Решетняку
по случаю его 80-летия

1. Введение. Семейство кривых Ван Коха

Кривые Ван Коха описывают разными способами. Мы рассмотрим семейство таких кривых, которое обсуждалось в [1] (см. также [2]).

Подчеркнем, что (как и в [1]) наши рассуждения существенно опираются на геометрическую структуру таких кривых. Для удобства кратко напомним конструкцию, отсылая читателя к [1] за подробностями.

Изучаемые здесь кривые ван Коха получаются из замкнутого треугольника Δ_1^0 с вершинами $0, 1, (1 + i \operatorname{tg} \theta)/2$, $0 < \theta < \pi/4$, последовательным удалением открытых равнобедренных попарно не пересекающихся специальных треугольников.[1)]

На первом шаге удалим из Δ_1^0 (треугольника нулевого ранга) открытый треугольник с вершинами λ^2, $1 - \lambda^2$, $(1 + i \operatorname{tg} \theta)/2$, где $\lambda = (2 \cos \theta)^{-1}$. Затем в каждом из двух оставшихся треугольников Δ_1^1, Δ_2^1 (ранга один) удаляем открытый треугольник, подобный $\widetilde{\Delta}$ (с коэффициентом подобия λ), и продолжаем процесс. На n-м шаге получим 2^n равных треугольников Δ_k^n ранга n, подобных Δ_1^0, $\operatorname{diam} \Delta_k^n = \lambda^n$. По определению

$$\Gamma = \Gamma_\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} \Delta_k^n. \tag{1}$$

Назовем Γ *кривой Ван Коха.* Для каждого $n \in \mathbb{N}$ треугольники ранга n снабжаются индексом k в естественном порядке. Треугольники Δ_k^n, Δ_{k+1}^n имеют общую вершину z_k^n угла θ, и для любого n будет $0 \in \Delta_1^n$, $1 \in \Delta_{2^n}^n$. Через $s_k^n = [z_{k-1}^n, z_k^n]$

[1)] Исправление: в [1, разд. 1] непосредственно после формулы (3) слова: «подобных исходному треугольнику Δ_1^0», написанные ошибочно, следует удалить.

обозначим замкнутый отрезок с концами z_{k-1}^n, z_k^n ($z_0^n = 0$, $z_{2^n}^n = 1$), являющийся стороной Δ_k^n, лежащей напротив угла $\pi - 2\theta$. Отметим, что «n» в z_k^n означает верхний индекс. Положим $\Gamma_k^n = \Gamma \cap \Delta_k^n$.

Существует гомеоморфизм $\varphi : [0,1] \to \Gamma$, обладающий свойствами:

(i) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$;

(ii) для каждого k, $1 \leq k \leq 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется $\varphi(I_k^n) = \Gamma_k^n$, где $I_k^n = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$, $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\varphi(k2^{-n}) = z_k^n$, $k = 0, \dots, 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Назовем φ *натуральной параметризацией* Γ. Очевидно, φ (как и Δ_k^n и Γ) зависит от θ, однако в дальнейшем обычно будем опускать θ в индексе аргумента, если это не приведет к недоразумению. Мы используем обозначения из [1]. Во всем тексте точки $z = x + iy$ и (x, y) отождествляются.

2. Логарифмический потенциал класса C^1 на $\mathbb{C}$

Существование указанного нетривиального потенциала возможно, когда заряд распределен, например, по «очень плохой» (с точки зрения гладкости) кривой.

Напомним, что классический нетривиальный логарифмический потенциал, определяемый для гладкой кривой, не входит в класс C^1 на $\mathbb{C}$.

Натуральная параметризация φ определяет натуральную меру μ на Γ, $\mu(E) = |\varphi^{-1}(E)|$ (где $|\cdot|$ — мера Лебега на $\mathbb{R}$) для каждого $E \subset \Gamma$ такого, что $\varphi^{-1}(E)$ измеримо по Лебегу. Так мы получаем пространство с мерой $(\Gamma, \mathcal{M}, \mu)$ [1, разд. 3].

В классической теории потенциала обычно имеют дело с вещественнозначными плотностями. С учетом [1] нам будет удобно в качестве плотностей брать комплекснозначные функции, а именно элементы пространства $L^\infty(\Gamma) = L^\infty(\Gamma, \mu)$ (введенного в [1]) μ-измеримых существенно ограниченных функций $f : \Gamma \to \overline{\mathbb{C}}$, снабженного естественной нормой $\|f\|_\infty$.

Замечание 1. Кривая Ван Коха Γ использована в [1] как контрпример, показывающий, что квазиконформная кривая не обязательно AC-устранима. Особое значение придается анализу функций, представимых интегралом типа Коши

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto T(f)(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \tag{2}$$

где $f \in L^\infty(\Gamma)$. Для $f \neq 0$ функция $T(f)$ оказывается нетривиальной, непрерывной на $\mathbb{C}$ и аналитической вне Γ.

В этой связи естественно изучить свойства соответствующего логарифмического потенциала, который мы сейчас определим.

Для данной $f \in L^\infty(\Gamma)$ для любого $z \in \mathbb{C}$ положим

$$P(f)(z) = \int_\Gamma f(\zeta) \ln|\zeta - z| d\mu(\zeta). \tag{3}$$

Назовем $P(f)$ *логарифмическим потенциалом с плотностью* f. Часто будем писать $P(z)$ вместо $P(f)(z)$, если не возникает недоразумения. Отметим, что Γ — самоподобная кривая, не имеющая σ-конечной длины и не обладающая касательной в каждой своей точке. Этот не очень тривиальный факт, скорее всего, известен. Он может быть легко выведен, например, из теорем 1 и 2 в [1, разд. 2].

Поскольку $\ln t = o(1/t)$ при $t \to 0+$, из леммы 1 (см. ниже) вытекает, что интеграл (3) существует в смысле Лебега для любого $z \in \mathbb{C}$. Наша основная задача — показать, что (3) входит в класс C^1 на $\mathbb{C}$.

Далее будем считать, что $0 < \theta \le \pi/8$. Это вызвано тем, что утверждения в [1] получены при этом предположении, а мы намерены ссылаться на них.[2)]

Лемма 1 [1, лемма 5]. *Пусть $\theta \in (0, \pi/8]$. Тогда для любых Γ_k^n, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, и $z \in \mathbb{C}$ имеет место оценка*

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \frac{4\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \tag{4}$$

Для произвольных $f \in L^\infty(\Gamma)$ и $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\widetilde{P}_x(f)(z) = \int\limits_\Gamma \frac{(x-\xi) f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2}, \tag{5}$$

$$\widetilde{P}_y(f)(z) = \int\limits_\Gamma \frac{(y-\eta) f(\zeta) d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2}. \tag{6}$$

Эти интегралы, очевидно, существуют для любого $z \notin \Gamma$. Они также существуют в смысле Лебега для каждого $z \in \Gamma$, что немедленно вытекает из леммы 1 (см. (4)) с учетом элементарных оценок

$$\frac{|x-\xi|}{|\zeta - z|^2},\ \frac{|y-\eta|}{|\zeta - z|^2} \le \frac{1}{|\zeta - z|}.$$

Ясно, что в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ функции $\widetilde{P}_x(f)$, $\widetilde{P}_y(f)$ совпадают с частными производными $P_x(f)$, $P_y(f)$ соответственно, которые, разумеется, являются гармоническими функциями в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Лемма 2. (i) *Для любой $f \in L^\infty(\Gamma)$ функции $\widetilde{P}_x(f)$, $\widetilde{P}_y(f)$ непрерывны в $\mathbb{C}$.*

(ii) $K(f) := \sup\limits_{z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma} \|\nabla P(f)(z)\| = \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} \big(\widetilde{P}_x^2(f)(z) + \widetilde{P}_y^2(f)(z)\big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$

Доказательство. (i) Достаточно доказать непрерывность $\widetilde{P}_x$, $\widetilde{P}_y$ в точках из Γ. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Gamma$, и допустим, что z_0 не является концевой точкой какой-либо из Γ_s^m. Тогда найдется последовательность кривых $\{\Gamma_{k_n}^n\}$ такая, что $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma_{k_n}^n$ для каждого n. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Существует достаточно малое число $r_n > 0$ такое, что

$$D(z_0, r_n) \cap (\Gamma \setminus \Gamma_{k_n}^n) = \varnothing,$$

где $D(z_0, r_n)$ — открытый круг с центром в z_0 и радиусом r_n. Для любого $z \in D(z_0, r_n/2) \setminus \{z_0\}$ имеем

$$\widetilde{P}_x(z) - \widetilde{P}_x(z_0) = \int\limits_{\Gamma_{k_n}^n} \frac{(x-\xi) f(\zeta) d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} - \int\limits_{\Gamma_{k_n}^n} \frac{(x_0-\xi) f(\zeta) d\mu(\zeta)}{|\zeta - z_0|^2}$$
$$+ \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_{k_n}^n} \left(\frac{x-\xi}{|\zeta - z|^2} - \frac{x_0 - \xi}{|\zeta - z_0|^2} \right) f(\zeta)\, d\mu(\zeta). \tag{7}$$

[2)]Это допущение сделано исключительно для упрощения вычислений.

Заметим, что выражение в круглых скобках в последнем интеграле непрерывно как функция от $(z,\zeta) \in (D(z_0, r_n/2) \setminus \{z_0\}) \times (\Gamma \setminus \Gamma^n_{k_n})$. Нетрудно показать, что эта функция стремится к нулю равномерно по $\zeta \in \Gamma \setminus \Gamma^n_{k_n}$ при $z \to z_0$. Отсюда

$$\lim_{z\to z_0} \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma^n_{k_n}} \left(\frac{x-\xi}{|\zeta - z|^2} - \frac{x_0 - \xi}{|\zeta - z_0|^2}\right) f(\zeta)\, d\mu(\zeta) = 0. \tag{8}$$

Первые два интеграла в (7) легко оцениваются с учетом леммы 1:

$$\left| \int\limits_{\Gamma^n_{k_n}} \frac{(x-\xi)f(\zeta)d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} - \int\limits_{\Gamma^n_{k_n}} \frac{(x_0-\xi)f(\zeta)d\mu(\zeta)}{|\zeta - z_0|^2} \right| \le \frac{8\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2} \|f\|_\infty. \tag{9}$$

Ясно, что из (7)–(9) вытекает равенство $\lim\limits_{z\to z_0} \widetilde{P}_x(z) = \widetilde{P}_x(z_0)$. Непрерывность $\widetilde{P}_y$ в точке z_0 доказывается аналогично. Пусть теперь z_0 — концевая точка некоторого $\Gamma^m_{s_m}$. Допустим, что z_0 отлична от 0 и 1. В таком случае из конструкции Γ легко вывести, что найдутся две последовательности кривых $\{\Gamma^n_{k'_n}\}$, $\{\Gamma^n_{k''_n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что для любого n будет $\{z_0\} = \Gamma^n_{k'_n} \cap \Gamma^n_{k''_n}$. Действуя, как выше, всюду заменим кривые $\Gamma^n_{k_n}$ кривыми $\Gamma^n_{k'_n} \cup \Gamma^n_{k''_n}$. Надлежащие рассуждения аналогичны проведенным выше, не содержат новых идей и отличаются очевидными техническими изменениями, так что мы их опустим. Все остальные случаи $z_0 = 0$ или $z_0 = 1$ рассматриваются так же или еще проще. Доказательство п. (i) завершено.

Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что функции $\widetilde{P}_x$ и $\widetilde{P}_y$ гармоничны вне Γ и обращаются в нуль на бесконечности. Эти функции непрерывны в $\mathbb{C}$, следовательно, применяя принцип максимума для гармонических функций, приходим к (ii). □

Для любых точек $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, положим $[z_1, z_2] = \{z_1 + t(z_2 - z_1) : t \in [0,1]\}$ и назовем $[z_1, z_2]$ *отрезком с концами* z_1, z_2.

Лемма 3. *Для любого отрезка* $[z_1, z_2]$, *не имеющего общих точек с* Γ, *имеет место неравенство*

$$|P(f)(z_2) - P(f)(z_1)| \le K(f)|z_2 - z_1|. \tag{10}$$

Доказательство. Непосредственное применение леммы 2(ii) дает

$$|P(f)(z_2) - P(f)(z_1)| \le \int\limits_0^1 |\langle \nabla P(f)(z_1 + t(z_2 - z_1)), \overrightarrow{(z_1, z_2)}\rangle|\, dt \le K(f)|z_2 - z_1|,$$

где $\langle , \rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ и $\overrightarrow{(z_1, z_2)}$ — вектор с концами z_1, z_2. □

Замечание 2. Напомним, что через Δ^n_k мы обозначили k-й треугольник ранга n ($1 \le k \le 2^n$) в процессе конструирования кривой Γ (см. (1)). Для данного $n \in \mathbb{N}$ семейство $\{\Delta^n_k,\ 1 \le k \le 2^n\}$ образует «цепочку», состоящую из треугольников, которые дизъюнктны, за исключением каждой из тех пар, которые, очевидно, имеют лишь общую вершину, а именно вершину угла θ. Для множества $E \subset \mathbb{C}$ пусть ∂E — граница E. Нетрудно заметить, что множество $D^n = \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} \Delta_k^n$ является областью с полигональной границей

$$\partial D^n = \partial \bigcup_{k=1}^{2^n} \Delta_k^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \partial \Delta_k^n.$$

Следующее утверждение вытекает из леммы 3.

Лемма 4. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $f \in L^\infty(\Gamma)$ функция $P(f)$ липшицева с константой $K(f)$ на каждой стороне треугольника Δ_k^n, $1 \leq k \leq 2^n$.*

Доказательство геометрически достаточно очевидно и основано на конструкции Γ и лемме 3. Отметим только основные его моменты, опуская простые детали. Пусть S — сторона Δ_k^n и $[z', z'']$ — отрезок, содержащийся в S. По лемме 3 P липшицево с константой $K(f)$ на каждом отрезке, содержащемся в D^n.

Из структуры D^n (см. замечание 2) вытекает, что существуют две последовательности $\{z_n'\}, \{z_n''\}$, для которых $[z_n', z_n''] \subset D^n$ и $z_n' \to z'$, $z_n'' \to z''$. Ввиду (10) для каждого n имеем $|P(f)(z_n') - P(f)(z_n'')| \leq K(f)|z_n' - z_n''|$, откуда, устремляя n к ∞, по непрерывности $P(f)$ получим, что $|P(f)(z') - P(f)(z'')| \leq K(f)|z' - z''|$. $\square$

Лемма 5. *Пусть $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $F \subset (a, b)$ — компактное множество лебеговой меры нуль. Допустим, что выполнены условия:*

(L1) *g дифференцируема при любом $x \in [a, b] \setminus F$;*

(L2) *существует непрерывная функция $\tilde{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{g}|_{[a,b]\setminus F} = g'|_{[a,b]\setminus F}$;*

(L3) *найдется константа $A > 0$ такая, что для любого открытого множества U, $F \subset U \subset (a, b)$, множество F допускает покрытие конечным семейством замкнутых невырожденных промежутков $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_j = [x_j', x_j''], 1 \leq j \leq N\}$, таких, что их внутренности попарно не пересекаются и выполнены условия*

(L3.1) *$\mathcal{I}_j \subset U$, $1 \leq j \leq N$;*

(L3.2) *$|g(x_j'') - g(x_j')| \leq A(x_j'' - x_j')$, $1 \leq j \leq N$.*

Тогда g дифференцируема в каждой точке из $[a, b]$ и $g' = \tilde{g}$. Таким образом, $g \in C^1([a, b])$.

Доказательство. Докажем сначала, что g абсолютно непрерывна. Пусть $\{I_s = [a_s, b_s], 1 \leq s \leq Q\}$ — конечное семейство дизъюнктных замкнутых промежутков, лежащих в $[a, b]$.

Установим подходящую оценку для $\sum\limits_{s=1}^{Q} |g(b_s) - g(a_s)|$, из которой будет немедленно вытекать абсолютная непрерывность g.

Не уменьшая общности, можно считать, что $a_s, b_s \notin F$ (напомним, что F нигде не плотно и g непрерывна) и $F \cap \sum\limits_{s=1}^{Q} I_s \neq \varnothing$. Согласно выбору a_s, b_s имеем

$$F \subset U := (a, b) \setminus \bigcup_{s=1}^{Q} \{a_s, b_s\}.$$

По условию (L3) найдется покрытие F, составленное из замкнутых промежутков $\{\mathcal{I}_j = [x_j', x_j''], 1 \leq j \leq N\}$ с попарно не пересекающимися внутренностями, удовлетворяющих условиям (L3.1), (L3.2).

Важно отметить, что каждый $\mathcal{I}_j$ либо содержится в некотором $\operatorname{Int} I_s = (a_s, b_s)$, либо не пересекается с $\bigcup\limits_{s=1}^{Q} I_s$.

Пусть s таково, что $I_s \cap F \neq \varnothing$. Пусть $\{\mathcal{I}_{j_1}, \dots, \mathcal{I}_{j_m}\}$ — подсемейство в $\mathcal{I}$, покрывающее $I_s \cap F$. Мы также считаем, что эти промежутки пронумерованы в их «естественном» порядке.

Для упрощения обозначений положим $[x_k, y_k] := \mathcal{I}_{j_k}$, $1 \le k \le m$. Отметим, что ни один из промежутков $[a_s, x_1]$, $[y_1, x_2]$, $[y_2, x_3], \dots, [y_k, x_{k+1}], \dots, [y_{m-2}, x_{m-1}]$, $[y_{m-1}, x_m]$, $[y_m, b_s]$ не пересекается с множеством F.

Применяя теперь (L1), (L2), (L3) и полагая $\|\tilde g\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |\tilde g(x)|$, получим

$$
\begin{aligned}
|g(b_s) - g(a_s)| \le \sum_{k=1}^{m} |g(y_k) - g(x_k)| + \sum_{k=1}^{m-1} |g(x_{k+1}) - g(y_k)| \\
+ (|g(x_1) - g(a_s)| + |g(b_s) - g(y_m)|) \le A \sum_{k=1}^{m} |\mathcal{I}_{j_k}| + \|\tilde g\| \sum_{k=1}^{m-1} (x_{k+1} - y_k) \\
+ \|\tilde g\|((x_1 - a_s) + (b_s - y_m)) \le C|I_s|,
\end{aligned}
$$

где $C = \max\{A, \|\tilde g\|\}$. Отсюда без труда следует оценка

$$
\sum_{s=1}^{Q} |g(b_s) - g(a_s)| \le C \sum_{s=1}^{Q} (b_s - a_s) = C \sum_{s=1}^{Q} |I_s|. \tag{11}
$$

Поскольку g непрерывна, очевидно, что оценка $|g(b_s) - g(a_s)| \le C|I_s|$ выполнена для каждого из промежутков I_s независимо от того, будут его концы принадлежать F или нет. Отметим также, что если $I_s \cap F = \varnothing$, то (11) тривиально.

Ввиду произвольности семейства $\{I_s = [a_s, b_s],\ 1 \le s \le Q\}$, (11) влечет абсолютную непрерывность g.

Для завершения доказательства леммы фиксируем точку $x_0 \in [a, b] \setminus F$. Осталось заметить, что абсолютно непрерывные функции g и $[a, b] \ni x \mapsto g(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \tilde g(t)\, dt$ совпадают в точке x_0 и имеют одинаковые производные вне множества F меры нуль. Поэтому эти функции совпадают на $[a, b]$, и требуемое установлено, ибо вторая функция принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$. $\square$

Для доказательства теоремы 1 удобно использовать следующие вариант леммы 5 для открытого промежутка.

Следствие 1. *Пусть $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывна и $F \subset (a, b)$ — компактное множество лебеговой меры нуль. Допустим, что выполнены следующие условия:*

(CL1) *g дифференцируема при любом $x \in (a, b) \setminus F$;*

(CL2) *существует непрерывная функция $\tilde g : (a, b) \to \mathbb{R}$ такая, что $\tilde g|_{(a,b)\setminus F} = g'|_{(a,b)\setminus F}$;*

(CL3) *найдется константа $A > 0$ такая, что для заданного открытого множества U, $F \subset U \subset (a, b)$, множество F может быть покрыто конечным семейством замкнутых невырожденных промежутков $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_j = [x'_j, x''_j],\ 1 \le j \le N\}$, которые имеют попарно не пересекающиеся внутренности и обладают свойствами*

(CL3.1) *$\mathcal{I}_j \subset U$, $1 \le j \le N$;*

(CL3.2) $|g(x_j'') - g(x_j')| \le A(x_j'' - x_j')$, $1 \le j \le N$.

Тогда g дифференцируема в каждой точке из (a,b) и $g' = \tilde{g}$. Тем самым $g \in C^1((a,b))$.

Доказательство. Результат получается из того, что по лемме 5 $g|_{[\alpha,\beta]}$ входит в класс C^1 на каждом промежутке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, концы которого не принадлежат некоторому нигде не плотному множеству F. $\square$

Лемма 6. *Пусть $\Delta \subset \mathbb{C}$ — треугольник с углами A, B, C. Пусть a, b, c — стороны Δ, лежащие напротив углов A, B, C соответственно. Тогда (при обозначении стороны и ее длины оной и той же буквой) имеет место неравенство*

$$\frac{a+b}{c} \le \frac{2}{\sin C}.$$

Этот факт легко вытекает из теоремы синусов. Мы будем использовать его в лемме 7.

Пусть Δ — (замкнутый) треугольник и L — прямая, пересекающая Δ. Очевидно, возможны следующие три случая взаимного расположения треугольника и прямой:

1^0. $L \cap \Delta$ — одноточечное множество, т. е. это вершина треугольника Δ.

2^0. L проходит через две вершины треугольника Δ.

3^0. $L \cap \operatorname{Int} \Delta \ne \varnothing$.

Замечание 3. Ясно, что в случаях 2^0, 3^0 прямая L вырезает из Δ треугольник, замыкание которого обозначим через $\widetilde{\Delta}$ (если есть два треугольника, на которые L разбивает Δ, возьмем любой из них).

Следующее утверждение служит основным инструментом для доказательства теоремы 1.

Лемма 7. *Пусть $P = P(f)$ — потенциал, определенный формулой (3). Пусть Δ_k^n — треугольник ранга n и L — прямая такая, что множество $L \cap \Delta$ не одноточечно. Пусть $\widetilde{\Delta}_k^n$ — замыкание треугольника, вырезаемого из Δ_k^n прямой L и z_1, z_2, z_3 — вершины $\widetilde{\Delta}_k^n$ и $[z_1, z_2] \subset L$. Тогда*

$$|P(z_2) - P(z_1)| \le \frac{2K(f)|z_2 - z_1|}{\sin\theta}, \tag{12}$$

где θ — наименьший угол равнобедренного треугольника Δ_k^n (см. введение).

Доказательство. Результат леммы вытекает непосредственно из лемм 4 и 6:

$$\begin{aligned}|P(z_2) - P(z_1)| &\le |P(z_3) - P(z_2)| + |P(z_3) - P(z_1)| \\ &\le K(f)\frac{|z_3 - z_2| + |z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|}|z_2 - z_1| \le \frac{2K(f)|z_2 - z_1|}{\sin\theta}. \quad \square\end{aligned}$$

Теорема 1. *Пусть $f \in L^\infty(\Gamma)$ и $P(z) = \int\limits_\Gamma f(\zeta) ln|\zeta - z|\, d\mu(\zeta)$. Тогда*

(i) *для любого $z \in \mathbb{C}$*

$$\frac{\partial P(z)}{\partial x} = \int\limits_\Gamma \frac{(x-\xi)f(\zeta)d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial P(z)}{\partial y} = \int\limits_\Gamma \frac{(y-\eta)f(\zeta)d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2}, \tag{14}$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$;

(ii) *частные производные* $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}$, $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$ *непрерывны в* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Вначале докажем, что P класса C^1 почти на каждой горизонтальной и почти на каждой вертикальной прямой в $\mathbb{C}$. Ограничимся рассмотрением горизонтальных линий.

Поскольку Γ — квазиконформная кривая [1], ее плоская лебегова мера равна нулю. Поэтому пересечение Γ почти с каждой горизонтальной прямой и почти с каждой вертикальной прямой имеет нулевую линейную лебегову меру.

Фиксируем $y_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\right]$[3)] такую, что пересечение горизонтальной линии $L = L(y_0) = \{(x, y_0) : x \in \mathbb{R}\}$ с $\Gamma (= \Gamma_\theta)$ имеет нулевую линейную лебегову меру. Положим $g(x) = P(x + iy_0)$ для $x \in \mathbb{R}$, где $P(z) = P(f)(z)$ определено в (3), и пусть $F := \{x \in \mathbb{R} : (x, y_0) \in L \cap \Gamma\}$.

Убедимся в том, что выполнены условия следствия 1 для g и F. Положим $(a, b) = \mathbb{R}$ и $\tilde{g}(x) = \widetilde{P}_x(x + iy_0)$.

Так как P непрерывна в $\mathbb{C}$ и гладкая вне Γ, выполнено условие (CL1). Условие (CL2) также выполнено, что легко вытекает из леммы 2.

Проверка (CL3) требует немного больших усилий. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ — открытое множество, содержащее F. Поскольку F компактно, ясно, что можно всегда брать $U \supset F$ состоящим из конечного набора дизъюнктных открытых промежутков.

Известно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся 2^n треугольников Δ_k^n ранга n. Напомним, что $\operatorname{diam} \Delta_k^n = \lambda^n$, где $\lambda = (2\cos\theta)^{-1}$. Так как $\lambda^n \to 0$ при $n \to \infty$, фиксируем n такое, что

$$\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^n\} : \Delta_k^n \cap L \neq \varnothing \Rightarrow \Delta_k^n \subset U \times \mathbb{R}. \tag{15}$$

Пусть $\mathcal{T} = \{\Delta_{k_1}^n, \dots, \Delta_{k_m}^n\}$ — семейство всех треугольников ранга n, пересекающихся с L. Их объединение, очевидно, содержит $L \cap \Gamma$. В общем случае есть два различных подсемейства в $\mathcal{T}$: подсемейство $\mathcal{T}_S$ состоит из треугольников, каждый из которых пересекает L по невырожденному замкнутому промежутку (отрезку); подсемейство $\mathcal{T}_1$ состоит из треугольников, каждый из которых пересекает L только в одной точке, поэтому такой точкой является вершина треугольника с углом θ.

Для упрощения обозначений будем считать, что

$$(\mathcal{T}_S) = \{\Delta_{k_1}^n, \Delta_{k_2}^n, \dots, \Delta_{k_p}^n\},$$

и

$$(\mathcal{T}_1) = \{\Delta_{k_{p+1}}^n, \Delta_{k_{p+2}}^n, \dots, \Delta_{k_m}^n\}.$$

С учетом замечания 3 обозначим через $\widetilde{\Delta}_{k_j}$ замыкание треугольника, отрезаемого от Δ_{k_j} прямой L, $j = 1, 2, \dots, p$. Пусть $z_{j,1}$, $z_{j,2}$, $z_{j,3}$ — вершины треугольника $\widetilde{\Delta}_{k_j}$ такие, что $[z_{j,1}, z_{j,2}] \subset L$. Пусть $z_{j,1} = x_j' + iy_0$, $z_{j,2} = x_j'' + iy_0$, $j = 1, \dots, p$.

Рассматривая $(\mathcal{T}_1)$, положим $w_l = \xi_l + iy_0$, где $\{w_l\} = \Delta_{k_l}^n \cap L$, $l = p+1, p+2, \dots, m$.

Тем самым семейство

$$\{[z_{1,1}, z_{1,2}], [z_{2,1}, z_{2,2}], \dots, [z_{p,1}, z_{p,2}], w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_m\} \tag{16}$$

[3)] Отметим, что если $y_0 \notin [0, \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta]$, то (13) очевидно.

покрывает $\Gamma \cap L$.

Так как элементы семейства (16) взаимно не пересекаются и содержатся в $U \times \mathbb{R}$, найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что замкнутые промежутки $[w_{p+1}, w_{p+1} + \varepsilon], \dots, [w_m, w_m + \varepsilon]$ содержатся в $U \times \mathbb{R}$ и семейство

$$\{[z_{1,1}, z_{1,2}], [z_{2,1}, z_{2,2}], \dots, [z_{p,1}, z_{p,2}], [w_{p+1}, w_{p+1} + \varepsilon], \\ [w_{p+2}, w_{p+2} + \varepsilon], \dots, [w_m, w_m + \varepsilon]\} \quad (17)$$

составлено из попарно не пересекающихся промежутков, образующих покрытие $\Gamma \cap L$.

Так как L горизонтальна, семейство

$$\{[x_1', x_1''], \dots, [x_p', x_p''], [\xi_{p+1}, \xi_{p+1} + \varepsilon], \dots, [\xi_m, \xi_m + \varepsilon]\} \quad (18)$$

(составленное из проекций (17) на вещественную ось) также состоит из попарно не пересекающихся промежутков и образует покрытие множества F.

Теперь для каждого j, $1 \le j \le p$, ввиду (12) имеем

$$|g(x_j'') - g(x_j')| \le \frac{2K(f)|x_j'' - x_j'|}{\sin\theta}. \quad (19)$$

С другой стороны, поскольку g' вне F совпадает с ограниченной (на $\mathbb{R}$) функцией $\tilde{g}$ (см. лемму 2(ii)), получаем, что для любого j, $p + 1 \le j \le m$,

$$|g(\xi_j + \varepsilon) - g(\xi_j)| \le K(f)\varepsilon.$$

Отсюда делаем вывод, что предположение (CL3) следствия 1 выполнено для $A = \frac{2K(f)}{\sin\theta}$. Тем самым g входит в класс $C^1(\mathbb{R})$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ будет

$$P_x(x + iy_0) = \widetilde{P}_x(x + iy_0) = \int\limits_\Gamma \frac{(x - \xi)f(\zeta)d\mu(\zeta)}{|\zeta - (x + iy_0)|^2},$$

где $\widetilde{P}_x$ определено в (5). Таким образом, для почти всех $y \in \mathbb{R}$ и всех $x \in \mathbb{R}$ равенство (13) выполнено. Вполне аналогично можно доказать, что (14) имеет место для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $y \in \mathbb{R}$. Докажем, что на самом деле (13) и (14) выполнены для всех $z \in \mathbb{C}$. Будем доказывать только (13).

Фиксируем $y \in \mathbb{R}$. Ввиду того, что (13) имеет место для почти всех горизонтальных линий, найдется последовательность (y_n), $y_n \to y$, такая, что (13) выполнено для $z = x + iy_n$, $x \in \mathbb{R}$.

Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$P(x+iy_n) = P(x_0+iy_n) + \int\limits_{x_0}^{x} P_x(\xi+iy_n)\, d\xi = P(x_0+iy_n) + \int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{P}_x(\xi+iy_n)\, d\xi. \quad (20)$$

Принимая во внимание свойства $\widetilde{P}_x$ (лемма 2(i)), можем перейти к пределу в (20) при $n \to \infty$. Тогда получаем

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x + iy) = P(x_0 + iy) + \int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{P}_x(\xi + iy)\, d\xi, \quad (21)$$

откуда вытекает (13). Совершенно аналогичные рассуждения дают доказательство (14), которое мы тем самым опустим. Утверждение (ii) немедленно следует из леммы 2(i). Значит, для каждого $f \in L^\infty(\Gamma)$ потенциал $P(f)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{C})$. $\square$

3. О задаче Робена

В качестве применения теоремы 1 получим решение задачи типа Робена (см., например, [3]) для некоторого класса комплексных мер, распределенных на кривой Ван Коха. А именно, рассмотрим меры на Γ, плотности которых относительно меры μ суть функции $f \in L^\infty(\Gamma)$.

Теорема 2. *Пусть $f \in L^\infty(\Gamma)$ и $c \in \mathbb{C}$ таковы, что*

$$\forall z \in \Gamma \quad P(z) = P(f)(z) = \int\limits_{\Gamma} f(\zeta) \ln|\zeta - z| \, d\mu(\zeta) = c. \tag{22}$$

Тогда $f = 0$ и тем самым $c = 0$.

Доказательство. Пусть выполнено (22) для некоторых f и c. Из (13), (14) легко вытекает, что непрерывные в $\mathbb{C}$ частные производные P_x, P_y гармоничны вне Γ и исчезают на ∞. Докажем, что они обращаются в нуль и на $\mathbb{C}$.

Заметим, что вершинами Δ_k^n являются z_{k-1}^n, z_{2k-1}^{n+1}, z_k^n. Фиксируем одну из них, пусть z_k^n. Элементарное исследование конструкции $\Gamma = \Gamma_\theta$ (см. [1]) показывает, что существуют две последовательности $\{z_s'\}$, $\{z_s''\}$ такие, что для каждого $s \in \mathbb{N}$ будет $z_s' \in \Gamma \cap (z_k^n, z_{k-1}^n)$, $z_s'' \in \Gamma \cap (z_k^n, z_{2k-1}^{n+1})$ и $z_s' \to z_k^n$, $z_s'' \to z_k^n$ при $s \to \infty$, где через (a, b) обозначен промежуток $\{a + t(b - a) : t \in (0, 1)\}$. Будем рассматривать $e' = z_{k-1}^n - z_k^n$, $e'' = z_{2k-1}^{n+1} - z_k^n$ как векторы.

Согласно предположению $P(z) = c$ для любого $z \in \Gamma$, следовательно, производные $D_{e'}P(z_k^n)$, $D_{e''}P(z_k^n)$ в точке z_k^n по векторам e', e'' равны нулю. Функция P дифференцируема в точке z_k^n, поэтому $P_x(z_k^n) = P_y(z_k^n) = 0$. Отметим, что множество всех вершин всех треугольников Δ_k^n, $1 \le k \le 2^n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, плотно в Γ. Отсюда, вспоминая, что $P \in C^1(\mathbb{C})$, выводим, что частные производные P_x, P_y обращаются в нуль на Γ. Но эти производные являются гармоническими функциями вне Γ и обращаются в нуль на ∞. Согласно принципу максимума для гармонических функций заключаем, что $P_x = P_y = 0$ на $\mathbb{C}$.

Нам понадобится следующий результат из теоремы 7(ii) в [1].

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{AC}(\Gamma)$ — пространство функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, непрерывных в $\mathbb{C}$, аналитических в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и исчезающих на ∞.*

Тогда линейный оператор $T : L^\infty(\Gamma) \to \mathcal{AC}(\Gamma)$, определенный равенством

$$T(f)(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

инъективен.

Корректность определения этого оператора, равно как и нетривиальность $\mathcal{AC}(\Gamma)$, доказана в [1].

Вспоминая, что $P_x = P_y = 0$, и применяя (13), (14), получим, что для любого $z \in \mathbb{C}$

$$- P_x(z) + iP_y(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{(\xi - x) f(\zeta) d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} + i \int\limits_{\Gamma} \frac{(y - \eta) f(\zeta) d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2}$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z}) f(\zeta) d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = 0.$$

По лемме 8 отсюда следует, что $f = 0$, так что $c = 0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пономарев С. П.* О некоторых свойствах кривых Ван Коха // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1305–1321.
2. *Пономарев С. П.* О хаусдорфовой размерности квазиконформных кривых // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 142–148.
3. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 2.

Статья поступила 12 августа 2008 г.

Пономарев Станислав Петрович (Stanislav Ponomarev)
Pomeranian Academy in Słupsk, Institute of Mathematics,
Arciszewskiego 22 b, 76-200 Słupsk, Poland
p35st9@poczta.onet.pl