*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2007. Том 48, № 3*

*УДК 512.54+512.55*

# ОПИСАНИЕ ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНОГО СТРОЕНИЯ ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ

**Ю. В. Сосновский**

**Аннотация:** Описано гиперцентральное строение группы унитреугольных автоморфизмов алгебры многочленов $K[x_1, \dots, x_n]$ при $n \geq 3$ и при любом поле $K$. Эту группу иногда называют борелевской. Из описания получается непредставимость указанной группы матрицами ни над каким полем.

**Ключевые слова:** гиперцентральное строение, группа автоморфизмов алгебры многочленов, матричная представимость.

## 1. Введение

Интерес к группе автоморфизмов алгебры многочленов заметно возрос после работы И. П. Шестакова и У. У. Умирбаева [1], в которой доказано, что известный автоморфизм Нагаты алгебры многочленов от трех переменных над полем нулевой характеристики не является ручным. Отправной точкой для настоящей работы явилась статья В. А. Романькова, И. В. Чиркова, М. А. Шевелина [2], в которой показана матричная непредставимость групп автоморфизмов следующих четырех типов свободных алгебр: свободных алгебр Ли, свободных ассоциативных алгебр, абсолютно свободных алгебр и алгебр многочленов при условии, что мощность множества свободных порождающих не меньше 4, а основное поле имеет нулевую характеристику. Во всех указанных случаях в группе автоморфизмов выделялась подгруппа унитреугольных автоморфизмов, которая оказывалась разрешимой, но не представимой матрицами.

В настоящей работе описывается гиперцентральное строение этой подгруппы, но только для алгебры многочленов, зато без ограничения на характеристику поля и с понижением минимального числа порождающих с 4 до 3. Как следствие из описания гиперцентрального строения получается непредставимость этой подгруппы матрицами.

Следуя работе [2], под группой унитреугольных автоморфизмов $U_n$ алгебры многочленов $K[x_1, \dots, x_n]$ над полем $K$ мы будем понимать подгруппу из $\operatorname{Aut} K[x_1, \dots, x_n]$, порожденную автоморфизмами $\varphi_{f_i}$ вида

$$x_j^{\varphi_{f_i}} = \begin{cases} x_i + f_i, & \text{если } j = i, \\ x_j, & \text{если } j \neq i, \end{cases}$$

где $i = 1, \dots, n-1$, $f_i$ — многочлен из $K[x_{i+1}, \dots, x_n]$ без свободного члена. Подгруппу $U_n$ иногда называют *борелевской*. Одним из основных результатов настоящей работы является

**Теорема 1.** *При* $n \geq 3$ *группа унитреугольных автоморфизмов* $U_n$ *алгебры многочленов* $K[x_1, \dots, x_n]$ *гиперцентральна длины* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}\omega + 1$ *вне зависимости от характеристики поля* $K$.

Следствием этой теоремы является

**Теорема 2.** *При* $n \geq 3$ *группа унитреугольных автоморфизмов* $U_n$ *алгебры многочленов* $K[x_1, \dots, x_n]$ *не представима матрицами ни над каким полем.*

Отметим, что при $n = 2$ группа $U_2$ изоморфна аддитивной группе алгебры многочленов $K[x_2]$ без свободных членов и поэтому представима матрицами.

Поскольку описание гиперцентров и все идеи доказательства хорошо видны при $n = 4$, в целях краткости изложения именно этот случай мы и рассмотрим подробно. Договоримся, что далее любой автоморфизм $\varphi$ из $U_4$ будем задавать его значениями на порождающих

$$\varphi = (x_1 + f_1(x_2, x_3, x_4), \quad x_2 + f_2(x_3, x_4), x_3 + f_3(x_4)), \tag{1}$$

опуская очевидное равенство $x_4^{\varphi} = x_4$ и подразумевая, что многочлены $f_1(x_2, x_3, x_4)$, $f_2(x_3, x_4)$, $f_3(x_4)$ не имеют свободных членов. Так как при $\operatorname{char} K = 0$ группа $U_4$ не имеет кручения, а при $\operatorname{char} K = p$ имеет конечный период, равный $p^3$, разумно разбить описание гиперцентров и доказательства теорем на два случая в зависимости от характеристики поля $K$.

## 2. Случай поля нулевой характеристики

Пусть $\operatorname{char} K = 0$. Нам потребуются степени многочлена $f_1(x_2, x_3, x_4)$ по переменным $x_2$ и $x_3$. Будем обозначать их через $d_2 f_1(x_2, x_3, x_4)$, $d_3 f_1(x_2, x_3, x_4)$ соответственно. Отметим, что для любого автоморфизма $\varphi$ из $U_4$ справедливы равенства $d_2 f_1^{\varphi}(x_2, x_3, x_4) = d_2 f_1(x_2, x_3, x_4)$, $d_3 f_2^{\varphi}(x_3, x_4) = d_3 f_2(x_3, x_4)$. Выделим в группе $U_4$ подгруппы

$$Z_\alpha = \{\varphi = (x_1 + f_1(x_3, x_4), x_2, x_3) \mid d_3 f_1(x_3, x_4) \leq \alpha - 1\},$$

$$Z_\omega = \{\varphi = (x_1 + f_1(x_3, x_4), x_2, x_3)\},$$

$$Z_{\omega+\alpha} = \{\varphi = (x_1 + f_1(x_2, x_3, x_4), x_2, x_3) \mid d_2 f_1(x_2, x_3, x_4) \leq \alpha\},$$

$$Z_{2\omega} = \{\varphi = (x_1 + f_1(x_2, x_3, x_4), x_2, x_3)\},$$

$$Z_{2\omega+\alpha} = \{\varphi = (x_1 + f_1(x_2, x_3, x_4), x_2 + f_2(x_3, x_4), x_3) \mid d_3 f_2(x_3, x_4) \leq \alpha - 1\},$$

$$Z_{3\omega} = \{\varphi = (x_1 + f_1(x_2, x_3, x_4), x_2 + f_2(x_3, x_4), x_3)\}, \quad Z_{3\omega+1} = U_4,$$

где $f_1$, $f_2$, $f_3$ — произвольные многочлены от указанных переменных, $1 \leq \alpha < \omega$.

Гиперцентральное строение описывает

**Теорема 3.** *Если* $\operatorname{char} K = 0$, *то группа* $U_4$ *гиперцентральна длины* $3\omega + 1$, *причем ее гиперцентры* $\zeta_\alpha(U_4)$ *совпадают с подгруппами* $Z_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq 3\omega + 1$.

Доказательство проведем индукцией по $\alpha$. Пусть $\alpha = 1$, и пусть автоморфизм $\varphi$ из $\zeta_1(U_4)$ имеет вид (1). Возьмем автоморфизм $\psi_1 = (x_1 + x_2, x_2, x_3)$ из $U_4$ и вычислим:

$$\begin{aligned}
&x_1^{\psi_1^{-1}\varphi^{-1}\psi_1\varphi} = (x_1 - x_2)^{\varphi^{-1}\psi_1\varphi} \\
&= (x_1 - f_1(x_2 - f_2(x_3 - f_3(x_4), x_4), x_3 - f_3(x_4), x_4) - x_2 + f_2(x_3 - f_3(x_4), x_4))^{\psi_1\varphi} \\
&= (x_1 + x_2 - f_1(x_2 - f_2(x_3 - f_3(x_4), x_4), x_3 - f_3(x_3), x_4) - x_2 + f_2(x_3 - f_3(x_4), x_4))^{\varphi}
\end{aligned}$$

$$= x_1 + f_1(x_2, x_3, x_4) - f_1(x_2, x_3, x_4) + f_2(x_3, x_4) = x_1 + f_2(x_3, x_4).$$

Поскольку $\varphi \in \zeta_1(U_4)$, то $[\psi_1, \varphi] = 1$ и получаем равенство $f_2(x_3, x_4) = 0$. В дальнейшем описанные рассуждения будут неоднократно повторяться, поэтому будем записывать их более кратко, нумеровать и называть шагами. Например, предыдущее рассуждение запишется в следующем виде.

1. Пусть $\psi_1 = (x_1 + x_2, x_2, x_3)$, тогда $x_1^{[\psi_1,\varphi]} = x_1 + f_2(x_3, x_4)$, откуда $f_2(x_3, x_4) = 0$.

Следующими шагами будут

2. Пусть $\psi_2 = (x_1, x_2 + x_3, x_3)$, тогда $x_2^{[\psi_2,\varphi]} = x_2 + f_3(x_4)$, откуда $f_3(x_4) = 0$.

3. Поскольку $x_1^{[\psi_2,\varphi]} = x_1 - f_1(x_2 + x_3, x_3, x_4) + f_1(x_2, x_3, x_4)$, то $f_1(x_2, x_3, x_4) - f_1(x_2 + x_3, x_3, x_4) = 0$. Следовательно, $d_2 f_1(x_2, x_3, x_4) = 0$ и $f_1(x_2, x_3, x_4) = f_1(x_3, x_4)$.

4. Пусть $\psi_3 = (x_1, x_2, x_3 + x_4)$, тогда $x_1^{[\psi_3,\varphi]} = x_1 - f_1(x_3 + x_4, x_4) + f_1(x_3, x_4)$, откуда $f_1(x_3, x_4) - f_1(x_3 + x_4, x_4) = 0$. Следовательно, $d_3 f_1(x_3, x_4) = 0$ и $f_1(x_3, x_4) = f_1(x_4)$.

Мы показали включение $\zeta_1(U_4) \subseteq Z_1$. Обратное включение проверяется прямым вычислением.

Допустим, что справедливо равенство $\zeta_\alpha(U_4) = Z_\alpha$, $1 \le \alpha \le \omega$, и что автоморфизм $\varphi$ из $\zeta_{\alpha+1}(U_4)$ имеет вид (1). Доказательство в этом случае будет разбиваться на аналогичные шаги, а вид автоморфизмов $\psi$ естественно будет зависеть от $\alpha$.

5. Пусть $\psi_4 = \big(x_1 + x_2^{\alpha+2}, x_2, x_3\big)$. Тогда $x_1^{[\psi_4,\varphi]} = x_1 + (x_2 + f_2(x_3, x_4))^{\alpha+2} - x_2^{\alpha+2}$. Так как $d_2\big((x_2 + f_2(x_3, x_4))^{\alpha+2}) - x_2^{\alpha+2}\big) = 0$, то $f_2(x_3, x_4) = 0$.

6. Пусть $\psi_5 = \big(x_1, x_2 + x_3^{\alpha+2}, x_3\big)$. Тогда $x_2^{[\psi_5,\varphi]} = x_2 + (x_3 + f_3(x_4))^{\alpha+2} - x_3^{\alpha+2}$. Поскольку $[\psi_5, \varphi] \in \zeta_\alpha(U_4)$, то $(x_3 + f_3(x_4))^{\alpha+2} - x_3^{\alpha+2} = 0$, следовательно, $f_3(x_4) = 0$.

7. Далее, $x_1^{[\psi_5,\varphi]} = x_1 + f_1(x_2, x_3, x_4) - f_1\big(x_2 + x_3^{\alpha+2}, x_3, x_4\big)$. Поскольку $d_2\big(f_1(x_2, x_3, x_4) - f_1\big(x_2 + x_3^{\alpha+2}, x_3, x_4\big)\big) = 0$ и $d_3\big(f_1(x_2, x_3, x_4) - f_1\big(x_2 + x_3^{\alpha+2}, x_3, x_4\big)\big) \le \alpha - 1$, то $f_1(x_2, x_3, x_4) = f_1(x_3, x_4)$.

8. Так как $x_1^{[\psi_3,\varphi]} = x_1 + f_1(x_3, x_4) - f_1(x_3 + x_4, x_4)$ и $d_3(f_1(x_3, x_4) - f_1(x_3 + x_4, x_4)) \le \alpha - 1$, то $d_3 f_1(x_3, x_4) \le \alpha$.

Включение $\zeta_{\alpha+1}(U_4) \subseteq Z_{\alpha+1}$ доказано. Обратное включение проверяется прямым вычислением.

С учетом доказанных равенств $\zeta_\alpha(U_4) = Z_\alpha$, $\alpha < \omega$, цепочка равенств $\zeta_\omega(U_4) = \bigcup\limits_{\alpha<\omega} \zeta_\alpha(U_4) = \bigcup\limits_{\alpha<\omega} Z_\alpha = Z_\omega$ очевидна.

Допустим, что справедливо равенство $\zeta_{\omega+\alpha}(U_4) = Z_{\omega+\alpha}$, $0 \le \alpha < \omega$, и что автоморфизм $\varphi$ из $\zeta_{\omega+\alpha+1}(U_4)$ имеет вид (1). В этом случае вычисления шага 5 приводят к неравенству $d_2\big((x_2 + f_2(x_3, x_4))^{\alpha+2} - x_2^{\alpha+2}\big) \le \alpha$, которое возможно лишь при $f_2(x_3, x_4) = 0$. Вычисления шага 6 приводят к равенству $f_3(x_4) = 0$, а вычисления шага 7 дают неравенство $d_2\big(f_1(x_2, x_3, x_4) - f_1\big(x_2 + x_3^{\alpha+2}, x_3, x_4\big)\big) \le \alpha$, которое возможно лишь при $d_2 f_1(x_2, x_3, x_4) \le \alpha + 1$. Следовательно, включение $\zeta_{\omega+\alpha+1}(U_4) \subseteq Z_{\omega+\alpha+1}$ доказано. Обратное включение доказывается прямым вычислением.

После того как доказаны равенства $\zeta_{\omega+\alpha}(U_4) \subseteq Z_{\omega+\alpha}$, $0 \le \alpha < \omega$, доказательство равенства $\zeta_{2\omega}(U_4) = Z_{2\omega}$ очевидно.

Допустим, что справедливо равенство $\zeta_{2\omega+\alpha}(U_4) = Z_{2\omega+\alpha}$, $0 \le \alpha < \omega$, и что автоморфизм $\varphi$ из $\zeta_{2\omega+\alpha+1}(U_4)$ имеет вид (1). В этом случае вычисления шага 6 приводят к неравенству $d_3\big((x_3+f_3(x_4))^{\alpha+2}-x_3^{\alpha+2}\big)\le\alpha-1$, которое возможно лишь при $f_3(x_4)=0$. Далее нам потребуется еще один шаг.

9. Так как $x_2^{[\psi_3,\varphi]}=x_2+f_2(x_3,x_4)-f_2(x_3+x_4,x_4)$ и $d_3(f_2(x_3,x_4)-f_2(x_3+x_4,x_4))\le\alpha-1$, то $d_3f_2(x_3,x_4)\le\alpha$.

Включение $\zeta_{2\omega+\alpha+1}(U_4)\subseteq Z_{2\omega+\alpha+1}$ доказано, обратное включение доказывается прямым вычислением, после чего легко получается равенство $\zeta_{3\omega}(U_4)=Z_{3\omega}$.

Нетрудно заметить, что $[U_4,U_4]\le\zeta_{3\omega}(U_4)$, следовательно, $\zeta_{3\omega+1}(U_4)=U_4$, и теорема 3 доказана.

**Теорема 4.** *Если* $\operatorname{char}K=0$, *то группа* $U_4$ *не представима матрицами ни над каким полем.*

Доказательство. Допустим, что группа $U_4$ представима матрицами. Поскольку она не имеет кручения, согласно [3] ее гиперцентральная длина конечна, что противоречит теореме 3.

Отметим, что при $n=3$ гиперцентральная длина группы $U_3$ равна $\omega+1$ и доказательство теоремы 3 сохраняет силу для этого случая.

## 3. Случай поля ненулевой характеристики

Рассуждения предыдущего пункта, по существу, опирались на тот факт, что $\deg((x+b)^\alpha-x^\alpha)=\alpha-1$ при $b\ne0$. Если $\operatorname{char}K=p>0$, то степень этого многочлена зависит от $p$-й записи числа $\alpha$. Действительно, пусть

$$\alpha=a_rp^r+a_{r-1}p^{r-1}+\dots+a_1p+a_0, \tag{2}$$

где $0\le a_i\le p-1$, $i=0,1,\dots,r$, $a_r\ne0$. Тогда

$$(x+b)^\alpha-x^\alpha=(x^{p^r}+b^{p^r})^{a_r}\cdot(x^{p^{r-1}}+b^{p^{r-1}})^{a_{r-1}}\dots(x^p+b^p)^{a_1}(x+b)^{a_0}-x^\alpha. \tag{3}$$

Если $a_0>0$, то степень многочлена (3) будет равна $\alpha-1$. Если же $a_0=0$, но $a_1>1$, то степень многочлена (3) будет равна $\alpha-p$, и т. д. Это наблюдение приводит к понятию $p$-степени для многочлена, если положить $d^px^\alpha=a_r+\dots+a_1+a_0$ и определить $p$-степень для многочлена как наибольшую из $p$-степеней для его одночленов. Как и в п. 2, нам потребуется понятие $p$-степеней многочленов по $x_2$ и по $x_3$, которые будем обозначать через $d_2^p$ и $d_3^p$ соответственно.

Выделим в группе $U_4$ подгруппы

$$\overline{Z}_\alpha=\big\{\varphi=(x_1+f_1(x_3,x_4),x_2,x_3)\mid d_3^pf_1(x_3,x_4)\le\alpha-1\big\},$$

$$\overline{Z}_\omega=\{\varphi=(x_1+f_1(x_3,x_4),x_2,x_3)\},$$

$$\overline{Z}_{\omega+\alpha}=\big\{\varphi=(x_1+f_1(x_2,x_3,x_4),x_2,x_3)\mid d_2^pf_1(x_2,x_3,x_4)\le\alpha\big\},$$

$$\overline{Z}_{2\omega}=\{\varphi=(x_1+f_1(x_2,x_3,x_4),x_2,x_3),x_2,x_3)\},$$

$$\overline{Z}_{2\omega+\alpha}=\big\{\varphi=(x_1+f_1(x_2,x_3,x_4),x_2+f_2(x_3,x_4),x_3\mid d_3^pf_2(x_3,x_4)\le\alpha-1\big\},$$

$$\overline{Z}_{3\omega}=\{\varphi=(x_1+f_1(x_2,x_3,x_4),x_2+f_2(x_3,x_4),x_3)\},\quad \overline{Z}_{3\omega+1}=U_4,$$

где $f_1$, $f_2$, $f_3$ — произвольные многочлены от указанных в этом определении переменных без свободных членов, $1\le\alpha<\omega$.

Справедлива теорема, аналогичная теореме 3.

**Теорема 5.** *Если* $\operatorname{char} K = p > 0$, *то группа* $U_4$ *гиперцентральна длины* $3\omega + 1$, *причем ее гиперцентры* $\zeta_\alpha(U_4)$ *совпадают с подгруппами* $\overline{Z}_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq 3\omega + 1$.

Доказательства равенств теоремы 5 пошагово совпадают с доказательствами аналогичных равенств из теоремы 3 с заменой обычной степени на $p$-степень и с изменениями в выборе автоморфизмов $\psi_4$, $\psi_5$, которые в этом пункте имеют вид

$$\psi_4 = \bigl(x_1 + x_2^{p^{r+2}+p^{r+1}+\alpha}, x_2, x_3\bigr), \quad \psi_5 = \bigl(x_1, x_2 + x_3^{p^{r+2}+p^{r+1}+\alpha}, x_3\bigr).$$

В отличие от доказательства теоремы 5 доказательство следующей теоремы существенно использует специфику ненулевой характеристики поля.

**Теорема 6.** *Если* $\operatorname{char} K = p > 0$, *то группа* $U_4$ *не представима матрицами ни над каким полем.*

Доказательство. Допустим, что группа $U_4$ изоморфна некоторой подгруппе из $GL_n(K')$. Можно для простоты считать, что $U_4 \leq GL_n(K')$. Согласно теореме Бернсайда [4, теорема 52.1.1, с. 397] справедливо неравенство $|U_4 : u(U_4)| \leq (p^3)^n$, где $u(U_4)$ — унипотентный радикал группы $U_4$. Поскольку группа $U_4$ бесконечна, то $u(U_4)$ — нееденичная унипотентная $p$-подгруппа. Это возможно лишь в случае, когда $\operatorname{char} K' = p$ и $p$-группа $U_4$ состоит из унипотентных элементов. Согласно теореме Колчина [4, теорема 49.1.1, с. 381] группа $U_4$ унитриангулируема. В частности, она нильпотентна, что противоречит теореме 5.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Умирбаев У. У., Шестаков И. П.* Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 6. С. 745–748.
2. *Романьков В. А., Чирков И. В., Шевелин М. А.* Матричная непредставимость групп автоморфизмов некоторых свободных алгебр // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1184–1188.
3. *Gruenberg K. W.* The hypercenter of linear groups // J. Algebra. 1968. V. 8, N 1. P. 34–40.
4. *Мерзляков Ю. И.* Рациональные группы. 2-е изд. М.: Наука, 1987.


*Статья поступила 1 февраля 2006 г.*

*Сосновский Юрий Васильевич*
*Новосибирский гос. педагогический университет, кафедра алгебры,*
*ул. Вилюйская, 28, Новосибирск 630126*
yury_sosnovsky@mail.ru