Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.98

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ МАКСИМАЛЬНОЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ АЛГЕБРЫ ДИРИХЛЕ

Е. И. Яшагин

Аннотация: Строится пример максимальной унимодулярной алгебры Дирихле, у которой одноточечные доли Глисона плотны в пространстве максимальных идеалов. Основные утверждения были анонсированы в [1], здесь приводятся их полные доказательства.

Ключевые слова: равномерная алгебра, доля Глисона, алгебра Бляшке.

Пусть $A(X)$ — *равномерная* алгебра на компакте X, т. е. замкнутая в sup-норме подалгебра алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на X, содержащая константы и разделяющая точки множества X. Об алгебре $A(X)$ говорят, что она *максимальная* алгебра, если не существует равномерной алгебры, заключенной строго между $A(X)$ и $C(X)$. Если $A(X)$ — алгебра, для которой пространство $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f : f \in A\}$ плотно в пространстве $C_R(X)$ всех вещественнозначных функций на X, то $A(X)$ называют *алгеброй Дирихле*. Алгебра $A(X)$ *унимодулярна*, если линейные комбинации унимодулярных функций из $A(X)$ плотны в $A(X)$.

На множестве всех линейных мультипликативных функционалов алгебры $A(X)$ определим метрику $d(m_1, m_2) = \|m_1 - m_2\|$, индуцированную нормой пространства A^*, сопряженного к $A(X)$. Если $m_1, m_2 \in M$ удовлетворяют условию $d(m_1, m_2) < 2$, то говорят, что они *принадлежат одной и той же доле Глисона*. Точка $x \in X$ называется *точкой пика*, если существует такая функция $f \in A$, что $f(x) = 1$ и $|f(y)| < 1$ для всех $y \in X$, не совпадающих с x. Известная теорема Вермера (см. [2, 3]) о долях Глисона гласит, что каждая доля Глисона алгебры Дирихле либо аналитический диск, либо состоит из единственной точки. Известны построения [4, 5], дающие примеры равномерной алгебры, не имеющей неодноточечных долей Глисона. Тогда все точки пространства максимальных идеалов суть точки пика. Эти примеры не являлись примерами алгебры Дирихле. Вопрос о существовании алгебры Дирихле, имеющей только одноточечные доли Глисона, остается открытым до сих пор. В данной работе строится пример максимальной унимодулярной алгебры Дирихле, одноточечные доли Глисона которой плотны в множестве всех линейных мультипликативных функционалов в $*$-слабой топологии.

1. Предварительные определения. Пусть $S = \{z \in C : |z| = 1\}$ — единичная окружность, $D = \{z \in C : |z| \leq 1\}$ — единичный диск в $\mathbb{C}$. Рассмотрим бесконечное семейство $\{b_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ конечных произведений Бляшке

$$b_k(z) = e^{i\theta_k} \prod_{j=1}^{n_k} \left(\frac{z - z_{j,k}}{1 - \bar{z}_{j,k} \cdot z} \right), \quad 0 \leq |z_{j,k}| < 1, \quad 0 \leq \theta_k < 2\pi. \tag{1.1}$$

Оно порождает проективный предел

$$D_1 \xleftarrow{b_1} D_2 \xleftarrow{b_2} D_3 \xleftarrow{b_3} \dots \tag{1.2}$$

единичных дисков $D_k = D : z \to b_k(z)$. Сужение этой последовательности на единичные окружности $S_k = S$ дает проективный предел

$$S_1 \xleftarrow{b_1} S_2 \xleftarrow{b_2} S_3 \xleftarrow{b_3} \dots$$

единичных окружностей. Введем обозначения

$$D_\infty = \varprojlim_k D_k, \quad S_\infty = \varprojlim_k S_k.$$

Множество D_∞ состоит из семейства всех таких бесконечных векторов $s = (z_1, z_2, z_3, \dots)$, для которых z_k и z_{k+1} связаны соотношением $b_k(z_{k+1}) = z_k$, причем суперпозиция $b_k^\infty = b_k \circ b_{k+1} \circ b_{k+2} \circ \dots$ порождает проекцию $b_k^\infty : D_k^\infty \to D_k$. Заметим, что b_k^∞ — функция на D_∞ со значениями в единичном диске D и $b_k^\infty = b_k \circ b_{k+1}^\infty$.

Рассмотрим замкнутую в sup-норме подалгебру A_k алгебры $C(D_\infty)$, порожденную единичным элементом алгебры $C(D_\infty)$ и функциями b_k^∞, $k = 1, 2, 3, \dots$. Из (1.1) следует, что

$$b_k^\infty = b_k(b_{k+1}^\infty) = e^{i\theta_k} \prod_{j=1}^{n_k} \left(\frac{b_{k+1}^\infty - z_{j,k}}{1 - \bar{z}_{j,k} \cdot b_{k+1}^\infty} \right). \tag{1.3}$$

Поскольку каждый сомножитель в приведенном произведении принадлежит алгебре A_{k+1}, то $b_k^\infty \in A_{k+1}$. Отсюда A_k — подалгебра алгебры A_{k+1}. Определим

$$A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k.$$

Определение 1.1. *Алгеброй Бляшке*, образованной произведениями Бляшке $\{b_k(z)\}_{k=1}^\infty$, называется равномерная алгебра B на D_∞, порожденная функциями $\{b_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, т. е. $B = \overline{A}$.

Приведем следующий известный результат [6].

Теорема 1.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *пространство линейных мультипликативных функционалов алгебры B совпадает с D_∞;*

(ii) *границей Шилова этой алгебры служит S_∞;*

(iii) *сужение B на S_∞ является унимодулярной максимальной алгеброй Дирихле.*

2. О долях Глисона алгебры Бляшке. Каждое произведение Бляшке $b(z)$ порождает накрытие $b : D \to D$, $z \to b(z)$. *Точкой разветвления* $z_0 \in D^0 = \{|z| < 1\}$ для накрытия $b : D \to D$ называется точка, у которой нет окрестности U такой, что сужение b на U инъективно; $b : D \to D$ — голоморфное накрытие, поэтому множество точек разветвления образует нигде не плотное множество в D. Можно подобрать окрестность U так, чтобы сужение b на U было биголоморфно отображению $z^k : D \to D$, $z \to z^k$ с $k > 1$ (см. [7, с. 43, 44]). При этом число k называется *степенью разветвления* точки z_0 и обозначается через $k = \deg_b(z_0)$. Для простейшего примера функции Бляшке $b(z) = z^k$ накрытие $z \to b(z)$ имеет единственную точку разветвления $z = 0$ и

$\deg_b(0) = k$. Любая аналитическая функция $f(z)$ на D^0 в некоторой окрестности каждой точки $z_0 \in D^0$ биголоморфно эквивалентна некоторой функции вида z^k. Число $\deg_f(z_0) = k < \infty$ есть порядок локального разветвления точки z_0 при отображении $z \to f(z)$ (см. [7, предложение 2.1]). Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — две аналитические функции на D^0, причем $z_1 = f_2(z_0) \in D^0$, то

$$\deg_{f_1 \circ f_2}(z_0) = \deg_{f_1}(z_1) \cdot \deg_{f_2}(z_0). \tag{2.1}$$

Функция f однозначная, если $\deg_f(z_0) = 1$ в некоторой окрестности z_0. Для формулирования утверждения об одноточечности долей Глисона введем понятие особой точки для определенного выше множества D_∞.

Определение 2.2. Точку $s \in D_\infty$, $s = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$, $b_k(z_{k+1}) = z_k$, назовем *особой точкой* в D_∞, если для любого натурального n существует целое $k > n$ такое, что точка z_{k+1} является точкой разветвления для накрытия $b_k : D_{k+1} \to D_k$, т. е. $\deg_{b_k}(z_{k+1}) \geq 2$.

Теорема 2.2. *Каждая доля Глисона, содержащая особую точку, есть одноточечное множество.*

Доказательство. Допустим, что существует неодноточечная доля Глисона $G \in D_\infty$, содержащая особую точку $s = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$. По известной теореме Вермера (см. [2]) найдется такое взаимно однозначное отображение $\varphi : D^0 \longrightarrow G$ аналитического диска D^0 на G, что суперпозиция $f_k(z) = b_k^\infty(\varphi(z))$, $k = 1, 2, \dots$, является аналитической на D^0 функцией. Пусть $s = \varphi(z_0)$. Тогда (см. (1.3))

$$f_k(z_0) = b_k^\infty(\varphi(z_0)) = b_k^\infty(s) = z_k, \quad f_k(z) = b_k(f_{k+1}(z)).$$

Согласно (2.1)

$$\deg_{f_k}(z_0) = \deg_{b_k}(z_{k+1}) \cdot \deg_{f_{k+1}}(z_0).$$

Отсюда для любого натурального числа m справедливо равенство

$$\deg_{f_1}(z_0) = \deg_{f_{m+1}}(z_0) \cdot \prod_{k=1}^{m} \deg_{b_k}(z_{k+1}).$$

Поскольку $s = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$ — особая точка в D_∞, в множестве чисел $\deg_{b_k}(z_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$, есть бесконечное подмножество чисел, больших 2. Поэтому $\deg_{f_1}(z_0) = \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

3. Построение примера. Рассмотрим некоторую точку разветвления $z_1 \in D^0$ для накрытия $b_1 : D \to D$, образованного произведением Бляшке $b_1(z)$. Возьмем $z_0 \in b_2^{-1}(z_1)$, где $b_2(z)$ — произведение Бляшке, тогда z_0 — точка разветвления для накрытия $b_1 \circ b_2 : D \to D$. Действительно,

$$\deg_{b_1 \circ b_2}(z_0) = \deg_{b_1}(z_1) \cdot \deg_{b_2}(z_0) \geq 2, \quad \text{так как } \deg_{b_1}(z_1) \geq 2.$$

Данный факт применим для доказательства следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Для любых точек $w_1, w_2, \dots, w_n \in D^0$ найдется конечное произведение Бляшке $b(z)$ такое, что для всех $k = 1, 2, \dots, n$ прообраз $b^{-1}(w_k)$ содержит хотя бы одну точку разветвления для накрытия $b : D \to D$, $z \to b(z)$.*

Доказательство. Пусть $b_1 : D \to D$ — произведение Бляшке вида

$$b_1(z) = -\frac{z^2 - w_1}{1 - \overline{w}_1 \cdot z^2}.$$

Тогда множество $b_1^{-1}(w_1)$ состоит из единственной точки $0 \in D$ и эта точка является точкой разветвления для накрытия $b_1 : D \to D$, т. е. $\deg_{b_1}(0) = 2$. Пусть $a \in b_1^{-1}(w_2)$. Произведение Бляшке

$$b_2(z) = -\frac{z^2 - a}{1 - \bar{a} \cdot z^2}$$

порождает такое накрытие $b_2 : D \to D$, что $0 \in D$ — точка разветвления этого накрытия и $b_2(0) = a$. Пусть $a_1 \in D^0$ — один из корней уравнения $z^2 - a = 0$. Тогда суперпозиция $b = b_1 \circ b_2$ удовлетворяет следующим условиям:

$$b(a_1) = b_1(b_2(a_1)) = b_1(0) = w_1, \quad b(0) = b_1(b_2(0) = b_1(a) = w_2.$$

Кроме того,

$$\deg_b(a_1) = \deg_{b_1}(0) \cdot \deg_{b_2}(a_1) \geq 2, \quad \text{так как } \deg_{b_1}(0) = 2,$$
$$\deg_b(0) = \deg_{b_1}(a) \cdot \deg_{b_2}(0) \geq 2, \quad \text{так как } \deg_{b_2}(0) = 2.$$

Таким образом, точки $a_1, 0 \in D^0$ являются точками разветвления для накрытия $b : D \to D$ и $b(a_1) = w_1$, $b(0) = w_2$, и теорема верна для $k = 2$.

Для завершения доказательства воспользуемся методом математической индукции. Пусть $b_{n-1} : D \to D$ — накрытие, порожденное произведением Бляшке, такое, что для каждого $k = 1, 2, \dots, n-1$ существует хотя бы одна точка разветвления a_k, принадлежащая множеству $b_{n-1}^{-1}(w_k)$. Пусть c — некоторая точка из множества $b_{n-1}^{-1}(w_n)$. Положим

$$b_n(z) = -\frac{z^2 - c}{1 - \bar{c} \cdot z^2}.$$

Покажем, что точка $0 \in D$ и все точки $d_k \in b_n^{-1}(a_k)$ являются точками разветвления для накрытия $b : D \to D$, где $b = b_{n-1} \circ b_n$. Действительно,

$$\deg_b(d_k) = \deg_{b_{n-1}}(a_k) \cdot \deg_{b_n}(d_k) \geq 2, \quad \text{так как } \deg_{b_{n-1}}(a_k) \geq 2,$$
$$\deg_b(0) = \deg_{b_{n-1}}(a) \cdot \deg_{b_n}(0) \geq 2, \quad \text{так как } \deg_{b_n}(0) = 2.$$

По построению $b(0) = w_n$ и $b(d_k) = w_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Лемма доказана.

Пусть $A(D)$ — диск-алгебра, т. е. алгебра всех непрерывных функций на D, аналитических в D^0. Известно (см. [8, с. 190]), что эта алгебра порождается постоянной функцией и функцией z, пространство мультипликативных функционалов алгебры $A(D)$ есть D и база $*$-слабой топологии на D задается множествами вида $\{z \in D : |z - z_0| < \varepsilon\}$. Аналогично в качестве базы $*$-слабой топологии точки $s_0 \in D_\infty$ можно взять множества вида $\left\{s \in D_\infty : \left|b_k^\infty(s) - b_k^\infty(s_0)\right| < \varepsilon\right\}$, $\varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Действительно, пусть U — открытое множество в D_∞. Тогда для любого $s_0 \in U$ найдутся такие функции $f_1, \dots, f_m \in B$ и $\varepsilon_0 > 0$, что открытое множество $W = \{s \in D_\infty : |f_k(s) - f_k(s_0)| < \varepsilon_0\}$ содержится в U. Поскольку

$$B = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}, \quad A_k \subset A_{k+1},$$

найдутся k_0 и функции $g_1, \dots, g_n \in A$ такие, что открытое множество $V = \{s \in D_\infty : |g_k(s) - g_k(s_0)| < \varepsilon_0/2, \, k = 1, \dots, n\}$ содержится в W. Алгебра A_{k_0} порождается постоянной функцией и функцией b_k^∞, и $b_k^\infty(D_\infty) = D$. Следовательно, алгебры A_{k_0} и $A(D)$ изоморфны (отображение $\Phi : A(D) \to A_{k_0}$, $f \mapsto f \circ b_k^\infty$, — изометрический изоморфизм). Поэтому для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ открытое множество $\left\{s \in D_\infty : \left|b_{k_0}^\infty(s) - b_{k_0}^\infty(s_0)\right| < \varepsilon_1\right\}$ содержится в V.

Теорема 3.2. *Существует такая алгебра Бляшке, одноточечные доли Глисона которой плотны в D_∞ в $*$-слабой топологии.*

Доказательство. Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество всех рациональных чисел в D^0. Подберем такое семейство конечных произведений Бляшке $\{b_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$, что для соответствующего компактного множества D_∞ выполняется следующее условие: для любого рационального числа $w \in \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ и любого натурального n найдется особая точка $s \in D$, $s = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$, у которой n-я координата z_n совпадает с w.

Пусть $F_n = \{w_1, \dots, w_n\}$ — конечное подмножество множества рациональных чисел $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящее из первых n чисел, $n = 1, 2, 3, \dots$. Определим последовательность

$$D_1 \xleftarrow{b_1} D_2 \xleftarrow{b_2} D_3 \xleftarrow{b_3} \dots \quad (D_k = D),$$

где $b_1 : D_2 \to D_1$ — накрытие, порожденное конечным произведением Бляшке $b_1(z)$, такое, что хотя бы одна точка из множества $b_1^{-1}(F_1)$ является точкой разветвления. Пусть $E_1 = b_1^{-1}(F_2) \cup F_2 \subset D_2$. Рассмотрим $b_2(z)$ — конечное произведение Бляшке такое, что для любой точки $z_0 \in E_1$ существует хотя бы одна точка разветвления в множестве $b_2^{-1}(z_0)$ для накрытия $b_2 : D_3 \to D_2$, $z \to b_2(z)$. Рассмотрим теперь множество $E_2 = (b_1 \circ b_2)^{-1}(F_3) \cup b_2^{-1}(F_3) \cup F_3 \subset D_3$ ($F_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$). Пусть $b_3(z)$ — конечное произведение Бляшке такое, что над каждой точкой $z_0 \in E_2 \subset D_3$ существует точка разветвления для накрытия $b_3 : D_4 \to D_3$, $z \to b_3(z)$. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечные семейства конечных произведений Бляшке $\{b_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ и конечных множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, $E_k \subset D_{k+1}$, таких, что

$$\begin{aligned} E_k = (b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_k)^{-1}(F_{k+1}) \cup (b_2 \circ b_3 \circ \dots \circ b_k)^{-1}(F_{k+1}) \cup \dots \\ \dots \cup (b_l \circ \dots \circ b_k)^{-1}(F_{k+1}) \cup \dots \cup b(F_{k+1}) \cup F_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

и над каждой точкой из множества E_k есть хотя бы одна точка разветвления для накрытия $b_{k+1} : D_{k+2} \to D_{k+1}$. Из построения следует, что

1) накрытие $b_{l,k}(z) = b_l \circ b_{l+1} \circ \dots \circ b_k : D_{k+1} \to D_l$, порожденное произведением Бляшке $b_{l,k}(z) = b_l(b_{l+1}(\dots(b_k(z))\dots))$, переводит множество E_k в конечное подмножество в D_l, содержащее множество $F_{k+1} = \{w_1, w_2, \dots, w_{k+1}\}$ первых $k + l$ рациональных чисел из множества $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$;

2) для любого рационального числа $w_l \in \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ и любого натурального числа m найдется особая точка $s \in D$, $s = (z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots)$, у которой m-я координата z_m совпадает с W_l.

Действительно, пусть $k = \max\{m, l\}$. Тогда согласно свойству 1 множество $F_{k+1} = \{w_1, w_2, \dots, w_{k+1}\}$ содержится в $b_{m,k}(E_k)$. Пусть $z_{k+1}^0 \in E_k \subset D_{k+1}$ такая точка, что $b_m^k(z_{k+1}^0) = w_k$. По построению найдется точка разветвления $z_{k+2}^0 \in E_{k+1} \subset D_{k+2}$ для накрытия $b_{k+1} : D_{k+2} \to D_{k+1}$ такая, что $b_{k+1}(z_{k+2}^0) = z_{k+1}^0$. Подобным образом существует точка разветвления $z_{k+3}^0 \in E_{k+2} \subset D_{k+3}$ для накрытия $b_{k+2} : D_{k+3} \to D_{k+2}$ такая, что $b_{k+2}(z_{k+3}^0) = z_{k+2}^0$. Таким образом мы получили последовательность

$$s = \left(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0, z_{m+1}^0, \dots, z_{k+1}^0, z_{k+2}^0, z_{k+3}^0, \dots\right)$$

такую, что $z_n^0 = b_n(z_{n+1}^0)$, $z_m^0 = w_l$ и $z_{k+1}^0, z_{k+2}^0, \dots$ являются точками разветвления при $k = \max\{m, l\}$. Поэтому $s \in D_0$ — особая точка.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что множество особых точек плотно в D_∞. Пусть $s_0 \in D_\infty$. Для любой окрестности U точки s_0, как показано выше, существуют $\varepsilon > 0$ и натуральное число m такие, что множество $V = \{s \in D_\infty : |b_m^\infty(s) - b_m^\infty(s_0)| < \varepsilon\}$ содержится в U. Пусть $w_l \in \{w_k\}_{k=1}^\infty$ — рациональное число, удовлетворяющее неравенству $|b_m^\infty(s_0) - w_l| < \varepsilon$. Согласно свойству 2 найдется особая точка $s_1 \in D_\infty$, у которой m-я координата совпадает с w_l. Поэтому $|b_m^\infty(s_0) - b_m^\infty(s_1)| < \varepsilon$. Отсюда $s_1 \in V \subset U$. Тем самым множество особых точек плотно в D_∞. Теорема доказана.

Из теорем 1.2, 2.2 и 3.2 непосредственно вытекает

Теорема 3.3. *Существует максимальная унимодулярная алгебра Дирихле, у которой одноточечные доли Глисона плотны в пространстве мультипликативных функционалов.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яшагин Е. И.* Об одноточечных долях Глисона алгебр Бляшке // Функцион. анализ. 2006. Т. 40, № 1. С. 92–94.
2. *Wermer J.* Dirichlet algebras // J. Duke Math. 1960. V. 27, N 3. P. 373–382.
3. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
4. *Browder A.* Introduction to function algebras. New York: Benjamin, 1969.
5. *Basener W. G.* On ratioconvex hulls // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 182, N 455. P. 353–381.
6. *Grigoryan S. A., Tonev T. V.* Blaschke inductive limit of uniform algebras // Internat. J. Math. Math. Sci. 2001. V. 27, N 10. P. 599–620.
7. *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
8. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

Статья поступила 3 мая 2005 г.

Яшагин Евгений Иванович
Казанский гос. энергетический университет, кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066
eyashag@rambler.ru