Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 512.54+512.53

ОБ ИНВЕРСНЫХ МОНОИДАХ КОС И ОТРАЖЕНИЙ ТИПА B

В. В. Вершинин

Аннотация. Хорошо известны связи между группой кос и симметрической группой, между группами кос Артина — Брискорна и группами Кокстера: последние являются фактор-группами групп кос Артина — Брискорна. Инверсный моноид кос аналогичным образом связан с инверсным симметрическим моноидом. В настоящей работе мы показываем, что аналогичные связи существуют между инверсным моноидом кос типа B и инверсным моноидом отражений типа B. Это дает копредставление последнего моноида.

Ключевые слова: коса, инверсный моноид кос, группа отражений типа B, представление, моноид отражений.

Юрию Григорьевичу Решетняку по случаю его 80-летия

1. Введение

Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство ($\dim V = n$) с евклидовой структурой. Пусть W — конечная подгруппа группы $GL(V)$, порожденная отражениями. Мы предполагаем, что W *существенна*, т. е. что множество неподвижных векторов по отношению к действию W состоит только из нуля: $V^W = 0$. Пусть $\mathscr{M}$ — множество гиперплоскостей в пространстве V такое, что группа W порождена ортогональными отражениями по отношению к $M \in \mathscr{M}$. Мы предполагаем, что для каждого элемента $w \in W$ и для каждой гиперплоскости $M \in \mathscr{M}$ гиперплоскоскость $w(M)$ принадлежит $\mathscr{M}$.

Рассмотрим комплексификацию V_C пространства V и комплексификации M_C гиперплоскостей $M \in \mathscr{M}$. Пусть $Y_W = V_C - \bigcup\limits_{M\in\mathscr{M}} M_C$. Группа W действует свободно на Y_W. Пусть $X_W = Y_W/W$, тогда Y_W есть накрытие над X_W, соответствующее группе W.

Обобщенная группа кос $Br(W)$, соответствующая группе Кокстера W, определяется как фундаментальная группа пространства X_W регулярных орбит действия W, и соответствующая группа крашеных кос $P(W)$ определяется как фундаментальная группа пространства Y_W. Таким образом, для обобщенных групп кос имеем $Br(W) = \pi_1(X_W)$, $P(W) = \pi_1(Y_W)$. Группы $Br(W)$ были определены Брискорном [1] и называются также *группами кос Артина — Брискорна.* Брискорн [1] и Делинь [2] доказали, что пространства X_W и Y_W суть пространства типа $K(\pi, 1)$.

Накрытие, соответствующее действию группы W на пространстве Y_W, порождает точную последовательность

$$1 \to \pi_1(Y_W) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X_W) \to W \to 1.$$

Рис. 1.

Таким образом, имеется естественным образом определенный гомоморфизм

$$\rho : Br(W) \to W.$$

Геометрическая коса как система n кривых в $\mathbb{R}^3$ естественным образом ведет к понятию частичной косы, у которой некоторые k, $0 \le k \le n$, из этих n кривых могут быть удалены; частичные косы образуют *инверсный моноид кос* IB_n [3]. По определению моноид называется *инверсным*, если для любого его элемента a существует единственный элемент b (называемый *обратным*) такой, что $a = aba$ и $b = bab$. Это понятие введено В. В. Вагнером в 1952 г. [4]. Книги [5, 6] являются стандартными ссылками по теории инверсных полугрупп.

Умножение частичных кос показано на рис. 1. На конечной стадии удаляются все неполные нити, т. е. те, которые не имеют пересечений либо с верхней, либо с нижней полуплоскостью.

Таким образом, классическая группа кос (которая соответствует случаю $W = \Sigma_n$, симметрической группы) вложена в инверсный моноид кос IB_n.

Наиболее важным примером инверсного моноида является моноид частичных (т. е. определенных на подмножестве) инъективных отображений множества в себя. Для конечного множества это приводит к понятию *симметрического инверсного моноида* I_n, которое обобщает и включает классическую симметрическую группу Σ_n. Копредставление симметрического инверсного моноида получено Л. М. Поповой [7], см. также формулы (2)–(4) ниже.

Пусть теперь W — группа Кокстера типа B_n. Соответствующий инверсный моноид $IB(B_n)$ изучался в [8], а моноид отражений $I(B_n)$ — в [9].

Цель настоящей заметки — показать, что в случае типа B ситуация во многом схожая: существует отображение $\rho_B : IB(B_n) \to I(B_n)$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} Br(B_n) \arrow[r] \arrow[d] & W(B_n) \arrow[d] \\ IB(B_n) \arrow[r, "\rho_B"] & I(B_n) \end{tikzcd}, \tag{1}$$

где вертикальные стрелки обозначают вложение группы обратимых элементов в моноид.

2. Инверсный моноид кос и тип *B*

Пусть N — конечное множество мощности n, скажем $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Инверсный симметрический моноид I_n может быть интерпретирован как моноид частичных мономорфизмов множества N в себя. Оснастим элементы множества N знаками, т. е. пусть $SN = \{\delta_1 v_1, \dots, \delta_n v_n\}$, где $\delta_i = \pm 1$. Группа Вейля $W(B_n)$ типа B может быть интерпретирована как группа перестановок со знаками множества SN:

$$W(B_n) = \{\sigma \text{ — биекция } \ SN : (-x)\sigma = -(x)\sigma \text{ для } x \in SN\}.$$

Моноид частичных перестановок со знаками $I(B_n)$ определяется следующим образом: $I(B_n) = \{\sigma$ — частичная биекция $SN : (-x)\sigma = -(x)\sigma$ для $x \in SN$ и $x \in \operatorname{dom} \sigma$ тогда и только тогда, когда $-x \in \operatorname{dom} \sigma\}$, где $\operatorname{dom} \sigma$ означает область определения мономорфизма σ.

Напомним, что моноид M *факторизуем*, если $M = EG$, где E — множество идемпотентов моноида M, а G — подгруппа моноида M. Очевидным образом моноид $I(B_n)$ факторизуем [9], так как каждая частичная перестановка, учитывающая знаки, может быть продолжена до элемента группы единиц моноида $I(B_n)$, т. е. до перестановки, учитывающей знаки с областью определения, равной SN.

Обычно группа кос Br_n задается следующим копредставлением Артина [10]. Оно имеет образующие σ_i, $i = 1, \dots, n-1$, и два типа соотношений:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ если } |i-j| > 1, \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \tag{2}$$

Следующее копредставление инверсного моноида кос было получено в [3]. Оно имеет образующие σ_i, σ_i^{-1}, $i = 1, \dots, n-1$, ϵ, и соотношения

$$\begin{gathered} \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1, \text{ для всех } \ i, \quad \epsilon \sigma_i = \sigma_i \epsilon \text{ для } i \geq 2, \\ \epsilon \sigma_1 \epsilon = \sigma_1 \epsilon \sigma_1 \epsilon = \epsilon \sigma_1 \epsilon \sigma_1, \quad \epsilon = \epsilon^2 = \epsilon \sigma_1^2 = \sigma_1^2 \epsilon \end{gathered} \tag{3}$$

плюс соотношения кос (2).

Геометрически образующая ϵ обозначает частичную косу, построенную из тривиальной косы удалением первой нити.

Если заменим первое соотношение в (3) следующим набором соотношений:

$$\sigma_i^2 = 1 \quad \text{для всех } i, \tag{4}$$

и удалим лишние соотношения $\epsilon = \epsilon \sigma_1^2 = \sigma_1^2 \epsilon$, то получим копредставление симметрического инверсного моноида I_n [7]. Мы можем также просто добавить соотношения (7), если нас не беспокоит наличие излишних соотношений. Получаем канонический гомоморфизм [3]

$$\rho_n : IB_n \to I_n,$$

который является естественным продолжением соответствующего гомоморфизма для групп (кос и симметрической).

Более сбалансированный набор соотношений для инверсного моноида кос получен в [11]. Пусть ϵ_i — тривиальная коса с удаленной i-й нитью, т. е. $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_{i+1} = \sigma_i^{\pm 1} \epsilon_i \sigma_i^{\pm 1}$. Таким образом, в качестве образующих берем σ_i, σ_i^{-1}, $i = 1, \dots, n-1$, ϵ_i, $i = 1, \dots, n$, а соотношениями являются следующие:

$$\begin{gathered} \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1 \text{ для всех } i, \quad \epsilon_j \sigma_i = \sigma_i \epsilon_j \text{ для } j \neq i, i+1, \\ \epsilon_i \sigma_i = \sigma_i \epsilon_{i+1}, \quad \epsilon_{i+1} \sigma_i = \sigma_i \epsilon_i, \quad \epsilon_i = \epsilon_i^2, \\ \epsilon_{i+1} \sigma_i^2 = \sigma_i^2 \epsilon_{i+1} = \epsilon_{i+1}, \quad \epsilon_i \epsilon_{i+1} \sigma_i = \sigma_i \epsilon_i \epsilon_{i+1} = \epsilon_i \epsilon_{i+1}, \end{gathered} \tag{5}$$

плюс соотношения кос (2).

Пусть EF_n — некоторый моноид частичных изоморфизмов свободной группы F_n, определенный следующим образом. Пусть a — элемент симметрического инверсного моноида I_n, $a \in I_n$, т. е. a — частичный изоморфизм множества $\{1, \ldots, n\}$. Пусть $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\}$ — образ a и элементы $i_1, \ldots, i_k$, принадлежат области определения a. Моноид EF_n состоит из изоморфизмов

$$\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rangle \to \langle x_{j_1}, \ldots, x_{j_k} \rangle,$$

выражаемых формулой $f_a : x_i \mapsto w_i^{-1} x_{a(i)} w_i$, если i принадлежит множеству $i_1, \ldots, i_k$, и отображение f_a не определено на x_i в противном случае, а w_i — слово из букв $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$. Композиция f_a и g_b, $a, b \in I_n$, определена для x_i, принадлежащего области определения $a \circ b$. Положим $x_{j_m} = 1$ в слове w_i, если x_{j_m} не принадлежит области определения g_b. Если положим $w_i = 1$, то получаем вложение I_n в EF_n. Отображая каждый $f_a \in EF_n$ в $a \in I_n$, получаем гомоморфизм $EF_n \to I_n$.

Предложение 1. *Канонические гомоморфизмы $I_n \to EF_n$ и $EF_n \to I_n$ дают следующее расщепление $I_n \to EF_n \to I_n$.* $\square$

Напомним, что группы кос Артина — Брискорна типа B изоморфны группам кос диска с фиксированной точкой [12–14]. По отношению к классической группе кос эта группа имеет одну дополнительную образующую τ и соотношения типа B:

$$\begin{gathered} \tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau, \quad \tau\sigma_i = \sigma_i\tau, \text{ если } i > 1, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \quad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \text{ если } |i-j| > 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Моноид $IB(B_n)$ частичных кос типа B можно также рассматривать как подмоноид моноида IB_{n+1}, состоящий из частичных кос с фиксированной первой нитью. Интерпретация как моноида классов изотопии гомеоморфизмов также возможна. Как обычно, рассмотрим диск D^2 с данными $n+1$ точками. Обозначим множество этих точек через Q_{n+1}. Рассмотрим гомеоморфизмы диска D^2 на копию этого диска с условием, что первая точка всегда отображается на себя и среди остальных n точек только k точек, $k \le n$ (скажем $i_1, \ldots, i_k$), отображаются биективно на k точек (скажем $j_1, \ldots, j_k$) из множества Q_{n+1} (без первой точки) второй копии диска D^2. Классы изотопии таких гомеоморфизмов образуют моноид $IB(B_n)$.

Теорема 1 [8]. *Добавление к копредставлению группы кос типа B (6) образующей ϵ и соотношений*

$$\begin{gathered} \tau\tau^{-1} = \tau^{-1}\tau = 1, \quad \sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = 1 \text{ для всех } i, \quad \epsilon\sigma_i = \sigma_i\epsilon \text{ для } i \ge 2, \\ \epsilon\sigma_1\epsilon = \sigma_1\epsilon\sigma_1\epsilon = \epsilon\sigma_1\epsilon\sigma_1, \quad \epsilon = \epsilon^2 = \epsilon\sigma_1^2 = \sigma_1^2\epsilon, \quad \epsilon\tau = \tau\epsilon = \epsilon. \end{gathered} \tag{7}$$

деат копредставление моноида $IB(B_n)$. Добавление к копредставлению (5) моноида IB_n одной образующей τ, соотношений типа B (6) и соотношений

$$\tau\tau^{-1} = \tau^{-1}\tau = 1, \quad \epsilon_1\tau = \tau\epsilon_1 = \epsilon_1.$$

приводит к другому копредставлению моноида $IB(B_n)$, Это факторизуемый инверсный моноид.

Определим действие моноида $IB(B_n)$ на множестве SNс помощью частичных изоморфизмов следующим образом:

$$\sigma_i(\delta_j v_j) = \begin{cases} \delta_i v_{i+1}, & \text{если } j = i, \\ \delta_{i+1} v_i, & \text{если } j = i+1, \\ \delta_j v_j, & \text{если } j \ne i, i+1; \end{cases} \tag{8}$$

$$\tau(\delta_j v_j) = \begin{cases} -\delta_1 v_1, & \text{если } j = 1, \\ \delta_j v_j, & \text{если} j \neq 1; \end{cases} \tag{9}$$

$$\operatorname{dom} \epsilon = \{\delta_2 v_2, \dots, \delta_n v_n\}; \tag{10}$$

$$\epsilon(\delta_j v_j) = \delta_j v_j, \quad \text{если } j = 2, \dots, n; \tag{11}$$

$$\operatorname{dom} \epsilon_i = \{\delta_1 v_1, \dots, \widehat{\delta_i v_i}, \dots, \delta_n v_n\}; \tag{12}$$

$$\epsilon_i(\delta_j v_j) = \delta_j v_j, \quad \text{если } j = 1, \dots, \widehat{i}, \dots, n. \tag{13}$$

Прямая проверка показывает, что соотношения инверсного моноида кос типа B выполнены для соответствующих суперпозиций частичных изоморфизмов, определяемых элементами σ_i, τ и ϵ_i.

Теорема 2. *Действие, заданное формулами* (8)–(13), *определяет гомоморфизм инверсных моноидов* $\rho_B : IB(B_n) \to I(B_n)$ *такой, что диаграмма* (1) *коммутативна.* $\square$

Теорема 3. *Гомоморфизм* $\rho_B : IB(B_n) \to I(B_n)$ *является эпиморфизмом. Если в копредставлении* $IB(B_n)$ *заменить первое соотношение из* (3) *набором соотношений* $\sigma_i^2 = 1$ *для всех* i *и удалить излишние соотношения* $\epsilon = \epsilon\sigma_1^2 = \sigma_1^2\epsilon$, *а также заменить первое соотношение из* (7) *соотношением* $\tau^2 = 1$, *то получается копредставление моноида* $I(B_n)$,

Доказательство. Обозначим временно через IV_n моноид, имеющий копредставление, данное в формулировке теоремы. Для доказательства того, что гомоморфизм ρ_B есть эпиморфизм, используем тот факт, что моноид $I(B_n)$ факторизуем, так что каждый его элемент может быть записан в виде ϵg, где ϵ принадлежит множеству идемпотентов, а g — элемент группы Вейля $W(B_n)$ типа B. Для группы Вейля гомоморфизм ρ_B есть эпиморфизм, $W(B_k) = Br(B_k)/P(B_k)$, множества идемпотентов моноидов $IB(B_n)$ и $I(B_n)$ совпадают и гомоморфизм ρ_B, ограниченный на множество $E(IB(B_n))$ идемпотентных элементов моноида $IB(B_n)$, тождествен.

Как следует из определения действия моноида $IB(B_n)$ на множестве SN, элементы τ^2 и σ_i^2 отображаются в единицу под действием гомоморфизма ρ_B. Таким образом, гомоморфизм ρ_B разлагается с помощью гомоморфизма $\tilde{\rho}_B : IV_n \to I(B_n)$ в следующую композицию: $\rho_B : IB(B_n) \to IV_n \to I(B_n)$. Чтобы показать, что $\tilde{\rho}_B$ есть изоморфизм, сравниваем мощности множеств IV_n и $I(B_n)$. Легко посчитать, что мощность (число элементов) множества $I(B_n)$ равна

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}^2 k!.$$

Пусть $\epsilon_{k+1,n}$ обозначает частичную косу с тривиальными первыми k нитями и отсутствующими остальными $n-k$ нитями. Она может быть выражена с использованием образующей ϵ или образующих ϵ_i следующим образом:

$$\epsilon_{k+1,n} = \epsilon\sigma_{n-1}\dots\sigma_{k+1}\epsilon\sigma_{n-1}\dots\sigma_{k+2}\epsilon\dots\epsilon\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\epsilon\sigma_{n-1}\epsilon,$$

$$\epsilon_{k+1,n} = \epsilon_{k+1}\epsilon_{k+2}\dots\epsilon_n.$$

Как доказано в [3], каждая частичная коса имеет представителя вида

$$\sigma_{i_1}\dots\sigma_1\dots\sigma_{i_k}\dots\sigma_k\epsilon_{k+1,n}x\epsilon_{k+1,n}\sigma_k\dots\sigma_{j_k}\dots\sigma_1\dots\sigma_{j_1},$$

$$k \in \{0,\dots,n\},\ 0 \le i_1 < \dots < i_k \le n-1 \text{ и } 0 \le j_1 < \dots < j_k \le n-1,$$

где $x \in Br_k$. То же самое верно и для $IB(B_n)$, где $x \in Br(B_k)$. Элементы τ^2 и σ_i^2 отображаются в 1 под действием ρ_B так, что все представители какого-либо класса эквивалентности по модулю группы крашеных кос типа B_k отображаются в тот же самый элемент моноида $I(B_n)$. Эти классы эквивалентности образуют группу Вейля $W(B_k)$. Порядок группы Вейля типа B_k равен $2^k k!$. Таким образом, множество мощности, меньшей или равной $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}^2 k!$, отображается эпиморфно на множество в точности этой мощности. Это означает, что эпиморфизм $\tilde{\rho}_B$ есть изоморфизм. $\square$

Пусть $\mathscr{E}$ — моноид, порожденный единственной идемпотентной образующей ϵ.

Предложение 2. *Абеленизация* $\mathrm{Ab}(IBB_n)$ *моноида* $IB(B_n)$ *изоморфна моноиду* $\mathscr{E} \oplus \mathbb{Z}^2$, *профакторизованному по соотношениям* $\epsilon + \tau = \epsilon$, $\epsilon + \sigma = \epsilon$, *где* τ *и* σ *суть образующие* $\mathbb{Z}^2$. *Канонический гомоморфизм абеленизации* $a : IB(B_n) \to \mathrm{Ab}(IB(B_n))$ *задается по формулам* $a(\epsilon_i) = \epsilon$, $a(\tau) = \tau$, $a(\sigma_i) = \sigma$. *Канонический гомоморфизм из* $\mathrm{Ab}(IB(B_n))$ *в* $\mathrm{Ab}(I(B_n))$ *состоит из факторизации* $\mathbb{Z}^2$ *по модулю* 2. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brieskorn E.* Sur les groupes de tresses [d'après V. I. Arnol'd]. (French) // Séminaire Bourbaki, 24ème année. 1971/1972. N 401. P. 21–44. Berlin: Springer-Verl., 1973. (Lecture Notes Math.; V. 317).
2. *Deligne P.* Les immeubles des groupes de tresses généralisés // Invent. Math. 1972. V. 17. P. 273–302.
3. *Easdown D., Lavers T. G.* The inverse braid monoid // Adv. Math. 2004. V. 186, N 2. P. 438–455.
4. *Вагнер В. В.* Обобщенные группы // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84, № 6. С. 1119–1122.
5. *Petrich M.* Inverse semigroups. New York: John Wiley & Sons, 1984. (Pure Appl. Math. (New York). A Wiley-Intersci. Publ.).
6. *Lawson M. V.* Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. River Edge, NJ: World Sci. Publ. Co., Inc., 1998.
7. *Попова Л. И.* Определяющие соотношения некоторых полугрупп частичных преобразований конечного множества // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. 1961. № 218. С. 191–212.
8. *Vershinin V. V.* On the inverse braid monoid // Topology Appl. 2009. V. 156, N 6. P. 1153–1166.
9. *Everitt B., Fountain J.* Partial mirror symmetry. I: reflection monoids. 22 pages. arXiv:math/0701313
10. *Artin E.* Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1925. Bd 4. S. 47–72.
11. *Gilbert N. D.* Presentations of the inverse braid monoid // J. Knot Theory Ramifications. 2006. V. 15, N 5. P. 571–588.
12. *Lambropoulou S.* Solid torus links and Hecke algebras of B-type // Proc. conf. on quantum topology, Manhattan, KS, 1993. River Edge, NJ: World Sci. Publ. Co., Inc., 1994. P. 225–245.
13. *Вершинин В. В.* О группах кос в телах с ручками // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 755–764.
14. *Вершинин В. В.* Группы кос и пространства петель // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 2. С. 3–84.

Статья поступила 21 февраля 2009 г.

Вершинин Владимир Валентинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`versh@math.nsc.ru`, `vershini@math.univ-montp2.fr`