Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 517.54

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА. СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ТОЧЕК РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ

Р. Б. Салимов, П. Л. Шабалин

Аннотация. Получено решение краевой задачи Гильберта теории аналитических функций для полуплоскости в случае, когда коэффициенты краевого условия имеют счетное множество точек разрыва первого рода. Подробно рассмотрены две существенно различные ситуации: ряд, составленный из скачков и приращений непрерывной составляющей аргумента функции коэффициентов, сходится; указанный ряд расходится. В соответствии с этим получаются задачи Гильберта с конечным и бесконечным индексами. Выведены формулы общего решения, исследованы картины разрешимости этих задач.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, бесконечный индекс, целые функции, индикатор роста.

1. Введение

Задача Гильберта для полуплоскости — это задача об определении аналитической в верхней полуплоскости $D = \{z : z = x + iy,\, y > 0\}$ функции $F(z)$ по заданному краевому условию

$$a(t)\operatorname{Re}F(t) - b(t)\operatorname{Im}F(t) = c(t). \tag{1}$$

Ситуация, когда коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ непрерывны на вещественной оси всюду, кроме конечного множества точек разрыва первого рода, изучалась в [1, с. 467; 2, с. 302; 3]. Ниже мы рассмотрим эту задачу в случае, когда коэффициенты имеют счетное множество точек разрыва первого рода. При этом возможны две существенно различные ситуации: случаи конечного и бесконечного индекса задачи (1), связанные со сходимостью либо расходимостью ряда, составленного из скачков и приращений на интервалах непрерывности функции $\nu(t) = \arg G(t)$, $G(t) = a(t) - ib(t)$.

Отметим, что задача Гильберта для полуплоскости, индекс которой обращается в бесконечность, изучалась лишь в случаях непрерывности функции $\nu(t)$ на любом конечном интервале вещественной оси и степенной или логарифмической особенности этой функции при $t \to \infty$ в работах [4, 5], где решение задачи методом Н. И. Мусхелишвили [2, с. 139–155] сводилось к исследованию более сложной краевой задачи Римана (при этом существенно использовались основополагающие результаты Н. В. Говорова, см., например, [6], по краевой задаче Римана с бесконечным индексом для плоскости с разрезом). Важные

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00381).

достижения в этом направлении достигнуты в работах [7–10]. В наших работах [11, 12] задача Гильберта с бесконечным индексом того же типа, что и в [5], решалась непосредственно (без использования решения соответствующей задачи Римана с бесконечным индексом).

Предложенный нами в [11] метод, с одной стороны, позволяет более полно описать картину разрешимости задачи (аналог теоремы 3 из [11] в работе [5] отсутствует), а с другой стороны, является перспективным для решения более сложной задачи с бесконечным индексом и счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов, когда особенность индекса формируется не только неограниченным ростом непрерывной составляющей функции $\nu(t)$, но и накоплением скачков в точках разрыва коэффициентов.

Отметим, что картина разрешимости задачи Гильберта с непрерывными коэффициентами либо коэффициентами, имеющими конечное число точек разрыва первого рода, полностью описывается индексом задачи. Поэтому задача Гильберта, у которой индекс равен бесконечности, существенно отличается от классического случая. В случае бесконечного индекса степенного или логарифмического типов существование и число решений задачи зависят от множества целых функций, порядок и индикатор роста которых связаны с характеристиками особенности индекса.

Подчеркнем, что задача Гильберта с бесконечным множеством точек разрыва коэффициентов ранее не рассматривалась. Однако методом Н. И. Мусхелишвили может быть решена краевая задача Гильберта, когда коэффициенты краевого условия имеют бесконечное число нулей и полюсов первого порядка, на основе результатов М. И. Журавлевой [13, 14] по решению соответствующей задачи Римана.

2. Случай конечного индекса

Рассмотрим задачу об определении аналитической в верхней полуплоскости D функции $F(z)$ по краевому условию (1), которое выполняется на вещественной оси L всюду, кроме сгущающейся на бесконечности монотонной последовательности точек t_k, $t_k > 0$, в которых коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ и свободный член $c(t)$ имеют разрывы первого рода. Условимся считать, что вещественнозначные функции $a(t)$,$b(t)$,$c(t)/|G(t)|$ непрерывны по Гёльдеру на каждом интервале (t_k, t_{k+1}), включая концы, причем последовательность констант Гёльдера является ограниченной. В окрестности бесконечно удаленной точки условие Гёльдера понимается в смысле выполнения неравенства вида

$$|a(t'') - a(t')| \le K\,|1/t'' - 1/t'|^{\gamma}, \quad K = \mathrm{const}\,.$$

Считаем также выполненными условия $c(t)/|G(t)| = O(|t|^{-\gamma})$ при $t \to \infty$, $0 < \gamma < 1$ и $|G(t)| \neq 0$.

Решение задачи (1) будем искать в классе аналитических в верхней полуплоскости функций, имеющих интегрируемые особенности в точках t_k и стремящихся к бесконечности порядка меньше единицы при $z \to \infty$, оставаясь внутри угла раствора меньше π с вершиной в начале координат и биссектрисой, совпадающей с мнимой положительной полуосью.

Ветвь $\nu(t) = \arg G(t)$ выберем последовательно на каждом интервале непрерывности коэффициентов так, чтобы скачок δ_k этой функции в точке t_k удовлетворял неравенству $0 \le \delta_k < 2\pi$, краевое условие (1) перепишем в виде

$$\mathrm{Re}[e^{-i\nu(t)}F(t)] = c(t)/|G(t)|. \tag{2}$$

Предположим, что существует конечный предел $\lim\limits_{t\to-\infty}\nu(t)=\nu(-\infty)$. Введем функцию

$$\varphi(t)=\nu(t)-\beta(t)\pi,$$

где $\beta(t)$ — целочисленная функция, принимающая значения β_k в интервалах (t_k,t_{k+1}), $k=\overline{1,\infty}$, $\beta(t)=0$ при $0<t<t_1$ и $\beta(t)=-\kappa$ при $t<0$. Число β_k выберем так, чтобы

$$0\le\varphi(t_k+0)-\varphi(t_k-0)<\pi, \tag{3}$$

для этого достаточно положить $\beta_k=\beta_{k-1}+l_k$, взяв $l_k=0$ при $0\le\delta_k<\pi$, $l_k=1$ при $\pi\le\delta_k<2\pi$; поскольку $\beta_0=0$, имеем $\beta_k=\sum\limits_{j=1}^{k}l_j$, $k=\overline{1,\infty}$. Число κ определим ниже.

Теперь краевое условие (2) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}[e^{-i\varphi(t)}F(t)]=c_1(t),\quad c_1(t)=\frac{c(t)}{\cos(\beta(t)\pi)|G(t)|}. \tag{4}$$

Обозначим

$$\kappa_k=\frac{\varphi(t_k+0)-\varphi(t_k-0)}{\pi},\quad m_k=\frac{\varphi(t_{k+1}-0)-\varphi(t_k+0)}{\pi},\quad k=1,2,\dots,$$

причем в силу (3) имеем $0\le\kappa_k<1$, $k=\overline{1,\infty}$.

С учетом введенных обозначений получим равенство

$$\varphi(t_{k+1}-0)=\varphi(t_1-0)+\pi\sum_{j=1}^{k}[\kappa_j+m_j].$$

Предположим, что существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\varphi(+\infty), \tag{5}$$

тогда

$$\varphi(+\infty)=\lim_{t_{k+1}\to+\infty}\varphi(t_{k+1}-0)=\varphi(t_1-0)+\pi\sum_{j=1}^{\infty}[\kappa_j+m_j].$$

Вначале рассмотрим случай, когда числовые ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j,\quad \sum_{j=1}^{\infty}m_j \tag{6}$$

сходятся, их суммы соответственно обозначим через κ_+, m. Учитывая теперь равенство $\varphi(-\infty)=\nu(-\infty)+\kappa\pi$ и обозначая $\pi\beta_*=\nu(-\infty)-\nu(t_1-0)$, вычислим

$$\kappa_\infty=\frac{\varphi(-\infty)-\varphi(+\infty)}{\pi}=\beta_*+\kappa-\kappa_+-m.$$

Определим постоянную κ так, чтобы скачок функции $\beta(t)$ в точке $t=0$ был целым и выполнялось неравенство $0\le\kappa_\infty<1$. Обозначив символом $E(p)$ целую часть числа p, получим $\kappa=-E(\beta_*-\kappa_+-m)$, если $\beta_*-\kappa_+-m$ — любое положительное или целое отрицательное число, и $\kappa=-E(\beta_*-\kappa_+-m)+1$, если $\beta_*-\kappa_+-m$ — нецелое отрицательное число. Вычислим

$$\frac{\varphi(0-0)-\varphi(0+0)}{\pi}=\kappa.$$

Число κ назовем *индексом* данной задачи в выбранном классе решений.

Примем, что точки разрыва удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \tag{7}$$

гарантирующему сходимость бесконечного произведения

$$P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \tag{8}$$

в котором

$$(1 - z/t_j)^{\kappa_j} = |1 - z/t_j|^{\kappa_j} \exp\{i\kappa_j \arg(1 - z/t_j)\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

причем под $\arg(1 - z/t_j)$ понимаем однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при $z = 0$ и непрерывную в плоскости z, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t = t_j$, $t = +\infty$, т. е.

$$\arg(1 - z/t_k) = -\pi + \arg(z - t_k)$$

при $0 \leq \arg(z - t_k) < 2\pi$, $\arg t_k = 0$, $k = \overline{1, \infty}$. Для любой точки z области D

$$\arg P_+(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k \arg\left(1 - \frac{z}{t_k}\right).$$

Следуя [15, с. 280], покажем, что функция $P_+(z)$ аналитическая в плоскости z, разрезанной по части действительной оси, для которой $t > t_1$, включая точки берегов разреза, кроме точек t_k, $k = \overline{1, \infty}$. Таким образом, для точек верхних берегов разрезов имеем

$$\arg P_+(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ -\pi \sum\limits_{j=1}^{k} \kappa_j, & t \in (t_k, t_{k+1}),\ k = \overline{1, \infty}, \end{cases} \tag{9}$$

поэтому $\arg P_+(t_k + 0) - \arg P_+(t_k - 0) = -\kappa_k \pi,\ k = \overline{1, \infty}$.

Лемма 1. *Если числовой ряд (6) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \kappa_j$ сходится к сумме κ_+, то в окрестности бесконечно удаленной точки справедлива асимптотическая оценка $|P_+(z)| = O(|z|^{\kappa_+})$ и функция $P_+(t)/(t+i)^{\kappa_+}$ удовлетворяет условию Гёльдера на любом конечном интервале вещественной оси.*

Имеем

$$\ln\left|\frac{P_+(z)}{(z+i)^{\kappa_+}}\right| = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \ln\left|\frac{i - iz/t_j}{z+i}\right| = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \ln\left|1 - \frac{z + iz/t_j}{z+i}\right|$$
$$< \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \ln\left(1 + \left|\frac{z + iz/t_j}{z+i}\right|\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \left|\frac{z(1 + i/t_j)}{z+i}\right| = O(1) \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{1}{t_j}.$$

Таким образом, при больших $|z|$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, получим асимптотическую оценку

$$\ln\left|\frac{P_+(z)}{(z+i)^{\kappa_+}}\right| = O(1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa_j}{t_j}.$$

Используя сходимость рядов $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\kappa_j$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}1/t_j$, убеждаемся в справедливости соотношения $|P_+(z)|=O(|z|^{\kappa_+})$.

Наконец, учтем, что $P_+(z)/(z+i)^{\kappa_+}$ является аналитической функцией в комплексной плоскости, разрезанной по части действительной оси, включая точки берегов разреза, кроме точек t_k, $k=\overline{1,\infty}$. В окрестности точки t_k эта функция удовлетворяет условию Гёльдера с показателем κ_k. Отсюда следует гёльдеровость функции $P_+(t)/(t+i)^{\kappa_+}$ на любом конечном интервале вещественной оси.

Далее решение задачи проведем по схеме, примененной в [3; 16, с. 13] для задачи с конечным числом точек разрыва первого рода коэффициентов.

Вначале отыщем частное решение $F_0(z)$ соответствующей (4) однородной задачи

$$\operatorname{Re}[e^{-i\varphi(t)}F(t)]=0 \tag{10}$$

в классе функций, не обращающихся в нуль на вещественной оси, имеющих интегрируемые особенности в точках t_k и стремящихся к бесконечности порядка κ_∞ при $|z|\to\infty$. Считаем, что точка $z=i$ может быть единственным нулем порядка $(\kappa-\kappa_0)/2$ или полюсом порядка $|(\kappa-\kappa_0)/2|$ искомой функции $F_0(z)$. Здесь $\kappa_0=0$, если κ — четное число, и $\kappa_0=-1$, если κ — нечетное число.

Из условия (10) для функции $\varphi_0(t)=\arg F_0(t)$ получаем равенство

$$\varphi_0(t)=\varphi(t)+\pi/2. \tag{11}$$

Теперь для определения в заданном классе функции $F_0(z)$ по известному аргументу ее граничных значений рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{F_0(z)P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty-\kappa_+}}{((z-i)/(z+i))^{(\kappa-\kappa_0)/2}}\left(\frac{z+i}{z}\right)^{\kappa_0}. \tag{12}$$

Здесь под $\arg\{(z-i)/(z+i)\}$ понимаем непрерывную ветвь в области D с разрезом по отрезку $(0,1)$ мнимой оси, стремящуюся к нулю при $z\to\infty$, $\arg\{(z+i)/z\}$ — ветвь, непрерывная в области D и стремящаяся к нулю при $z\to\infty$.

Для граничных значений $\phi(t)=\arg\Phi(t)$ выполняется равенство

$$\phi(t)=\varphi_0(t)+\arg P_+(t)-(\kappa_\infty+\kappa_+)\arg(t+i)+\kappa_0\arg\frac{t+i}{t}-\frac{\kappa-\kappa_0}{2}\arg\frac{t-i}{t+i},$$

из которого следует непрерывность этой функции, причем

$$\phi(+\infty)=\frac{\pi}{2}+\nu(t_1-0)+\pi m,$$

$$\phi(-\infty)=\frac{\pi}{2}+\nu(-\infty)+\kappa\pi-(\kappa_\infty+\kappa_+)\pi,\quad \phi(-\infty)=\phi(\infty).$$

Определим функцию

$$-i\ln\Phi(z)=K(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x)\,dx}{x-z},$$

тогда $\Phi(z)=\exp\{iK(z)\}$. Из формулы (12) найдем частное решение задачи (10):

$$F_0(z)=\frac{e^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty-\kappa_+}}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{(\kappa-\kappa_0)/2}\left(\frac{z}{z+i}\right)^{\kappa_0},$$

которое используем при решении неоднородной задачи.

Из последней формулы, учитывая (11), получим соотношение

$$-ie^{-i\varphi(t)}F_0(t) = \frac{|t+i|^{\kappa_\infty+\kappa_+-\kappa_0}|t|^{\kappa_0}}{|P_+(t)|e^{K_0(t)}},$$

в котором

$$K_0(t) = \operatorname{Im} K(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(t)dx}{x-t}.$$

Краевое условие (4) запишем так:

$$\operatorname{Re}\frac{F(t)}{-iF_0(t)} = c_2(t), \tag{13}$$

где

$$c_2(t) = \frac{c(t)|P_+(t)|e^{K_0(t)}}{|G(t)||t+i|^{\kappa_\infty+\kappa_+-\kappa_0}|t|^{\kappa_0}\cos(\beta(t)\pi)}.$$

Учитывая асимптотическую оценку $|P_+(t)| = O(|t|^{\kappa_+})$ при $|t|\to\infty$, заключаем, что поведение правой части краевого условия (13) на бесконечности будет таким: $c_2(t) = O(|t|^{-\kappa_\infty-\gamma})$.

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ ограничена в интервале $[d,+\infty)$, причем $d>1$, и для любых точек x_1, x_2 этого интервала $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$|f(x_2)-f(x_1)| < K|x_2-x_1|^\alpha,$$

то функция $f_1(x) = (1+x^2)^{-\alpha_1}f(x)$, $\alpha_1\geq\alpha$, будет удовлетворять для больших значений аргумента еще и неравенству

$$|f_1(x_2)-f_1(x_1)| < \widetilde{K}|1/x_2-1/x_1|^\alpha.$$

Доказательство основано на оценке модуля разности $f_1(x_2)-f_1(x_1)$ с использованием легко проверяемого неравенства

$$\frac{1}{\left(1+x_1^2\right)^{\alpha_1}} - \frac{1}{\left(1+x_2^2\right)^{\alpha_1}} < \left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)^{\tilde\alpha}, \quad \tilde\alpha = \begin{cases} 2\alpha_1, & \alpha_1\leq 1/2,\\ 1, & \alpha_1 > 1/2.\end{cases}$$

Поскольку функция $c_2(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на любом конечном интервале вещественной оси, а в бесконечно удаленной точке обращается в нуль, то функция, представленная оператором Шварца для верхней полуплоскости с плотностью $c_2(t)$, будет равномерно сходиться к своему граничному значению в каждой точке этого интервала (исключая точки t_k, для которых $\kappa_k = 0$) и сходиться к граничному значению при $|z|\to\infty$ по некасательному пути из области D [17, с. 110; 2, с. 54, 63–68]. Далее будем различать случаи четного и нечетного индекса.

Пусть κ — четное число, $\kappa_0 = 0$.

Если выполнены неравенства $\kappa > 0$ и (7), то, определяя по краевому условию (13) аналитическую в верхней полуплоскости всюду, кроме полюса порядка $\kappa/2$ в точке $z = i$, функцию, получим общее решение неоднородной задачи Гильберта (2):

$$F(z) = \frac{-ie^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty-\kappa_+}}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa/2}\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c_2(t)dt}{t-z} + Q_{\kappa/2}(z)\right\}, \tag{14}$$

где

$$Q_{\kappa/2}(z) = iB_0 + \sum_{k=1}^{\kappa/2}\left[C_k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^k - \overline{C}_k\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^k\right],$$

$C_k = A_k + iB_k$ — произвольные комплексные постоянные, $A_0 = 0$.

При $\kappa = 0$ единственное решение задачи Гильберта дает функция

$$F(z) = \frac{-ie^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty-\kappa_+}}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} c_2(t)\frac{dt}{t-z} + iB_0\right\}. \tag{15}$$

Если κ — четное отрицательное число, то решение представляется формулой

$$F(z) = \frac{-ie^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty-\kappa_+}}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa/2}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} c_2(t)\frac{dt}{t-z} \tag{16}$$

при выполнении условий разрешимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_2(t)\frac{dt}{(t-i)^k} = 0, \quad k = \overline{0, -\kappa/2-1}. \tag{17}$$

В случае нечетного κ (тогда $\kappa_0 = -1$) при выполнении неравенств $\kappa+1 > 0$, (7), как и выше, получим

$$F(z)=\frac{-ie^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty-\kappa_+}}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{(\kappa+1)/2}\left(\frac{z+i}{z}\right)\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_2(t)dt}{t-z} + Q_{(\kappa+1)/2}(z)\right\}.$$

Здесь выражение в фигурных скобках в начале координат должно (из-за выбранного класса решений) обращаться в нуль, т. е. выполняется равенство

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_2(t)dt}{t} + iB_0 + 2i\sum_{k=1}^{(\kappa+1)/2}(-1)^k B_k = 0. \tag{18}$$

Учитывая последнее, формулу общего решения запишем в виде (ср. [3])

$$F(z) = \frac{-ie^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty-\kappa_+}}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{(\kappa+1)/2}\left(\frac{z+i}{z}\right)$$
$$\times\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_2(t)}{t}\frac{dt}{t-z} + 2\sum_{k=1}^{(\kappa+1)/2}P_{k-1}(z)\left[\frac{C_k}{(z+i)^k} + (-1)^k\frac{\overline{C}_k}{(z-i)^k}\right]\right\}, \tag{19}$$

$$P_{k-1}(z) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j(z+i)^j(z-i)^{k-j-1}.$$

При $\kappa+1 = 0$ единственное решение задачи Гильберта определяет функция

$$F(z) = \frac{-ie^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty-\kappa_+}}\left(\frac{z+i}{z}\right)\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_2(t)}{t}\frac{dt}{t-z} \tag{20}$$

при выполнении условия (18), в котором все $B_k = 0$.

Если κ — нечетное число, удовлетворяющее неравенству $\kappa + 1 < 0$, то решение представляется формулой

$$F(z) = \frac{-ie^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty - \kappa_+}} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{(\kappa+1)/2} \left(\frac{z+i}{z}\right) \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} c_2(t) \frac{dt}{t-z} \qquad (21)$$

при выполнении условий разрешимости

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} c_2(t) \frac{dt}{(t-i)^k} = 0, \quad k = \overline{0, -(\kappa+1)/2 - 1}, \qquad (22)$$

и условия (18), в котором все $B_k = 0$.

Теорема 1. *Пусть ряды* (6) *сходятся, выполнены условия* (5), (7). *Тогда при четном положительном* κ *решение неоднородной задачи в рассматриваемом классе функций определяется формулой* (14), *а при нечетном положительном индексе — формулой* (19) *с дополнительным условием* (18). *При* $\kappa = 0$ *единственное решение определяется по формуле* (16), *а при* $\kappa = -1$ *— формулой* (20) *с условием* (18). *Если* κ *— отрицательное четное либо нечетное число, удовлетворяющее неравенству* $\kappa < -1$, *то решение представляется формулой* (16) *с дополнительными условиями в виде системы* (17) *либо* (21) *с условиями* (18) *и* (22) *соответственно.*

3. Случай бесконечного индекса

Теперь рассмотрим задачу Гильберта с краевым условием

$$\mathrm{Re}[e^{-i\nu(t)} F(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}$$

в случае, когда первый из рядов (6) расходится. Неограниченное вращение вектора $G(t)$ приводит к обращению в бесконечность индекса рассматриваемой задачи.

По-прежнему считаем выполненными условия (7), $c(t)/|G(t)| = O(|t|^{-\gamma})$ и условия гладкости на коэффициенты и свободный член, но на последовательности точек разрывов $\{t_k\}$ и $\{\kappa_k\}$ ниже введем новые ограничения. Для изучения асимптотического поведения функции $P_+(z)$, определенной формулой (8), введем считающую функцию

$$n_+^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < t_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \kappa_j, & t_{k-1} \le x < t_k, \ k = \overline{2, \infty}, \end{cases}$$

удовлетворяющую условию $\lim\limits_{x \to +\infty} n_+^*(x) = +\infty$. В силу условия (7) и неравенства $n_+^*(t_k) < k$ имеем $n_+^*(t_k) = o(t_k)$. Ограничимся рассмотрением случая

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{n_+^*(x)}{x^{\kappa_+}} = \Delta_+, \qquad (23)$$

где κ_+ — положительная постоянная, удовлетворяющая неравенству $\kappa_+ < 1$, $\Delta_+ > 0$.

Учитывая выбор ветвей логарифмов и определение функции $n_+^*(x)$, имеем

$$z\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} n_+^*(x)\frac{dx}{x(x-z)} = \left(\ln\left(1-\frac{z}{t_p}\right) - \ln\left(1-\frac{z}{t_{p-1}}\right)\right)\sum_{j=1}^{p-1}\kappa_j, \quad p=\overline{2,k},$$

следовательно,

$$z\int\limits_{t_1}^{t_k} n_+^*(x)\frac{dx}{x(x-z)} = -\sum_{p=1}^{k-1}\kappa_p\ln\left(1-\frac{z}{t_p}\right) + \ln\left(1-\frac{z}{t_k}\right)\sum_{j=1}^{k-1}\kappa_j.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, $t_k\to+\infty$, получим интегральное представление

$$\ln P_+(z) = -z\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(x)\,dx}{x(x-z)}. \tag{24}$$

Поскольку [6, с. 175]

$$z\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{1-\rho_1}(x-z)} = -\pi\frac{z^{\rho_1}e^{-i\pi\rho_1}}{\sin\pi\rho_1}, \quad 0<\arg z<2\pi, \quad 0<\rho_1<1,$$

формулу (24) перепишем в виде

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+}z^{\kappa_+} + I(z), \tag{25}$$

$$I(z) = -z\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(x)-\Delta_+x^{\kappa_+}}{x(x-z)}dx, \quad 0<\arg z<2\pi.$$

Ясно, что функция $\exp\{I(z)\}$ имеет те же нули, что и $P_+(z)$. По формуле Сохоцкого получим выражение для граничных значений $\ln P_+(z)$:

$$\ln P_+(t) = \frac{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+}t^{\kappa_+} + I(t),$$

$$I(t) = -t\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(x)-\Delta_+x^{\kappa_+}}{x(x-t)}\,dx - \begin{cases} i\pi(n_+^*(t)-\Delta_+t^{\kappa_+}), & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Для установления свойств вещественной части

$$I_+(t) = -t\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(x)-\Delta_+x^{\kappa_+}}{x(x-t)}\,dx, \quad t>0,\ t\ne t_k,\ k=\overline{1,\infty}, \tag{26}$$

этой функции нам придется ввести ограничения на последовательности точек t_k. Следуя [6, с. 127, 128], положим

$$n_+^*(t_k) - \Delta_+(t_k)^{\kappa_+} = p_k, \quad p_k>0, \tag{27}$$

и числа p_k, t_k, $k=1,2,\dots$, будем подбирать так, чтобы выполнялись равенства

$$p_k = -n_+^*(t_k) + \Delta_+(t_{k+1})^{\kappa_+}. \tag{28}$$

В дальнейшем будем считать,что

$$\inf\{\kappa_k\} = \kappa_0^+ > 0, \quad \inf\{p_k\} = p_0^+ > 0, \tag{29}$$

причем в силу (27), (28) получим равенство $p_{k+1} = \kappa_{k+1} - p_k$, из которого выведем $p_0^+ \le 1$. Формулу (27) запишем в виде

$$\Delta_+(t_{k+s})^{\kappa_+} = \sum_{j=1}^{k} \kappa_j + \sum_{j=k+1}^{k+s} \kappa_j - p_{k+s}, \quad s = 1, 2, 3.$$

Обозначив

$$p_{k,s} = \sum_{j=0}^{s-1} p_{k+j},$$

для больших t_k получим

$$\frac{t_{k+s}}{t_k} = 1 + \frac{1}{\kappa_+}\frac{2p_{k,s}}{\Delta_+}t_k^{-\kappa_+} + \frac{\kappa_+^{-1} - 1}{2\kappa_+}\left(\frac{2p_{k,s}}{\Delta_+}t_k^{-\kappa_+}\right)^2 + t_k^{-2\kappa_+}o(1), \quad t_k \to +\infty, \tag{30}$$

$$\frac{t_k^{1-\kappa_+}}{t_{k+s} - t_k} = \frac{\Delta_+\kappa_+}{2p_{k,s}} - \frac{\kappa_+^{-1} - 1}{2\kappa_+}\left(\frac{2p_{k,s}}{\Delta_+}\right)^2 t_k^{-\kappa_+} + t_k^{-\kappa_+}o(1), \tag{31}$$

$$\ln\frac{t_{k+s}}{t_k} = \frac{2p_{k,s}}{\kappa_+\Delta_+}t_k^{-\kappa_+} - \frac{1}{2\kappa_+}\left(\frac{2p_{k,s}}{\Delta_+}\right)^2 t_k^{-2\kappa_+} + t_k^{-2\kappa_+}o(1). \tag{32}$$

Функцию (26) представим так:

$$I_+(t) = -t\int\limits_0^{+\infty} \frac{n_+^*(x) - \Delta_+x^{\kappa_+}}{x(x-t)}dx = -I_{+,1}(t) - I_{+,2}(t) - I_{+,3} - I_{+,4}(t), \tag{33}$$

причем

$$-I_{+,1}(t) = -t\int\limits_0^{t_1} \frac{-\Delta_+x^{\kappa_+}}{x(x-t)}dx = -\frac{\Delta_+t_1^{\kappa_+}}{\kappa_+} + \frac{t_1^{\kappa_+ + 1}}{(\kappa_+ + 1)t}. \tag{34}$$

При $t_k \le t \le t_{k+1}$ рассмотрим интеграл

$$-I_{+,2}(t) = t\int\limits_{t_1}^{t_{k-1}} \frac{(n_+^*(x) - \Delta_+x^{\kappa_+})x^{\kappa_+ - 1}}{-x^{\kappa_+}(x-t)}dx,$$

который по теореме о среднем (см. [18, с. 136–138]) запишем в виде

$$-I_{+,2}(t) = \frac{t}{-t_1^{\kappa_+}(t_1 - t)}\int\limits_{t_1}^{\xi}(n_+^*(x) - \Delta_+x^{\kappa_+})x^{\kappa_+ - 1}\,dx$$

$$+ \frac{t}{-t_{k-1}^{\kappa_+}(t_{k-1} - t)}\int\limits_{\bar\xi}^{t_{k-1}}(n_+^*(x) - \Delta_+x^{\kappa_+})x^{\kappa_+ - 1}\,dx,$$

$t_1 \le \xi \le \kappa_+t/(1+\kappa_+)$, $\kappa_+t/(1+\kappa_+) \le \bar\xi \le t_{k-1}$. В этой формуле при $\kappa_+t/(1 + \kappa_+) \ge t_{k-1}$ второе слагаемое правой части отсутствует. Учитывая неравенство

$$0 \le \int\limits_{t_k}^{\xi}(n_+^*(x) - \Delta_+x^{\kappa_+})x^{\kappa_+ - 1}dx \le \frac{p_k^2}{2\Delta_+\kappa_+}, \tag{35}$$

в котором нижняя оценка достигается в точке $\xi = t_{k+1}$ для любого $k = 1, 2, \ldots$, для $t_k \le t \le t_{k+1}$ будем иметь

$$|I_{+,2}(t)| \le \left[\frac{t_{k+1}/t_k}{t_1^{\kappa_+}(1 - t_1/t_k)} + \frac{t_{k+1}t_{k-1}^{1-\kappa_+}}{t_{k-1}(t_k - t_{k-1})}\right]\frac{1}{2\Delta_+\kappa_+}.$$

Замечая, что $p_k = p_0^+ + o(1)$, и учитывая равенства (30) и (31), убеждаемся в справедливости оценки

$$|I_{+,2}(t)| \le \left[\frac{1}{t_1^{\kappa_+}} + \frac{\Delta_+\kappa_+}{2p_0^+} + o(1)\right]\frac{1}{2\Delta_+\kappa_+}, \quad t_k \le t \le t_{k+1}. \tag{36}$$

Интеграл

$$I_{+,3}(t) = t\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa_+}}{x(x-t)}\,dx$$

перепишем в виде

$$-I_{+,3}(t) = t\Delta_+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{x^{\kappa_+} - t^{\kappa_+}}{x(x-t)}dx - (n_+^*(t_k) - \Delta_+ t^{\kappa_+})\left[\ln\frac{t_{k+2} - t}{t - t_{k-1}} - \ln\frac{t_{k+2}}{t_{k-1}}\right]$$
$$+ \kappa_k\left[\ln\frac{t - t_k}{t - t_{k-1}} - \ln\frac{t_k}{t_{k-1}}\right] - \kappa_{k+1}\left[\ln\frac{t - t_{k+2}}{t - t_{k+1}} - \ln\frac{t_{k+2}}{t_{k+1}}\right]. \tag{37}$$

Используя формулу Лагранжа для числителя подынтегральной функции и соотношения (30), (32), получим оценку

$$0 < t\Delta_+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{x^{\kappa_+} - t^{\kappa_+}}{x(x-t)}dx < \kappa_+\Delta_+\frac{t_{k+2}}{t_{k-1}^{1-\kappa_+}}\ln\frac{t_{k+2}}{t_{k-1}} < 6 + o(1).$$

Применяя ее к (37) и привлекая (28), (29), (30), для достаточно больших t_k докажем неравенство

$$\left|-I_{+,3}(t) - \kappa_k\ln\frac{t - t_k}{t - t_{k-1}} - \kappa_{k+1}\ln\frac{t_{k+1} - t}{t_{k+2} - t}\right| < 6 + p_k\ln\frac{2}{p_0^+} + o(1), \ t_k \le t \le t_{k+1}. \tag{38}$$

Здесь под значениями левой части в точках t_k, t_{k+1} понимаются ее предельные значения, получаемые на основании (37) при $t \to t_k$, $t \to t_{k+1}$ соответственно.

Для оценки интеграла

$$I_{+,4}(t) = t\int\limits_{t_{k+2}}^{+\infty} \frac{(n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa_+})x^{\kappa_+ - 1}}{x^{\kappa_+}(x-t)}dx, \quad t_k \le t \le t_{k+1},$$

отметим, что при фиксированном t и $x \in [t_{k+2}, +\infty)$ функция $x^{-\kappa_+}(x-t)^{-1}$ убывает и стремится к нулю при $x \to +\infty$, поэтому по теореме о среднем (см. [18, с. 600])

$$I_{+,4}(t) = \frac{t}{t_{k+2}^{\kappa_+}(t_{k+2} - t)}\int\limits_{t_{k+2}}^{\xi} (n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa_+})x^{\kappa_+ - 1}dx, \quad \xi \ge t_{k+2}.$$

Учитывая (35), (31), для всех достаточно больших t_k получим

$$|I_{+,4}(t)| < \frac{t_{k+1}^{\kappa_+} t_{k+1}^{1-\kappa_+}}{t_{k+2}^{\kappa_+}(t_{k+2}-t_{k+1})2\Delta_+\kappa_+} < \frac{1}{2} + o(1),$$

а в силу (33), (34), (36), (38) для

$$I_k(t) = I_+(t) - \kappa_k \ln\frac{t-t_k}{t-t_{k-1}} - \kappa_{k+1}\ln\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t}, \quad t_k < t < t_{k+1},$$

будем иметь

$$|I_k(t)| < B + o(1), \quad t_k \le t \le t_{k+1}, \tag{39}$$

с постоянной

$$B = 6 + \frac{\Delta_+ t_1^{\kappa_+}}{\kappa_+} + \frac{1}{2t_1^{\kappa_+}\Delta_+\kappa_+} + p_k \ln\frac{2}{p_0^+} + \frac{1}{2}.$$

Для каждого интервала $t_k \le t < t_{k+1}$, $k = \overline{N,+\infty}$, получим представление для

$$I_+(t) = I_k(t) + \kappa_k \ln\frac{t-t_k}{t-t_{k-1}} + \kappa_{k+1}\ln\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t},$$

в совокупности они дают представление для $I_+(t)$ в интервале $(t_N,+\infty)$.

Для достаточно больших t_k и $t_k \le t \le t_{k+1}$ в силу (30) имеем

$$0 \le \frac{t-t_k}{t-t_{k-1}} \le \frac{1}{2p_0^+} + o(1), \quad 0 \le \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t} \le \frac{1}{2p_0^+} + o(1),$$

следовательно,

$$\left(\frac{t-t_k}{t-t_{k-1}}\right)^{\kappa_k} \le M + o(1), \quad \left(\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t}\right)^{\kappa_{k+1}} \le M + o(1), \quad M = \min\{1, 1/2p_0^+\}.$$

Теперь, учитывая (39), для всех достаточно больших t_k и $t_k \le t \le t_{k+1}$ получим неравенство

$$e^{I_+(t)} = \left(\frac{t-t_k}{t-t_{k-1}}\right)^{\kappa_k}\left(\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t}\right)^{\kappa_{k+1}} e^{I_k(t)} < B_1,$$

где B_1 — общая постоянная для всех вышеуказанных интервалов. Поэтому существует такое число t_N, что для всех $t > t_N$ будет выполняться неравенство

$$e^{I_+(t)} < B_1.$$

Таким образом, $e^{I_+(z)}$ — ограниченная в верхней полуплоскости функция, обращающаяся в точках t_k в нуль порядка κ_k, $k = \overline{1,\infty}$.

Для изучения гладкости функции $I_+(t)$ при $t \to \infty$ рассмотрим $I'_+(t)$. По правилу дифференцирования сингулярного интеграла по параметру (см. [19]) имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{x^{\kappa_+-1}}{x-t}dx = \frac{t_{k-1}^{\kappa_+-1}}{t_{k-1}-t} - \frac{t_{k+2}^{\kappa_+-1}}{t_{k+2}-t} + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{(\kappa_+-1)x^{\kappa_+-2}}{x-t}dx, \quad t \in (t_{k-1}, t_{k+2}),$$

поэтому, учитывая (27), из соотношения (37) для $t \in (t_k, t_{k+1})$ получим

$$\left(-I_{+,3}(t) - \kappa_k \ln\frac{t-t_k}{t-t_{k-1}} - \kappa_{k+1}\ln\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t}\right)' = \Delta_+ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{x^{\kappa_+-1} - t^{\kappa_+-1}}{x-t}\,dx$$

$$+\Delta_+ t \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{(\kappa_+ - 1)(x^{\kappa_+ - 2} - t^{\kappa_+ - 2})}{x - t} dx + \frac{\Delta_+}{t_{k+2} - t} \big(t_k^{\kappa_+} - t t_{k+2}^{\kappa_+ - 1}\big)$$

$$+ \frac{\Delta_+}{t - t_{k-1}} \big(t_k^{\kappa_+} - t t_{k-1}^{\kappa_+ - 1}\big) + \Delta_+ \kappa_+ t^{\kappa_+ - 1} \ln \frac{t_{k+2} - t}{t - t_{k-1}} + p_k \frac{t_{k+2} - t_{k-1}}{(t_{k+2} - t)(t - t_{k-1})}.$$

Используя формулы (27), (28), а при оценке интегралов еще и формулу Лагранжа, докажем неравенство

$$\left|\left(-I_{+,3}(t) - \kappa_k \ln \frac{t - t_k}{t - t_{k-1}} - \kappa_{k+1} \ln \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+2} - t}\right)'\right| < \frac{B' + o(1)}{t_{k+1}^{1-\kappa_+}}, \quad t_k < t < t_{k+1},$$

где

$$B' = \frac{6}{\Delta_+^{\kappa_+} \kappa_+} + \Delta_+^{(1 - 3\kappa_+ + \kappa_+^2)} \frac{6}{\kappa_+} + \frac{\Delta_+(4 + 3\kappa_+)}{p_0^+} + \Delta_+ \kappa_+ \ln \frac{2}{p_0^+}.$$

Применяя теорему о среднем к интегралу

$$I'_{+,4}(t) = \int\limits_{t_{k+2}}^{+\infty} (n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa_+}) x^{\kappa_+ - 1} \frac{dx}{x^{\kappa_+ - 1}(x - t)^2}, \quad t_k \le t \le t_{k+1},$$

запишем

$$I'_{+,4}(t) = \frac{t_{k+2}^{1-\kappa_+}}{(t_{k+2} - t)^2} \int\limits_{t_{k+2}}^{\xi} (n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa_+}) x^{\kappa_+ - 1}\, dx, \quad \xi \ge t_{k+2}, \quad t_k \le t \le t_{k+1}.$$

Учитывая здесь соотношение (35), получим оценку

$$|I'_{+,4}(t)| < \frac{1}{t_{k+1}^{1-\kappa_+}} \left[\frac{\kappa_+ \Delta_+}{8(p_0^+)^2} + o(1)\right], \quad t_k \le t \le t_{k+1}.$$

Аналогично для $t \in (t_k, t_{k+1})$ имеем

$$I'_{+,2}(t) = \int\limits_{t_1}^{t_{k-1}} (n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa_+}) x^{\kappa_+ - 1} \frac{dx}{x^{\kappa_+ - 1}(x - t)^2}$$

$$= \frac{t_{k-1}^{1-\kappa_+}}{(t_{k-1} - t)^2} \int\limits_{t_1}^{\xi} (n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa_+}) x^{\kappa_+ - 1}\, dx,$$

$t_1 \le \xi \le t_{k-1}$, поэтому, используя еще оценку (35) и равенства (30), (31), докажем неравенство

$$|I'_{+,2}(t)| < \frac{1}{t_{k+1}^{1-\kappa_+}} \left[\frac{\Delta_+ \kappa_+}{8(p_0^+)^2} + o(1)\right], \quad t_k \le t \le t_{k+1},$$

а значит, $|I'_k(t)| < B_2/t^{1-\kappa_+},\ t \in (t_k, t_{k+1})$. Теперь можно показать, что $|e^{I_k(t'')} - e^{I_k(t')}| < \widetilde{A}(t'' - t')^{\kappa_+}$, а также $|e^{I_+(t'')} - e^{I_+(t')}| < A_*(t'' - t')^{\kappa_+},\ t', t'' \in [t_k, t_{k+1}]$. Учтя обращение в нуль функции $e^{I_+(t)}$ в точках t_k, $k = \overline{1, \infty}$, убедимся в справедливости последнего неравенства для любых точек t', t'', $t' < t''$. Итак, доказана

Лемма 3. *При выполнении условий* (23), (27)–(29) *справедливо представление* $P_+(z) = \exp\{\pi\Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi} z^{\kappa_+}/\sin\pi\kappa_+\}\exp\{I(z)\}$, *в котором функция* $|\exp\{I(z)\}|$ *является ограниченной в* D *и ее краевые значения удовлетворяют условию Гёльдера на любом конечном промежутке вещественной оси.*

Краевое условие для искомой функции $F(z)$ запишем так:

$$\operatorname{Re}[e^{-i\varphi_1(t)}F(t)P_+(t)] = \tilde{c}_1(t), \tag{40}$$

где

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) + \arg P_+(t), \quad \tilde{c}_1(t) = \frac{c(t)|P_+(t)|}{|G(t)\cos(\beta(t)\pi)|}.$$

3.1. Картина разрешимости однородной задачи. Рассмотрим однородную краевую задачу, в краевом условии (40) которой $\tilde{c}_1(t) \equiv 0$. Определим аналитическую ограниченную в области D функцию, граничные значения мнимой части которой равны $\varphi_1(t)$, по формуле

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(t)\frac{dt}{t-z}.$$

На контуре L эта функция принимает значения $\Gamma^+(t) = \Gamma(t) + i\varphi_1(t)$, где

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(t_1)\frac{dt_1}{t_1-t}.$$

Краевое условие (40) при $\tilde{c}_1(t) \equiv 0$ запишем в виде

$$\operatorname{Im}\{ie^{-\Gamma^+(t)}F(t)P_+(t)\} = 0. \tag{41}$$

Здесь в фигурных скобках стоит граничное значение аналитической в области D функции

$$ie^{-\Gamma^+(z)}F(z)P_+(z) = \Phi(z), \tag{42}$$

которую, учитывая формулу (25), целесообразно переписать в виде

$$\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)}F(z)e^{I(z)}\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+e^{-i\pi\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}z^{\kappa_+}\right\}. \tag{43}$$

Согласно (41) для граничного значения функции $\Phi(z)$ имеем

$$\operatorname{Im}\Phi(t) = 0, \quad t \in L, \tag{44}$$

что означает возможность аналитического продолжения $\Phi(z)$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ по правилу

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Пусть $\widetilde{B}$ — класс решений $F(z)$ задачи (41), для которых произведение $|F(z)||z-t_j|^{\kappa_j}$ ограничено вблизи точки t_j для всех $j = 1, 2, \ldots$. Для таких решений условие (44) мы должны считать выполненным и в точках t_k, $k = \overline{1, +\infty}$. В самом деле, продолжая функцию на полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ через участки (t_{k-1}, t_k), (t_k, t_{k+1}), получаем одну и ту же функцию. Для класса $\widetilde{B}$ решений $F(z)$ задачи (41) величина $|\Phi(z)|$ ограниченна вблизи t_k, поэтому в точке t_k должна быть устранимая особенность аналитической в окрестности этой точки функции $\Phi(z)$, полученной при аналитическом продолжении, следовательно, $\operatorname{Im}\Phi(t_k) = 0$. Таким образом, получаем целую функцию $\Phi(z)$.

Теорема 2. *Для того чтобы однородная краевая задача* (41) *в классе* $\widetilde{B}$ *имела решение* $F(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы произведение* (42) *было сужением на верхнюю полуплоскость некоторой целой функции, удовлетворяющей условию* (44).

Более полную картину разрешимости однородной задачи (41) удается получить в классе B_* функций $F(z)$ с ограниченным в области D произведением $|F(z)|e^{\operatorname{Re} I(z)}$. Ясно, что $B_* \subset \widetilde{B}$.

С учетом ограниченности при $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, $0 < r < \infty$, функции $e^{\operatorname{Re} I(z)}$ заключаем, что для $F(z) \in B_*$ функция $|F(z)|$ ограниченная при $r \to \infty$.

Для функции $M(r) = \max\limits_{0 \le \theta \le \pi} |\Phi(re^{i\theta})|$ согласно (43) имеем

$$\ln\ln M(r) \le \kappa_+ \ln r + \ln\left[\frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\ln C}{r^{\kappa_+}}\right],$$

поэтому

$$\rho_F = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \le \kappa_+.$$

Итак, порядок целой функции $\Phi(z)$, определяемой формулами (43), (44), не превышает κ_+.

Теорема 3. *Однородная краевая задача* (41) *имеет решение* $F(z)$ *класса* B_* *тогда и только тогда, когда справедлива формула* (42), *в которой* $\Phi(z)$ *является целой функцией порядка* $\rho_\Phi \le \kappa_+$, *удовлетворяющей условию* (44) *и при больших* $|t|$ — *неравенствам*

$$|\Phi(t)| \le C\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)} t^{\kappa_+}\right\}, \quad t > 0, \tag{45}$$

$$|\Phi(t)| \le C\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} |t|^{\kappa_+}\right\}, \quad t < 0. \tag{46}$$

Теорема 4. *Общее решение однородной краевой задачи* (41) *в классе функций* B_* *определяется формулой*

$$F(z) = \frac{-ie^{\Gamma(z)}\Phi(z)}{P_+(z)}, \tag{47}$$

в которой $\Phi(z)$ — *произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi \le \kappa_+$, *принимающая на* L *действительные значения и при* $\rho_\Phi = \kappa_+$ *удовлетворяющая неравенствам* (45), (46) *для достаточно больших* $|t|$.

Условие ограниченности произведения $|F(z)|e^{\operatorname{Re} I(z)}$ для решения (47) примет вид

$$\left| e^{\Gamma(z)}\Phi(z)\exp\left\{-\frac{\pi\Delta_+ e^{-i\pi\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} z^{\kappa_+}\right\}\right| < C,$$

которому удовлетворяют все целые функции порядка $\rho_\Phi < \kappa_+$, поэтому общее решение однородной задачи содержит бесконечно много линейно независимых решений.

Если выполнено условие

$$\kappa_+ > 1/2, \tag{48}$$

то при $\rho_\Phi < \kappa_+$ получается соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln|\Phi(t)|/t^{\rho_\Phi} = -\infty$, невозможное (см., например, [20, с. 74; 15, с. 254]) для $F(z) \not\equiv 0$. Поэтому мы должны считать, что $\rho_\Phi = \kappa_+$.

Итак, справедлива

Теорема 5. *Общее решение однородной краевой задачи* (41) *в классе функций* B_* *при выполнении условия* (48) *определяется формулой* (47), *в которой* $\Phi(z)$ *есть произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi = \kappa_+$, *принимающая на* L *действительные значения и удовлетворяющая неравенствам* (45), (46) *для достаточно больших* $|t|$.

3.2. Решение неоднородной задачи. Краевое условие (40) запишем так:

$$\mathrm{Re}\{e^{-\Gamma^+(t)}F(t)P_+(t)\} = \frac{c(t)|P_+(t)|\cos(\beta(t)\pi)}{|G(t)|e^{\Gamma(t)}}. \tag{49}$$

Будем считать выполненными условия леммы 3. Решение неоднородной задачи (49) будем искать в классе B_*, дополнительно предполагая, что

$$c(t) = \frac{\tilde{c}(t)}{1+t^2},$$

где $\tilde{c}(t)$ — функция, ограниченная и удовлетворяющая условию Гёльдера на интервалах (t_k, t_{k+1}), $k = \overline{1,\infty}$.

Для нахождения частного решения возьмем целую функцию порядка κ_+:

$$\Phi_1(z) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_1}}\right)\left(1 - \frac{z}{r_k e^{-i\theta_1}}\right), \quad r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta_1}\right)^{1/\kappa_+}.$$

В работе [12] (см. также [16, с. 98]) доказана справедливость формул

$$\ln\Phi_1(t) = 2I_1(t,\theta_1) + \begin{cases} \frac{\Delta_1\pi 2\cos((\theta_1-\pi)\kappa_+)}{\sin(\pi\kappa_+)}t^{\kappa_+}, & t>0, \\ \frac{\Delta_1\pi 2\cos(\theta_1\kappa_+)}{\sin(\pi\kappa_+)}|t|^{\kappa_+}, & t<0, \end{cases}$$

где

$$I_1(t,\theta_1) = \int\limits_0^\infty (n(x) - x^{\kappa_+}\Delta_1)\frac{t^2 - tx\cos(\theta_1)}{x(t^2 - 2tx\cos(\theta_1) + x^2)}dx,$$

$$n(x) = \begin{cases} k, & r_k \le x < r_{(k+1)}, \\ 0, & 0 \le x < r_1, \end{cases}$$

числа $\Delta_1 > 0$, $\theta_1 \in (0,\pi)$ выбраны так, чтобы выполнялись равенства

$$\Delta_1 2\cos\Big((\theta_1 - \pi)\kappa_+\Big) = \Delta_+\cos(\pi\kappa_+), \quad \Delta_1 2\cos(\theta_1\kappa_+) = \Delta_+.$$

Отметим, что выполнение условия Гёльдера для функций $I_1(t,\theta_1)$, $t>0$, устанавливается проще, чем для сингулярного интеграла $I_+(t)$, $t>0$.

Перепишем теперь краевое условие (49) в виде

$$\mathrm{Re}\left\{e^{-\Gamma^+(t)}F(t)\frac{P_+(t)}{\Phi_1(t)}\right\} = \tilde{c}_2(t), \tag{50}$$

где функция

$$\tilde{c}_2(t) = \frac{\tilde{c}(t)}{|G(t)|}\frac{|P_+(t)|}{\Phi_1(t)}\frac{\cos(\beta(t)\pi)}{e^{\Gamma(t)}(1+t^2)}$$

согласно леммам 2, 3 удовлетворяет условию Гёльдера на вещественной оси.

Будем искать частное решение $F_1(z)$ неоднородной задачи (50) класса B_*, при котором выражение, стоящее в фигурных скобках левой части (50), представляет собой граничное значение функции, аналитической и ограниченной в области D. Эта функция определяется формулой Шварца для полуплоскости [2, с. 155], поэтому

$$F_1(z) = e^{\Gamma(z)} \frac{\Phi_1(z)}{P_+(z)} \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\tilde{c}_2(t)}{t-z}\, dt. \tag{51}$$

Нетрудно убедиться в том, что это решение принадлежит классу B_*. В самом деле, так как

$$\left| e^{\Gamma(z)} \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\tilde{c}_2(t)}{t-z} dt \right| < C, \quad z \in D, \tag{52}$$

на основании формулы (51) имеем

$$|F_1(z) e^{\operatorname{Re} I(z)}| < \frac{C|\Phi_1(z)|}{\exp\{\pi[\Delta_+ \operatorname{Re}(e^{-i\kappa_+\pi} z^{\kappa_+})]/\sin(\pi\kappa_+)\}}. \tag{53}$$

Учитывая, что $\Phi_1(z)$ — целая функция порядка κ_+, заключаем, что порядок функции, стоящей в левой части последней формулы, внутри угла $0 \le \theta \le \pi$ меньше единицы.

Поскольку

$$\frac{|\Phi_1(t)|}{\Delta_+ \operatorname{Re}(e^{-i\kappa_+\pi} t^{\kappa_+})/\sin(\pi\kappa_+)} = \frac{\Phi_1(t) e^{I_+(t)}}{|P_+(t)|} < C_2,$$

переходя в соотношениях (53), (52) к пределу при $z \to t$, получим $|F_1(t)e^{I_+(t)}| \le \widetilde{C}$. Отсюда согласно принципу Фрагмена — Линделёфа следует неравенство $|\Phi(z)e^{\operatorname{Re} I(z)}| \le \widetilde{C}$, $z \in D$, т. е. принадлежность найденного решения (51) классу B_*.

Итак, справедлива

Теорема 6. *Общее решение неоднородной краевой задачи* (49) *в классе* B_* *представляется как сумма частного решения* (51) *этой задачи и общего решения соответствующей однородной задачи* (47).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. *Салимов Р. Б., Селезнев В. В.* К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1979. Вып. 16. С. 149–162.
4. *Алекна П. Ю.* Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости // Литовск. мат. сб. 1977. № 1. С. 5–12.
5. *Сандрыгайло И. Е.* О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 6. С. 16–23.
6. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука, 1986.
7. *Толочко М. Э.* О разрешимости краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 3. С. 32–38.
8. *Толочко М. Э.* Об однородной задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1972. № 5. С. 34–41.
9. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* О корректных постановках краевых задач сопряжения с бесконечным индексом для квазианалитических функций // Некорректные задачи математической физики и анализа: ВЦ Сиб. отд-ния АН СССР. Новосибирск: Наука, 1984. С. 91–102.
10. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. М.: Физматлит, 2003.

11. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Метод регуляризирующего множителя для решения однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 76–79.

12. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 724–734.

13. *Журавлева М. И.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством разрывов ее коэффициента // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Гр.ССР. 1973. Т. 43. С. 53–71.

14. *Журавлева М. И.* Неоднородная краевая задача с бесконечным индексом и со счетным множеством нулей и полюсов коэффициентов // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, № 4. С. 755–757.

15. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. Т. 2.

16. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005.

17. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

18. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 2.

19. *Крикунов Ю. М.* Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций // Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. С. 17–24.

20. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

Статья поступила 23 января 2007 г.

Салимов Расих Бахтигареевич, Шабалин Павел Леонидович
Казанский архитектурно-строительный университет, кафедра высшей математики,
ул. Зеленая, 1, Казань 420043
Pavel.Shabalin@mail.ru