Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 517.91

СУЩЕСТВОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО И МИНИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБАНИЯ УПРУГОЙ БАЛКИ

Ш. Хун, С. Се, Ч. Чжан, З. Хэ

Аннотация: Доказано существование максимального и минимального решений краевой задачи изгибания упругой балки в банаховом пространстве. Использованы частичный порядок и теорема Мюнха о неподвижной точке.

Ключевые слова: упорядоченное банахово пространство, максимальное и минимальное решения, неподвижная точка, уравнение изгибания.

1. Введение

Пусть $(E, |\cdot|)$ — банахово пространство, $(Y, |\cdot|_Y)$ — упорядоченное банахово пространство, $|\cdot|_0$ — равномерная норма в $C[J, E]$, где $J = [0, 1]$. Положим $D(t) = \{x(t) : x \in D\}$, $D(J) = \bigcup_{t \in J} D(t)$, где $D \subset C[J, E]$.

Определение 1. Говорят, что функция $p : E \to Y$ *принадлежит классу* $\mathscr{A}$, и этот факт обозначают через $p \in \mathscr{A}$, если p равномерно непрерывна на E и $p(x) = p(y)$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Для заданной $p \in \mathscr{A}$ введем порядок $\leq_p$ на E следующим образом: $x \leq_p y$, если $p(x) \leq p(y)$, и $x <_p y$, если $x \leq_p y$ и $x \neq y$. Здесь $x, y \in E$.

Для $\varphi, \psi : J \to Y$ положим $\varphi \leq \psi$, если $\varphi(t) \leq \psi(t)$ для любого $t \in J$, и $\varphi < \psi$, если $\varphi \leq \psi$ и существует $t \in J$ такое, что $\varphi(t) \neq \psi(t)$.

Математическая модель состояния равновесия изгибания упругой балки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка. Многими авторами исследовались краевые задачи с различными условиями на концы балки (см., например, [1–8]). В [1–3] при некоторых условиях на рост f и нерезонансном условии, включающем двупараметрическую задачу на собственные значения, получены теоремы существования положительного решения следующего уравнения:

$$u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u''(t)), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \tag{2}$$

Все эти результаты основаны на методе продолжения Лере — Шаудера и топологической степени.

Supported by Natural Science Foundation of Hainan Province (10102) and Educational Department of Hainan Province (200208).

Недавно некоторыми авторами метод нижнего и верхнего решений был применен для изучения задачи четвертого порядка. Например, в [4–6] рассмотрено уравнение вида $u^{(4)}(t) = f(t, u(t))$, а в $[7, 8]$ — задача (1), (2).

В данной работе мы установим теоремы существования решения следующей краевой задачи:

$$
\begin{gathered}
u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u''(t)), \quad 0 < t < 1, \\
u(0) = \eta, \quad u(1) = \mu, \quad u''(0) = u''(1) = 0.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Эта работа отличается от упомянутых выше тем, что мы не предполагаем существования нижнего и верхнего решений задачи (3).

В разд. 2 даны предварительные сведения и теоремы о неподвижной точке, которые будут использованы в разд. 3. Доказательство нашей теоремы о неподвижной точке состоит из двух шагов. Сначала мы с помощью метода итераций доказываем существование верхнего решения уравнения $x = Tx$, т. е. элемента v_0 из E, для которого $Tv_0 \leq_p v_0$, где T — отображение из E в E. На втором шаге, обеспечивающем неподвижную точку T, мы используем классические методы последовательных приближений. Разд. 3 посвящен существованию максимального и минимального решений задачи (3). Основным инструментом, используемым в этом разделе, является доказанная в разд. 2 теорема о неподвижной точке. В завершение разд. 3 приведены примеры, демонстрирующие приложения доказанных теорем.

2. Теоремы о неподвижной точке

В [9] дано следующее развитие теоремы о неподвижной точке.

Теорема. *Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество в E и $u \in K$. Предположим, что непрерывный оператор $F : K \to K$ обладает следующим свойством:*

$$C \subset K \text{ счетно},\ C \subset \overline{\mathrm{co}}(\{u\} \cup F(C)) \Rightarrow C \text{ относительно компактно}.$$

Тогда F обладает неподвижной точкой в K.

Этот результат был распространен в [10] на случай монотонных операторов и в [11] — на случай многозначных возрастающих операторов.

В этом разделе мы докажем существование максимальной и минимальной неподвижных точек у монотонного оператора, используя новые методы итераций при условии Мюнха, отличном от предложенного в [9–11].

Лемма 1. *Пусть $p \in \mathscr{A}$ и $L = \{x^\lambda : \lambda \in \Lambda,\ x^\lambda \in C[J, E]\}$ (Λ — вполне упорядоченное множество) — относительно компактное вполне упорядоченное множество относительно порядка $\leq_p$. Предположим, что*

$$\phi(t) = \sup\{p(x^\lambda(t)) : \lambda \in \Lambda\} \quad (\text{или } \psi(t) = \inf\{p(x^\lambda(t)) : \lambda \in \Lambda\})$$

для $t \in J$. Тогда либо существует $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что $p(x^{\lambda_0}) = \phi$ ($p(x^{\lambda_0}) = \psi$), либо существует последовательность $\{x^{\lambda_k}\} \subset L$ такая, что

$$p(x^{\lambda_k})(t) \to \phi(t) \quad (p(x^{\lambda_k})(t) \to \psi(t)), \quad t \in J,$$

при $k \to \infty$.

Доказательство. Предположим, что $p(x^\lambda) \neq \phi$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Заметим, что $P(L) := \{p(x^\lambda) : x^\lambda \in L\}$ вполне упорядочено и относительно компактно, откуда вытекает, что $P(L)$ сепарабельно, т. е. существует подпоследовательность $\{x^{\lambda'_k}\} \subset L$ такая, что $\{p(x^{\lambda'_k})\}$ плотно в $P(L)$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$y^k = \max\{x^{\lambda'_1}, x^{\lambda'_2}, \ldots, x^{\lambda'_k}\}.$$

Тогда $\{y^k\}$ — возрастающая относительно компактная последовательность, поэтому найдутся подпоследовательность $\{y^{k_j}\}$ в $\{y^k\}$ и $x : J \to E$ такие, что $\{y^{k_j}\}$ сходится равномерно к x на J. Ввиду непрерывности p получим, что $p(y^{k_j}(t)) \to p(x(t))$ при $j \to \infty$ (для $t \in J$). Докажем, что

$$p(y^k(t)) \to p(x(t)) \tag{4}$$

равномерно относительно $t \in J$. Предположим, что это не так, и пусть существуют $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{y^{k'_j}\}$ в $\{y^k\}$ такие, что

$$|p(y^{k'_j}) - p(x)|_0 \geq \varepsilon_0 \quad \text{для } j = 1, 2, \ldots .$$

В силу относительной компактности $\{p(y^{k'_j})\}$ существует подпоследовательность $\{y^{k'_{j_i}}\}$ последовательности $\{y^{k'_j}\}$ такая, что

$$p(y^{k'_{j_i}}) \to p(\bar{x}) \quad \text{при } i \to \infty \text{ для } \bar{x} \in E.$$

Для данного τ из возрастания $\{y^k\}$ вытекает, что $p(y^{k_\tau}) \leq p(y^{k'_{j_i}})$ при достаточно большом i. Переходя к пределу сначала по $i \to \infty$, а затем по $\tau \to \infty$, получим $p(x) \leq p(\bar{x})$. Аналогично можно доказать, что $p(\bar{x}) \leq p(x)$. Отсюда $x = \bar{x}$. Следовательно,

$$|p(y^{k'_{j_i}}) - p(\bar{x})|_0 < \varepsilon_0$$

для достаточно большого i. Это противоречит тому, что $|p(y^{k'_j}) - p(x)|_0 \geq \varepsilon_0$. Значит, (4) верно.

Теперь достаточно доказать, что $p(x(t)) = \phi(t)$ для любого $t \in J$. При каждом k имеем $p(y^k(t)) \leq \phi(t)$. Пусть $k \to \infty$. Тогда

$$p(x(t)) \leq \phi(t) \quad \text{для } t \in J. \tag{5}$$

Если равенство в (5) не имеет места, то существует $t_0 \in J$ такое, что $p(x(t_0)) < \phi(t_0)$. Пусть $z(t_0) = \phi(t_0) - p(x(t_0))$, тогда $z(t_0) > \theta$ (здесь θ — нуль в Y). Из определения ϕ вытекает существование $\lambda \in \Lambda$ такого, что

$$p(x^\lambda(t_0)) > \phi(t_0) - z(t_0) = p(x(t_0)). \tag{6}$$

С другой стороны, так как $p(x^\lambda) < \phi$, существует $\lambda_1 \in \Lambda$ такое, что $\lambda < \lambda_1$ и $p(x^\lambda(t_0)) < p(x^{\lambda_1}(t_0))$. Поскольку $p(x^{\lambda'_k})$ плотно в $P(L)$, найдется k_0 такое, что $\lambda < \lambda'_{k_0}$ и

$$p(x^\lambda(t_0)) \leq p(x^{\lambda'_{k_0}}(t_0)) \leq p(y^{k_0}(t_0)) \leq p(x(t_0)).$$

Это противоречит (6). Следовательно, ввиду (5) получаем $p(x(t)) = \phi(t)$ для любого $t \in J$.

Аналогично можно доказать утверждение для функции ψ. Лемма доказана.

Докажем существование неподвижной точки.

Теорема 1. *Пусть $A : E \to E$ — непрерывное отображение и u_0 — данный элемент из E. Предположим, что*

(h1) *либо $u_0 \leq_p Au_0$, либо $Au_0 \leq_p u_0$;*

(h2) *если $u, v \in E$ и $u \leq_p v$, то $Au \leq_p Av$;*

(h3) *если $C \subset E$ счетно, вполне упорядочено и $C \subset \mathrm{cl}(\{u_0\} \cup A(C))$, то C относительно компактно; здесь $\mathrm{cl}(D)$ — замыкание множества D.*

Тогда отображение A имеет неподвижную точку.

Доказательство. Пусть выполнены предположения (h1)–(h3). Найдем верхнее решение уравнения $x = Ax$, т. е. элемент v_0 в E, для которого

$$Av_0 \leq_p v_0. \tag{7}$$

Если $Au_0 \leq_p u_0$, то (7) выполнено при $v_0 = u_0$. С другой стороны, согласно (h1) имеем $u_0 \leq_p Au_0 = u_1$. Из (h2) вытекает, что $p(u_1) \leq p(Au_1)$. Определим $u_k = Au_{k-1}$ для $k = 2, 3, \dots$. Тогда (h2) гарантирует, что $u_{k-1} \leq_p u_k$ для $k \geq 1$. Пусть $C = \{u_k\}$. Ясно, что C счетно, возрастает и $C \subset \mathrm{cl}(\{u_0\} \cup A(C))$. Ввиду (h3) C относительно компактно. В силу леммы 1 либо найдется k_0 такое, что $p(u_{k_0}) = \sup\{p(u_k)\} =: \phi$, либо существует подпоследовательность $\{u_{k_i}\} \subset C$, для которой $p(u_{k_i}) \to \phi$ при $i \to \infty$. В таком случае $p(u_k) \leq p(u_{k_0})$ для $k = 1, 2, \dots$. Отсюда вытекает, что (7) выполнено, когда $v_0 = u_{k_0}$. Если последнее равенство верно, то $p(u_{k_i}) \leq \phi$ при $i = 1, 2, \dots$. Отметим, что $\{u_{k_i}\}$ относительно компактно, и, не ограничивая общности, мы можем предполагать существование $u \in E$ такого, что $u_{k_i} \to u$. Из непрерывности p получим $\phi = p(u)$. Отсюда

$$Au_{k_i - 1} = u_{k_i} \leq_p u. \tag{8}$$

Так как $C = \{u_n\}$ возрастающая и относительно компактная, аналогично доказательству соотношения (4) можно показать, что $\{u_n\}$ сходится к u при $n \to \infty$. Переходя в (8) к пределу при $i \to \infty$ и учитывая непрерывность A, заключаем, что $Au \leq_p u$. Тем самым (7) выполнено при $v_0 = u$.

Аналогично можно найти нижнее решение уравнения $x = Ax$.

Если в (7) имеет место равенство, то $u = v_0$ — неподвижная точка A. Если же $Av_0 <_p v_0$, то выберем элемент $v_1 \in E$ так, что $v_1 = Av_0$. Из (h2) вытекает, что $Av_1 \leq_p v_1$. Если в этом выражении имеет место равенство, то $u = v_1$ — неподвижная точка A. Иначе $Av_1 <_p v_1$ и возьмем элемент $v_2 \in E$ так, что $v_2 = Av_1$. Условие (h2) гарантирует, что $Av_2 \leq_p v_2$. В общем случае, имея

$$v_{k+1} = Av_k, \quad \text{до тех пор пока } Av_k <_p v_k, \tag{9}$$

из (h2) снова получаем, что $Av_{k+1} \leq_p v_{k+1}$ при $k = 2, 3, \dots$. Если $Av_{k+1} = v_{k+1}$ для некоторого k, то $u = v_{k+1}$ — неподвижная точка A. Если $Av_k <_p v_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то описанная процедура дает строго убывающую последовательность $\{v_k\} \subset E$. Ясно, что C вполне упорядочено и $C \subset \mathrm{cl}(\{v_0\} \cup A(C))$ с $C = \{v_n\}$. Согласно условию (h3) C относительно компактно, т. е. существуют подпоследовательность $\{v_{k_i}\}$ в C и элемент $w \in E$ такие, что $v_{k_i} \to w$ при $i \to \infty$. Вновь аналогично доказательству (4) получим, что $v_k \to w$ при $k \to \infty$. Из леммы 1 и свойства строгого убывания C можно вывести, что $p(v_{k_i}) \to \inf\{p(v_{k_i})\} =: \psi$ при $i \to \infty$. В силу непрерывности p имеем $\psi = p(w)$. Поэтому $p(v_{k_i}) > p(Av_{k_i}) = p(v_{k_i+1}) \geq P(v_{k_{i+1}})$ ввиду (9) для каждого $i \geq 1$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, из непрерывности A и p имеем $\psi = p(Aw)$, т. е. $w = Aw$, откуда w — неподвижная точка A. Доказательство завершено.

Обозначим через $\mathrm{Fix}(A)$ множество неподвижных точек A.

Определение 2. Пусть $p \in \mathscr{A}$ и $u^*, u_* \in \mathrm{Fix}(A)$. Элементы u^* и u_* называются *максимальной* и *минимальной неподвижными точками* A *относительно* $\leq_p$ соответственно, если $u_* \leq_p u \leq_p u^*$ для любого $u \in \mathrm{Fix}(A)$.

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы* 1, *то отображение* A *имеет максимальную и минимальную неподвижные точки относительно* $\leq_p$.

Доказательство. Согласно теореме 1 множество $\mathrm{Fix}(A)$ непусто. Разобьем доказательство на два шага.

Шаг 1. Покажем, что любое вполне упорядоченное подмножество Q в $\mathrm{Fix}(A)$ относительно компактно. Действительно, если $\{u_n\}$ — бесконечная последовательность в Q, то $u_n = Au_n$ для $n = 1, 2, \dots$. Отсюда $\{u_n\} \subset A(\{u_n\})$ и $\{u_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность ввиду (h3), так что Q относительно компактно.

Шаг 2. Докажем, что $\mathrm{Fix}(A)$ имеет максимальный элемент u^* относительно $\leq_p$. Согласно лемме Цорна достаточно показать, что всякое вполне упорядоченное подмножество в $\mathrm{Fix}(A)$ ограничено сверху. Пусть $D = \{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ (Λ — вполне упорядоченное множество) — произвольное непустое вполне упорядоченное подмножество в $\mathrm{Fix}(A)$. Тогда D относительно компактно, как показано на шаге 1. По лемме 1 либо найдется $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что $p(u_{\lambda_0}) = \sup\{p(u_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} =: \phi$, либо существует подпоследовательность $\{u_n\} \subset D$ такая, что $p(u_n) \to \phi$ при $n \to \infty$. Если выполнено первое, то $p(u_\lambda) \leq p(u_{\lambda_0})$ для всех $\lambda \in \Lambda$, откуда u_{n_0} — верхняя граница, и утверждение доказано. Если верно последнее, то $\{u_n\}$ относительно компактно и существуют подпоследовательность $\{u_{n_i}\}$ в $\{u_n\}$ и элемент $v \in E$ такие, что $u_{n_i} \to v$ при $i \to \infty$. Отсюда $p(v) = \phi$, поскольку p непрерывно. Заметим, что $u_{n_i} \in \mathrm{Fix}(A)$, так что $u_{n_i} = Au_{n_i}$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, из непрерывности A получим, что $Av = v$, т. е. $v \in \mathrm{Fix}(A)$. Доказательство шага 2 завершено.

Очевидно, что u^* — максимальная неподвижная точка A. Аналогично можно доказать существование минимальной неподвижной точки A. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (h1) *и* (h2). *Допустим, что выполнено также одно из следующих условий:*

(h4) A *— компактное отображение;*

(h5) *для любого счетного вполне упорядоченного некомпактного подмножества* C *в* E *выполнено* $\alpha(A(C)) < \alpha(C)$, *где* $\alpha(\cdot)$ *— мера некомпактности Куратовского.*

Тогда A *имеет максимальную и минимальную неподвижные точки.*

Если E — банахово пространство с порядком, определяемым конусом P в E, то положим $p = I$ (I — тождественный оператор).

Следствие 2. *Пусть* P *— нормальный конус и выполнены условия* (h1) *и* (h2). *Пусть, кроме того, выполнено одно из следующих условий:*

(h6) $A(E)$ *слабо относительно компактно;*

(h7) *если* $C \subset E$ *счетно, вполне упорядочено и* $C \subset \mathrm{cl}(\{u_0\} \cup A(C))$, *то* C *слабо относительно компактно.*

Тогда A *имеет максимальную и минимальную неподвижные точки.*

3. Существование максимального и минимального решений

В этом разделе E — банахово пространство с порядком «$\leq$» и p — тождественный оператор на E. Докажем существование максимального и минимального решений краевой задачи для уравнения (3) четвертого порядка, используя теорему 2. Функцию $u \in C^3(J, E)$ назовем *решением задачи* (3), если $u^{(3)}$ абстрактно непрерывна и u удовлетворяет задаче (3) на J. Функцию $u^*(u_*)$ назовем *максимальным* (*минимальным*) *решением*, если $u^*(u_*)$ — решение задачи (3) и $u \leq u^*$ $(u \geq u_*)$ для любого решения u задачи (3).

Вначале отметим, что задача

$$x''(t) = u(t), \quad x(0) = \eta, \quad x(1) = \mu$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \eta + (\mu - \eta)t + \int_0^1 G(t, s)u(s)\, ds =: (Tu)(t);$$

$$G(t, s) = \begin{cases} (t-1)s, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (s-1)t, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

— функция Грина. Тем самым задача (3) эквивалентна следующему интегродифференциальному уравнению Хаммерштейна второго порядка:

$$u'' = f(t, Tu, u),\ 0 < t < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{10}$$

Кроме того, задача (10) эквивалентна равенству

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, Tu, u)\, ds, \tag{11}$$

характеризующему неподвижность точки.

Для удобства сформулируем несколько условий.

(H1) $f : J \times E \times E \to E$ — функция Каратеодори, т. е. $f(t, x, y)$ строго измерима относительно $t \in J$ при каждой фиксированной $(x, y) \in E \times E$ и непрерывна по $(x, y) \in E \times E$ при фиксированном $t \in J$.

(H2) Существует $u_0 \in C^4(J, E)$ такая, что либо

$$u_0^{(4)}(t) \geq f(t, u_0(t), u_0''(t)),\ 0 < t < 1; \quad u_0(0) \geq \eta,\ u_0(1) - u_0(0) \geq \mu - \eta;$$

$$u_0''(0) \geq 0, \quad u_0''(1) \geq 0,$$

либо

$$u_0^{(4)}(t) \leq f(t, u_0(t), u_0''(t)),\ 0 < t < 1; \quad u_0(0) \leq \eta,\ u_0(1) - u_0(0) \leq \mu - \eta,$$

$$u_0''(0) \leq 0, \quad u_0''(1) \leq 0.$$

(H3) $f(t, x, y)$ возрастает по x и убывает по y.

(H4) $|f(t, x, y)| \leq b(t)$ п. в. на J для всех $(x, y) \in E \times E$. Здесь $b(t) \in L^1(J, R_+)$.

(H5) Существует функция $\omega : J \times R_+ \times R_+ \to R_+$ такая, что при п. в. $t \in J$

$$\alpha(f(t, TM, M)) \leq \omega(t, T(\alpha(M)), \alpha(M))$$

для любого $M \subset C(J,E)$, удовлетворяющего неравенству $\sup\{|x(t)| : x \in M\} \le b(t)$ с функцией $b(t)$, задаваемой условием (H4). Кроме того, $\varphi = 0$ — единственное решение в $L(J, R_+)$ неравенства

$$\varphi(t) \le 2 \int\limits_0^1 \omega(s, T\varphi(s), \varphi(s))\, ds \quad \text{п. в.} \quad \text{на } J.$$

Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 3. *Пусть функция f удовлетворяет условиям* (H1)–(H5). *Тогда существуют максимальное и минимальное решения задачи* (3).

Доказательство. Пусть Au — выражение в правой части (11). Тогда A — отображение из E в себя. Для доказательства того, что задача (3) имеет максимальное и минимальное решения, применим теорему 2. Достаточно показать, что A удовлетворяет условиям (h1)–(h3).

Непрерывность A легко вытекает из (H1) и непрерывности T.

Из определения $G(t,s)$ следует, что $G(t,s) \le 0$. Отсюда T — убывающее отображение. Поэтому (H3) гарантирует, что $f(t, Tu_2, u_2) \le f(t, Tu_1, u_1)$ при $u_1 \le u_2$. Более того, из (11) вытекает, что A возрастает, т. е. $Au_1 \le Au_2$, как только $u_1 \le u_2$. Итак, (h1) выполнено.

Определим

$$v_0(t) = u_0(t) - \varepsilon_1 t - \varepsilon_2$$

с $\varepsilon_1 = [u_0(1) - u_0(0)] - (\mu - \eta)$, $\varepsilon_2 = u_0(0) - \eta$. Тогда $v_0 \le u_0$, $v_0(0) = \eta$, $v_0(1) = \mu$. Пусть $w_0(t) = v_0''(t)$. Тогда $v_0(t) = (Tw_0)(t)$ для $0 \le t \le 1$. Не уменьшая общности, можем считать, что выполнено первое неравенство в (H2), которое вместе с (H3) дает

$$w_0''(t) \ge f(t, Tw_0(t), w_0(t)),\ 0 \le t \le 1, \quad w_0(0) \ge 0,\ w_0(1) \ge 0.$$

Из $G(t,s) \le 0$ вытекает, что

$$G(s,t) w_0''(t) \le G(s,t) f(t, Tw_0(t), w_0(t)),\ 0 \le t \le 1, \quad w_0(0) \ge 0,\ w_0(1) \ge 0.$$

Интегрируя предыдущее неравенство по s от 0 до 1, получим

$$w_0(t) \le (Aw_0)(t) \quad \text{для любого } t \in [0,1].$$

Это показывает, что (h2) выполнено.

Наконец, проверим условие (h3). Пусть $C = \{x_n\}$ счетно, вполне упорядочено и удовлетворяет соотношению $C \subset \mathrm{cl}(\{w_0\} \cup A(C))$. Докажем, что C относительно компактно. Определим множество $V = \{v_n : n \ge 1\} \subset A(C)$, где

$$v_n = Ax_n = \int\limits_0^1 G(s,t) f(s, Tx_n(s), x_n(s))\, ds$$

для каждого $x_n \in C$ и $n = 1, 2, \dots$. Тогда $C \subset \mathrm{cl}(\{w_0\} \subset V)$. Из (H4) вытекает, что

$$|v_n(t)| \le \int\limits_0^1 |G(t,s)||f(s, Tx_n(s), x_n(s))|\, ds \le \int\limits_0^1 |G(s,t)| b(s)\, ds =: a(t)$$

для всех $n \geq 1$. Очевидно, что $a(t) \in L(J, R_+)$. Так как $C \subset \mathrm{cl}(\{w_0\} \subset V)$, предыдущее соотношение выполнено также для произвольной $x_n \in C$ вместо v_n. Из (H1) легко следует, что $\alpha(\{f(t, Tx_n, x_n) : n \geq 1\}) \in L(J, R_+)$ и ввиду [13] имеем

$$\alpha(V(t)) \leq 2 \int_0^1 |G(s,t)| \alpha(f(s, TC(s), C(s)))\, ds \leq 2 \int_0^1 \alpha(f(s, TC(s), C(s)))\, ds.$$

Поэтому

$$\alpha(C(t)) \leq \alpha(V(t)) \leq 2 \int_0^1 \alpha(f(s, TC(s), C(s)))\, ds.$$

В то же время (H5) показывает, что

$$\alpha(f(s, TC(s), C(s))) \leq \omega(s, T(\alpha(C(s))), \alpha(C(s))).$$

Отсюда

$$\alpha(C(t)) \leq 2 \int_0^1 \omega(s, T(\alpha(C(s))), \alpha(C(s)))\, ds.$$

Снова ввиду (H5) получаем, что $\alpha(C(t)) = 0$ для п. в. $t \in J$. Следовательно, $C(t)$ относительно компактно для почти всех $t \in J$.

Докажем, что множество C эквинепрерывно в $C(J, E)$. Действительно, для любых $t_1, t_2 \in J$ с $t_1 < t_2$ и $v_n \in V$ из (H4) вытекает, что

$$\begin{aligned} &|v_n(t_2) - v_n(t_1)| \\ &\quad = \left| \int_0^1 G(s, t_2) f(s, Tx_n(s), x_n(s))\, ds - \int_0^1 G(s, t_1) f(s, Tx_n(s), x_n(s))\, ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |G(s,t_2) - G(s,t_1)| |f(s, Tx_n(s), x_n(s))|\, ds \leq \int_0^1 |G(s,t_2) - G(s,t_1)| |b(s)|\, ds. \end{aligned}$$

Это неравенство останется верным, если вместо v_n взять $x_n \in C$ для $n \geq 1$. Следовательно, C эквинепрерывно. По теореме Арцела — Асколи получаем, что C относительно компактно. Значит, (h3) выполнено.

Подводя итоги, видим, что согласно теореме 2 оператор A имеет максимальную и минимальную неподвижные точки, являющиеся, очевидно, максимальным и минимальным решениями задачи (3). Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть f — вполне непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям* (H2)–(H4). *Тогда задача* (3) *имеет максимальное и минимальное решения.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (H2)–(H5) *в теореме* 3. *Пусть, кроме того, для любых $x, y \in E$ выполнено условие:*

(H6) $|f(t, y, y'') - f(t, x, x'')| \leq q(t)|y - x|$, *где $q \in L(J, R_+)$ такова, что* $\int_0^1 |G(s,t)| q(s) ds < 1$.

Тогда задача (3) *имеет единственное решение на* J.

Доказательство. Теорема 3 гарантирует наличие максимального и минимального решений задачи (3), обозначим их через $u^*(t)$, $u_*(t)$ соответственно. Очевидно, что $u^*(t)$ и $u_*(t)$ суть решения задачи (10). Покажем, что $u^*(t)$ совпадает с $u_*(t)$. Предполагая, что это не так, согласно (11) и (H6) имеем

$$|u^*(t) - u_*(t)| \le \int_0^1 |G(s,t)||f(s, Tu^*(s), u^*(s)) - f(s, Tu_*(s), u_*(s))|\,ds$$

$$\le \int_0^1 |G(s,t)|q(s)|u^*(s) - u_*(s)|\,ds \le |u^* - u_*|_0 \int_0^1 |G(s,t)|q(s)ds < |u^* - u_*|_0$$

для всех $t \in J$. Тогда

$$|u^* - u_*|_0 < |u^* - u_*|_0;$$

противоречие. Значит, u^* должно совпадать с u_*. Так как u^*, u_* соответственно максимальное и минимальное решения задачи (3), эта задача имеет единственное решение.

Пример 1. Краевая задача

$$u^{(4)}(t) = e^{-u''(t)} + \operatorname{arctg} u(t) - \ln(t+1) - 1, \quad u(0) = 1,\ u(1) = 2,\ u''(0) = u''(1) = 0.$$

где $u \in C(J,R)$, имеет максимальное и минимальное решения на J.

Легко проверить, что в задаче примера 1 выполнены условия теоремы 3.

Пример 2. Краевая задача для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$u_n^{(4)}(t) = g(t)\left(u_{2n}(t) + \int_0^t u_n(s)ds\right) + h(t),$$

$$u_n(0) = a_n, \quad u_n(1) = b_n, \quad u''(0) = u''(1) = 0,$$

где $g, h \in L(J,R)$ таковы, что $|g(t)| \le 1/2$, $h(t) \ge 0$, и $u_n \in C(J,R) \cap D$, $D \subset E$ — ограниченное замкнутое множество, $a_n \ge 0$ и $b_n \le a_n$ для $n = 1, 2, \dots$, имеет единственное решение на J.

Нетрудно проверить, что в задаче примера 2 выполнены условия теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aftabizadeh A. R.* Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 116. P. 415–426.
2. *Gupta C. P.* Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation // Appl. Anal. 1988. V. 26, N 4. P. 289–304.
3. *Del Pino M. A., Manásevich R. F.* Existence for a fourth-order boundary value problem under a two parameter nonresonance condition // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 122, N 1. P. 81–86.
4. *Cabada A.* The method of lower and upper solutions for second, third, fourth and higher order boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 185, N 2. P. 302–320.
5. *De Coster C., Sanchez L.* Upper and lower solutions, Ambrosetti-Prodi problem and positive solutions for fourth order O.D.E. // Riv. Mat. Pura Appl. 1994. V. 14. P. 57–82.
6. *Korman P.* A maximum principle for fourth-order ordinary differential equations // Appl. Anal. 1989. V. 33, N 3/4. P. 267–273.

7. *Ma R. Y., Zhang J. H., Fu S. M.* The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 215, N 2. P. 415–422.
8. *Bai Z. B.* The method of lower and upper solutions for a bending of an elastic beam equation // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 248, N 1. P. 195–202.
9. *Mönch H.* Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces // Nonlinear Anal. 1980. V. 4. P. 985–999.
10. *Wang J.* Fixed points of increasing operators in ordered Banach spaces // Acta Math. Sinica. 2000. V. 43, N 1. P. 43–48.
11. *Hong S. H.* Fixed points of discontinuous multivalued increasing operators in Banach spaces with applications // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 282, N 1. P. 151–162.
12. *Heikkilä S.* New iterative methods to solve equations and systems in ordered spaces // Nonlinear Anal. 2002. V. 51. P. 1233–1244.
13. *Heinz H. P.* On the behaviour of measures of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions // Nonlinear Anal. 1983. V. 7. P. 1351–1371.

Статья поступила 4 июля 2005 г., окончательный вариант — 3 апреля 2006 г.

Shihuang Hong, Suying Xie, Chunguo Zhang, Zerong He
Institute of Applied Mathematics and Engineering Computations,
Hangzhou Dianzi University,
Hangzhou, 310018, People's Republic of China
hongshh@hotmail.com