Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 517.518.362

О РЯДАХ ФУРЬЕ — УОЛША ФУНКЦИЙ, АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ В ОБОБЩЕННОМ УЗКОМ СМЫСЛЕ

С. Ф. Лукомский

Аннотация: Рассматриваются вопросы сходимости рядов Фурье — Уолша функций с интегрируемой в смысле Данжуа производной в пространствах Лоренца. Доказано, что условие на функцию f, при котором ее ряд Фурье — Уолша сходится в пространствах Лоренца, «достаточно близких» к L_∞, нельзя выразить в терминах роста производной f'.

Ключевые слова: ряд Фурье — Уолша, сходимость, пространство Лоренца, интеграл Данжуа.

Хорошо известно [1, с. 54], что если f абсолютно непрерывна на $[0,1]$, то ее ряд Фурье — Уолша сходится равномерно. Нас будет интересовать вопрос, как меняется сходимость ряда Фурье — Уолша при ослаблении условия абсолютной непрерывности. Мы покажем, что если функция $\psi(t)$, определяющая пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \psi(t)\log\frac{2}{t}\,dt = +\infty, \tag{1}$$

то существует непрерывная функция f, абсолютно непрерывная в обобщенном узком смысле, ряд Фурье — Уолша которой не сходится в пространстве $\Lambda(\psi)$.

Более того, для всякой положительной возрастающей на $[0,1]$ функции φ, удовлетворяющей условию $\varphi(t) = o(t)$ $(t\to\infty)$, функцию f можно выбрать так, что ее производная f' принадлежит классу $\varphi(L)$, т. е. $\int_0^1 \varphi(|f'(x)|)\,dx < \infty$.

1. Основные понятия и формулировки основных результатов. Функции Уолша $w_n(t)$ $(n = 0,1,\dots)$ будем считать определенными на $[0,1)$, как в [1], и продолженными по непрерывности в точку $t = 1$. Если $f \in L[0,1]$, то для частичных сумм

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_k(x)$$

ее ряда Фурье — Уолша справедливо представление

$$S_n(f,x) = \int_0^1 f(x\oplus t)D_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t)D_n(x\oplus t)\,dt,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00390).

где

$$D_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1} w_k(t)$$

— ядро Дирихле, а $x\oplus t$ обозначает покоординатное сложение по mod 2, перенесенное на полуинтервал $[0,1)$, как в [1, с. 17]. Функцию $D_n^*(t)=D_n(t)w_n(t)$ называют *модифицированным ядром Дирихле.* Если натуральное n имеет представление

$$n=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=n_{2j-1}-1}^{n_{2j}} 2^k \quad (n_1>n_2>\dots>n_{2s}\geq 0),$$

то модифицированное ядро можно записать в виде [1, с. 120]

$$D_n^*(t)=\sum_{k=1}^{2s}(-1)^{k+1}D_{2^{n_k}}(t).$$

Символом $\Delta_x^{(k)}$ будем обозначать тот из промежутков $\left[\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right)$, который содержит точку x.

Мы будем рассматривать пространства Лоренца [2, с. 145; 3, с. 142]

$$\Lambda(\psi)=\left\{f\in L(0,1):\ \|f\|_{\Lambda(\psi)}\overset{df}{=}\int\limits_0^1 f^*(t)\psi(t)\,dt<+\infty\right\},$$

где непрерывная положительная убывающая на $(0,1]$ функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{t\to 0+0}\psi(t)=\infty,\qquad \int\limits_0^1\psi(t)\,dt<+\infty.$$

Такую функцию будем называть *функцией Лоренца.* При этих условиях на функцию ψ пространство $\Lambda(\psi)$ будет симметрическим сепарабельным пространством [2, с. 150], $f^*(t)$ в определении $\Lambda(\psi)$ — убывающая перестановка функции $|f(t)|$.

Напомним понятия из [4, с. 90; 5, с. 333], приводящие к обобщенно абсолютно непрерывным функциям.

Пусть f определена на отрезке $[a,b]$ и $\omega(f,E)=\sup\limits_{x,y\in E}|f(x)-f(y)|$ — есть колебание функции f на множестве $E\subset[a,b]$. Функцию f называют *абсолютно непрерывной на* $E\subset[a,b]$ *в узком смысле*, короче $f\in AC_*(E)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого конечного набора дизъюнктных интервалов $(a_j,b_j)_{j=1}^m$, для которых $a_j,b_j\in E$ и $\sum\limits_{j=1}^m|b_j-a_j|<\delta$, выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^m\omega(f,[a_j,b_j])<\varepsilon.$$

Отметим, что при определении класса $AC_*(E)$ используются значения функции не только в точках множества E.

Наконец, функцию f называют *обобщенно абсолютно непрерывной в узком смысле на* E, короче $f\in ACG_*(E)$, если сужение $f|_E$ есть непрерывная на E

функция и существует представление $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ такое, что $f \in AC_*(E_j)$ при всех $j \in \mathbb{N}$.

Понятие обобщенно абсолютно непрерывной в узком смысле функции приводит к узкому интегралу Данжуа [4, с. 108; 5, с. 348]. Функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называют *интегрируемой в смысле Данжуа*, если существует функция $F \in ACG_*([a, b])$ такая, что $F' = f$ п. в. на $[a, b]$. Число

$$(D)\int\limits_a^b f \overset{df}{=} F(b) - F(a)$$

называют *узким интегралом Данжуа*. Множество функций, интегрируемых на $[a, b]$ в узком смысле Данжуа, обозначают через $D([a, b])$.

Таким образом, если $F \in ACG_*([a, b])$, то $F' \in D([a, b])$. Если $F' \in L([a, b])$, то $F \in AC([a, b])$, но условия $F' \in \varphi(L)$ ($\varphi(t) = o(t)$ при $t \to \infty$) недостаточно для абсолютной непрерывности F.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Если функция Лоренца ψ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^1 \log\frac{2}{t}\psi(t)\,dt < +\infty, \tag{2}$$

то ряд Фурье — Уолша любой ограниченной функции сходится к f по норме пространства $\Lambda(\psi)$.

Теорема 2. *Пусть ψ — функция Лоренца с условием (1) и φ — положительная возрастающая функция, для которой $\varphi(t) = o(t)$ $(t \to \infty)$. Тогда существует функция $f \in ACG_*([0, 1])$, дифференцируемая всюду, кроме одной точки, производная которой принадлежит классу $\varphi(L)$, и ряд Фурье — Уолша функции f не сходится в пространстве Лоренца $\Lambda(\psi)$.*

2. Доказательство основных результатов.

Лемма. *Пусть $p_1 < p_2 < \cdots < p_{k+1}$ — натуральные числа и $Q(x)$ — многочлен степени не выше k. Тогда для любого двоичного интервала $\Delta_i^{(p_1)}$ ранга p_1*

$$\int\limits_{\Delta_i^{(p_1)}} r_{p_1}(x) r_{p_2}(x) \ldots r_{p_{k+1}}(x) Q(x)\,dx = 0.$$

Доказательство. Так как $r_{p_1}(x)$ принимает значение $+1$ на $\Delta_{2i}^{(p_1+1)}$ и -1 на $\Delta_{2i+1}^{(p_1+1)}$, то

$$I = \int\limits_{\Delta_i^{(p_1)}} r_{p_1}(x) r_{p_2}(x) \ldots r_{p_{k+1}}(x) Q(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{\Delta_{2i}^{(p_1+1)}} r_{p_2}(x) \ldots r_{p_{k+1}}(x) Q(x)\,dx - \int\limits_{\Delta_{2i+1}^{(p_1+1)}} r_{p_2}(x) \ldots r_{p_{k+1}}(x) Q(x)\,dx.$$

Производя во втором интеграле замену $x_1 = x - \frac{1}{2^{p_1+1}}$, получаем равенство

$$I = \int\limits_{\Delta_{2i}^{(p_1+1)}} r_{p_2}(x)\dots r_{p_{k+1}}(x)\left(Q(x) - Q\left(x + \frac{1}{2^{p_1+1}}\right)\right)dx$$

$$= \int\limits_{\Delta_{2i}^{(p_1+1)}} r_{p_2}(x)\dots r_{p_{k+1}}(x)\Delta_{2^{-p_1-1}}Q(x)\,dx.$$

Последний интеграл можно записать как сумму интегралов по интервалам ранга p_2 (если $p_1 + 1 < p_2$):

$$I = \sum_j \int\limits_{\Delta_j^{(p_2)}} r_{p_2}(x)\dots r_{p_{k+1}}(x)\Delta_{2^{-p_1-1}}Q(x)\,dx.$$

Производя те же действия с внутренним интегралом k раз, получаем

$$I = \sum_j \int\limits_{\Delta_j^{(p_{k+1})}} r_{p_{k+1}}(x)\Delta_{2^{-p_k-1}}\Delta_{2^{-p_{k-1}-1}}\dots\Delta_{2^{-p_1-1}}Q(x)\,dx$$

$$= \sum_j \int\limits_{\Delta_{2j}^{(p_{k+1}+1)}} \Delta_{\frac{1}{2^{p_{k+1}+1}}}\Delta_{\frac{1}{2^{p_k+1}}}\dots\Delta_{\frac{1}{2^{p_1+1}}}Q(x)\,dx.$$

Но $(k+1)$-я разность от многочлена степени k равна нулю, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для функции $f \in \bigcup\limits_{p>1} L_p(0,1)$ определим «норму» $|||f|||_{\Lambda(\psi)}$ равенством

$$|||f|||_{\Lambda(\psi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|f\|_n}{2^n}\psi\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Покажем, что

$$\|f\|_{\Lambda(\psi)} \le 4|||f|||_{\Lambda(\psi)}.$$

В самом деле,

$$\|f\|_n = \left(\int\limits_0^1 (f^*(t))^n\,dt\right)^{1/n} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} (f^*(t))^n\,dt\right)^{1/n}$$

$$\ge \left(\int\limits_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} (f^*(t))^n\,dt\right)^{1/n} \ge \frac{1}{4}f^*\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Поэтому

$$\|f\|_{\Lambda(\psi)} = \int\limits_0^1 \psi(t)f^*(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{2^{-n-1}}^{2^{-n}}\psi(t)f^*(t)\,dt$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\psi(2^{-n})f^*(2^{-n})2^{-n} \le 4\sum_{n=1}^{\infty}\psi(2^{-n})\frac{\|f\|_n}{2^n} = 4|||f|||_{\Lambda(\psi)}.$$

Учитывая это, а также неравенство [6, с. 103]

$$\|S_m(f)\|_q \le Cq\|f\|_q \quad (q \ge 2), \tag{3}$$

где $C > 0$ — абсолютная константа, для ограниченной функции f ввиду (2) имеем неравенство

$$\begin{aligned}\|S_n(f)\|_{\Lambda(\psi)} &\le 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|S_m(f)\|_n}{2^n}\psi(2^{-n}) \le 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|S_m(f)\|_{n+1}}{2^n}\psi(2^{-n})\\ &\le 4C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\|f\|_{n+1}}{2^n}\psi(2^{-n}) \le 8C\|f\|_M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\psi(2^{-n})\\ &\le 8C\|f\|_M\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}}\log\frac{2}{t}\psi(t)\,dt = 8C\|f\|_M\int_0^1\log\frac{2}{t}\psi(t)\,dt \le C_1\|f\|_M.\end{aligned}$$

Символом $\|f\|_M$ здесь обозначена норма в пространстве ограниченных функций. Отсюда стандартным способом получается утверждение теоремы.

Замечание. Неравенство (3) в [6] записано в виде

$$\|S_m(f)\|_q \le C_q\|f\|_q \quad (q > 1).$$

Однако из доказательства этого неравенства в [6] видно, что через C_q там обозначено число $C\frac{q^2}{q-1}$, откуда и следует неравенство (3) при $q \ge 2$.

Доказательство теоремы 2 проведем в два этапа. Вначале построим ступенчатую ограниченную функцию, ряд Фурье которой расходится в пространстве $\Lambda(\psi)$, а затем изменим ее на множестве малой меры.

Пусть $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ — произвольная пока числовая последовательность такая, что $|\lambda_k| \downarrow 0$. Определим функцию $F(x)$ на $(0,1]$ равенствами

$$F(x) = \lambda_k \quad \text{при } x \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right] \ (k = 0, 1, \dots).$$

Пусть $(k_n)_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность четных чисел такая, что

$$k_0 = 0,\ k_1 = 2,\ k_{n+1} \ge 4k_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Функцию $f(x)$ определим равенствами

$$f(x) = r_{k_n}(x) r_{k_n+2}(x)\dots r_{k_{n+1}}(x)F(x) \quad (x \in (2^{-k_{n+1}}, 2^{-k_n}]).$$

Покажем, что λ_k и k_n можно выбрать так, чтобы

$$\|S_m(f,x)\|_{\Lambda(\psi)} \to +\infty \quad \text{при } m = 2^{k_n} + 2^{k_n+2} + \dots + 2^{k_{n+1}} \to +\infty. \tag{4}$$

Так как

$$D_m^*(t) = w_m(t)D_m(t) = \sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}+1}(-1)^{\nu+1}D_{2^\nu}(t),$$

то

$$D_m(t) = w_m(t)\sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}+1}(-1)^{\nu+1}D_{2^\nu}(t)$$

и поэтому

$$S_m(f,x)=\int\limits_0^1 D_m(x\oplus t)f(t)\,dt=w_m(x)\sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}+1}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{|\Delta_x^{(\nu)}|}\int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)f(t)\,dt.$$

Найдем оценку для $|S_m(f,x)|$ снизу. Рассмотрим несколько возможностей.

1. Пусть $x\in(2^{-j-1},2^{-j})\subset(2^{-k_{n+1}},2^{-k_n})$. Запишем $S_m(f,x)$ в виде

$$S_m(f,x)=w_m(x)\sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)f(t)\,dt$$
$$+\,w_m(x)\sum_{\nu=j+1}^{k_{n+1}+1}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)f(t)\,dt=(\Sigma_1+\Sigma_2)w_m(x).$$

Так как в Σ_1 будет $\Delta_x^{(\nu)}=\Delta_0^{(\nu)}$, то

$$\Sigma_1=\sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\int\limits_{\Delta_0^{(\nu)}} w_m(t)f(t)\,dt$$
$$=\sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\left(\sum_{q=1}^{\infty}\int\limits_{2^{-k_{n+q+1}}}^{2^{-k_{n+q}}} w_m(t)f(t)\,dt+\int\limits_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-\nu}}F(t)\,dt\right).$$

На каждом интервале $(2^{-k_{n+q+1}},2^{-k_{n+q}})$ при $q\geq 1$ функции $w_m(t)$ постоянны, поэтому для всех $q\geq 1$

$$\int\limits_{2^{-k_{n+q+1}}}^{2^{-k_{n+q}}} w_m(t)f(t)\,dt=0,$$

значит,

$$\Sigma_1=\sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\int\limits_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-\nu}}F(t)\,dt=\sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\left(\sum_{l=\nu}^{k_{n+1}-1}\int\limits_{2^{-l-1}}^{2^{-l}}F(t)\,dt\right)$$
$$=\sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\sum_{l=\nu}^{k_{n+1}-1}\frac{1}{2^l}\lambda_l.$$

Положим теперь $\lambda_l=|\lambda_l|\cdot(-1)^{l+1}$. Так как $|\lambda_l|$ убывает, то

$$\frac{|\lambda_\nu|}{2^{\nu+1}}\leq\left|\sum_{l=\nu}^{k_{n+1}-1}\frac{1}{2^l}\lambda_l\right|\leq\frac{|\lambda_\nu|}{2^{\nu}}$$

и

$$\operatorname{sign}\left(\sum_{l=\nu}^{k_{n+1}-1}\frac{1}{2^l}\lambda_l\right)=\operatorname{sign}\lambda_\nu=(-1)^{\nu+1}.$$

Но тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=k_n}^{j}|\lambda_\nu| \le |w_m(x)\Sigma_1| \le \sum_{\nu=k_n}^{j}|\lambda_\nu|. \tag{5}$$

Оценим Σ_2. Так как $x \in (2^{-j-1}, 2^{-j}) \subset (2^{-k_{n+1}}, 2^{-k_n})$, то в сумме Σ_2 будет $w_m(t)f(t) = F(x) = \lambda_j$ и поэтому

$$\Sigma_2 = \sum_{\nu=j+1}^{k_{n+1}+1}(-1)^{\nu+1}\lambda_j = \begin{cases} \lambda_j, & \text{если } j \text{ четное,} \\ 0, & \text{если } j \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Соединяя с (5), при $x \in \left(\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j}\right)$ и $j \ge k_n + 2$ имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=k_n}^{j-2}|\lambda_\nu| \le \frac{1}{2}\sum_{\nu=k_n}^{j}|\lambda_\nu| - |\lambda_j| \le |w_m(x)(\Sigma_1 + \Sigma_2)| \le 2\sum_{\nu=k_n}^{j}|\lambda_\nu|.$$

2. Пусть теперь

$$x \in (2^{-j-1}, 2^{-j}) \subset (2^{-k_{n-q}}, 2^{-k_{n-q-1}}) \quad (q = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Напомним, что m и k_n связаны соотношениями (4). В этом случае снова записываем $S_m(f, x)$ в виде

$$S_m(f, x) = \left(\sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}+1}(-1)^{\nu+1}2^\nu \int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)f(t)\,dt\right)w_m(x). \tag{7}$$

Из (6) следует, что $\Delta_x^{(\nu)} \subset (2^{-k_{n-q}}, 2^{-k_{n-q-1}})$. А так как w_m содержит в качестве множителя $r_{k_{n+1}}(t)$, то в сумме (7) остается одно слагаемое при $\nu = k_{n+1} + 1$ и поэтому $|S_m(f, x)| = |\lambda_j|$.

3. Пусть

$$x \in (2^{-j-1}, 2^{-j}) \subset (2^{-k_{n+q+1}}, 2^{k_{n+q}}) \quad (q = 1, 2, \ldots;\ j \ne 2^{k_{n+1}}).$$

Частичную сумму $S_m(f, x)$ записываем в виде

$$S_m(f, x) = w_m(x)(-1)^{k_{n+1}}2^{k_{n+1}+1} \int\limits_{\Delta_0^{(k_{n+1}+1)}} w_m(t)f(t)\,dt$$

$$+\, w_m(x)\sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}}(-1)^{\nu+1}2^\nu \left(\int\limits_0^{2^{-k_{n+1}}} w_m(t)f(t)\,dt + \int\limits_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-\nu}} w_m(t)f(t)\,dt\right). \tag{8}$$

Вычислим интегралы в (8). Во-первых, в силу определения функции $f(x)$

$$\int\limits_{\Delta_0^{(k_{n+1}+1)}} w_m(t)f(t)\,dt = 0. \tag{9}$$

Во-вторых,

$$\int\limits_0^{2^{-k_{n+1}}} w_m(t)f(t)\,dt = \int\limits_0^{2^{-k_{n+1}-1}} f(t)\,dt - \int\limits_{2^{-k_{n+1}-1}}^{2^{-k_{n+1}}} f(t)\,dt = 0 - 0 = 0 \tag{10}$$

по той же причине, что и в (9). В-третьих,

$$\int_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-\nu}} w_m(t)f(t)\,dt = \int_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-\nu}} F(t)\,dt = \sum_{i=\nu}^{k_{n+1}-1} \int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}} F(t)\,dt = \sum_{i=\nu}^{k_{n+1}-1} \lambda_i \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Так же, как и при получении неравенства (5), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{|\lambda_\nu|}{2^{\nu+1}} \le \sum_{i=\nu}^{k_{n+1}-1} \lambda_i \frac{1}{2^{i+1}} \le \frac{|\lambda_\nu|}{2^{\nu+1}} \tag{11}$$

и

$$\operatorname{sign}\left(\sum_{i=\nu}^{k_{n+1}-1} \lambda_i \frac{1}{2^{i+1}}\right) = \operatorname{sign}\lambda_\nu = (-1)^{\nu+1}. \tag{12}$$

Подставляя (9)–(12) в (8), получаем

$$|S_m(f,x)| \ge \frac{1}{4}\sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}} |\lambda_\nu|.$$

4. Остался последний случай $x \in (2^{-k_{n+1}-1}, 2^{-k_{n+1}})$, который рассматривается, как и предыдущий. Получаем оценку

$$|S_m(f,x)| \ge \frac{1}{4}\sum_{i=k_n}^{k_{n+1}} |\lambda_i|.$$

Соединяя полученные для $S_m(f,x)$ оценки, находим для перестановки $S_m^*(f,x)$ на $(0, \frac{1}{2^{k_n}})$ оценку

$$S_m^*(f,x) \ge \frac{1}{2}\sum_{\nu=k_n}^{j-2} |\lambda_\nu| \quad \text{при } x \in \left(\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j}\right) \subset \left(\frac{1}{2^{k_{n+1}}}, \frac{1}{2^{k_n}}\right),\ j \ge k_n+2,$$

$$S_m^*(f,x) \ge \frac{1}{8}\sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}} |\lambda_\nu| \quad \text{при } x \in \left(0, \frac{1}{2^{k_{n+1}}}\right). \tag{13}$$

Учитывая неравенства (13), находим

$$\int_0^1 S_m^*(f,x)\psi(x)\,dx \ge \frac{1}{2}\sum_{j=k_n+2}^{k_{n+1}-1} \int_{2^{-j-1}}^{2^{-j}} \sum_{\nu=k_n}^{j-2} |\lambda_\nu|\psi(x)\,dx.$$

Можно считать для простоты, что $|\lambda_j| = \mu_n$, если $k_n \le j \le k_{n+1}-1$. В этом случае

$$\int_0^1 S_m^*(f,x)\psi(x)\,dx \ge \frac{1}{2}\mu_n \sum_{j=k_n+2}^{k_{n+1}-1} \psi\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\frac{j-k_n-1}{2^{j+1}}$$

$$\ge \frac{\mu_n}{4}\sum_{j=2k_n+2}^{k_{n+1}-1} \psi\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\frac{j}{2^{j+1}}.$$

Из (1) следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi\left(\frac{1}{2^j}\right)\frac{j}{2^j} = +\infty,$$

и, значит, последовательность (k_n) можно выбрать растущей настолько быстро, а последовательность (μ_n) — убывающей к нулю настолько медленно, что $\|S_m(f)\|_{\Lambda(\psi)} \to +\infty$.

Исправим теперь функцию f так, чтобы она стала непрерывной на отрезке $[0,1]$ и дифференцируемой на $(0,1]$. Обозначим точки разрыва функции f через d_i $(i = 0, 1, \dots)$, выберем последовательность четных чисел (l_n) так, чтобы $l_n > 2k_{n+1} + 2$. Каждую точку разрыва d_i окружим окрестностью $(d_i - \delta_i', d_i + \delta_i'')$ следующим образом. Если $d_i \in (2^{-k_{n+1}}, 2^{-k_n})$, то положим $\delta_i' = \delta_i'' = 2^{-l_n}$. Если $d_i = 2^{-k_n}$, то положим $\delta_i' = 2^{-l_{n+1}}, \delta_i'' = 2^{-l_n}$. На каждом отрезке $[d_i - \delta_i', d_i + \delta_i'']$ заменим функцию $f(x)$ многочленом третьей степени $P(x)$ таким, что $f(x) = P(x)$ и $P'(x) = 0$ в граничных точках отрезка. Полученная функция $\tilde{f}(x)$ будет непрерывной на отрезке $[0,1]$ и дифференцируема в интервале $(0,1]$.

Покажем, что нормы $\|S_m(\tilde{f})\|_{\Lambda(\psi)}$ не ограничены. Для этого достаточно доказать, что нормы $\|S_m(f - \tilde{f})\|_{\Lambda(\psi)}$ ограничены. Докажем, что частичные суммы $S_m(f - \tilde{f})$ равномерно ограничены в совокупности на $(0,1)$.

Рассмотрим несколько возможностей.

1. Пусть вначале $x \in (2^{-j-1}, 2^{-j}) \subset (2^{-k_{n+1}}, 2^{-k_n})$. Частичную сумму $S_m(f - \tilde{f})$ запишем в виде

$$\begin{aligned} S_m(f-\tilde{f},x) &= w_m(x)\sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt \\ &\quad + w_m(x)\sum_{\nu=j+1}^{k_{n+1}+1}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt = w_m(x)(\Sigma_1^{\sim} + \Sigma_2^{\sim}). \end{aligned}$$

В $\Sigma_1^{\sim}$ имеем $\Delta_x^{(\nu)} = \Delta_0^{(\nu)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{\sim} &= \sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\int\limits_{\Delta_0^{(\nu)}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt \\ &= \sum_{\nu=k_n}^{j}(-1)^{\nu+1}2^{\nu}\left(\sum_{q=1}^{\infty}\int\limits_{2^{-k_{n+q+1}}}^{2^{-k_{n+q}}} w_m(t)(f-\tilde{f})dt + \int\limits_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-\nu}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Каждый интеграл в (14) достаточно оценить через произведение наибольшего значения $|f - \tilde{f}|$ на меру носителя:

$$\left|\int\limits_{2^{-k_{n+q+1}}}^{2^{-k_{n+q}}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt\right| \le 2\mu_{n+q}2^{-l_{n+q}}2^{k_{n+q+1}} \le \frac{\mu_{n+q}}{2}\frac{1}{2^{k_{n+q+1}}},$$

$$\left|\int\limits_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-\nu}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt\right| \le 2\mu_n 2^{-l_n}2^{k_{n+1}} \le \frac{\mu_n}{2}\frac{1}{2^{k_{n+1}}}.$$

Учитывая эти неравенства, из (14) получаем

$$|\Sigma_1^{\sim}| \le \sum_{\nu=k_n}^{j} 2^\nu \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mu_{n+q}}{2} 2^{-k_{n+q+1}}\right) \le \frac{\mu_n}{2} 2^{-k_{n+1}} \cdot 2^{k_{n+1}+1} \cdot 4 \le 4\mu_0.$$

Аналогично оценивается $\Sigma_2^{\sim}$:

$$|\Sigma_2^{\sim}| \le 2 \sum_{\nu=j+1}^{k_{n+1}+1} 2^\nu \mu_n \frac{2^{k_{n+1}}}{2^{l_n}} \le \frac{\mu_n}{2} \sum_{\nu=j+1}^{k_{n+1}+1} 2^\nu \frac{1}{2^{k_{n+1}}} \le 2\mu_0.$$

Таким образом, на $(2^{-k_{n+1}}, 2^{-k_n})$ имеем оценку $|S_m(f-\tilde f, x)| \le 6\mu_0$.

2. Пусть

$$x \in (2^{-j-1}, 2^{-j}) \subset (2^{-k_{n+q+1}}, 2^{-k_{n+q}}) \quad (q = 1, 2, \dots),\ j \ne k_{n+1}.$$

В этом случае $\Delta_x^{(\nu)} = \Delta_0^{(\nu)}$ при $\nu \in [k_n, k_{n+1}]$. Поэтому

$$|S_m(f-\tilde f, x)| \le \sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}} 2^\nu \int\limits_{\Delta_0^{(\nu)}} |f-\tilde f| dt + 2^{k_{n+1}+1} \int\limits_{\Delta_0^{(k_{n+1}+1)}} |f-\tilde f|\, dt. \tag{15}$$

Так как

$$\int\limits_{\Delta_0^{(\nu)}} |f-\tilde f|\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{2^{-k_{n+i+1}}}^{2^{-k_{n+i}}} |f-\tilde f|\, dt + \int\limits_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-\nu}} |f-\tilde f|)\, dt,$$

для первого слагаемого в (15) получим ту же оценку, что и для $\Sigma_1^{\sim}$, т. е.

$$\left|\sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}} (-1)^{\nu+1} 2^\nu \int\limits_{\Delta_0^{(\nu)}} (f-\tilde f) w_m(t)\, dt\right| \le 4\mu_0. \tag{16}$$

Для второго слагаемого в правой части (15) имеем

$$\begin{aligned} 2^{k_{n+1}+1} &\int\limits_{\Delta_0^{(k_{n+1}+1)}} |f-\tilde f|\, dt \\ &\le 2^{k_{n+1}+1} \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{2^{-k_{n+i+1}}}^{2^{-k_{n+i}}} |f-\tilde f|\, dt \le 2^{k_{n+1}+2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{n+i} \frac{2^{k_{n+i+1}}}{2^{l_{n+i}}} \\ &\le 2^{k_{n+1}+2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{n+i} \frac{2^{k_{n+i+1}}}{2^{2k_{n+i+1}+2}} \le 2^{k_{n+1}} \mu_{n+1} \frac{1}{2^{k_{n+2}}} \le \mu_0. \end{aligned} \tag{17}$$

3. Если $x \in (2^{-k_{n+1}-1}, 2^{-k_{n+1}})$, то

$$|S_m(f-\tilde f, x)| \le \sum_{\nu=k_n}^{k_{n+1}} 2^\nu \int\limits_{\Delta_0^{(\nu)}} |f-\tilde f|\, dt + 2^{k_{n+1}+1} \int\limits_{2^{-k_{n+1}-1}}^{2^{-k_{n+1}}} |f-\tilde f|\, dt.$$

Первая сумма в правой части оценивается, как в (16), через $2\mu_0$. Второе слагаемое оценивается, как в (17), через μ_0. Таким образом, для всех $x \in (0, 2^{-k_{n+1}})$ имеем $|S_m(f-\tilde{f}, x)| \le 5\mu_0$.

4. Пусть, наконец,

$$x \in (2^{-k_{n-p}}, 2^{-k_{n-p-1}}) \quad (p = 0, 1, \dots, n-1).$$

Сумму $S_m(f-\tilde{f}, x)$ запишем в виде

$$S_m(f-\tilde{f}, x) = w_m(x)\Bigg(\sum_{\nu=k_n}^{l_{n-p}} (-1)^\nu 2^\nu \int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt + \sum_{\nu=l_{n-p}+1}^{k_{n+1}+1} (-1)^\nu 2^\nu \int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt\Bigg) = w_m(t)(\Sigma_3^{\sim} + \Sigma_4^{\sim}). \quad (18)$$

Отметим, что возможна ситуация, когда в $\Sigma_3^{\sim}$ нет ни одного слагаемого. В этом случае в $\Sigma_4^{\sim}$ суммирование начинается с $\nu = k_n$.

Очевидно, что последовательность (l_n) можно выбрать так, чтобы ее члены не попадали в отрезки $[k_i - 4, k_i]$. Покажем, что в этом случае в сумме $\Sigma_3^{\sim}$ все слагаемые равны нулю.

Каждый интеграл $\int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt$ запишем как сумму интегралов по интервалам $\Delta^{(l_{n-p})}$ ранга l_{n-p}. На каждом таком интервале $\Delta^{(l_{n-p})}$ либо $f-\tilde{f} \equiv 0$, либо $f-\tilde{f}$ — многочлен третьей степени. Пусть $\Delta_i^{(l_{n-p})}$ — один из интервалов, на котором $f-\tilde{f}$ — многочлен третьей степени. Функции $r_{k_n}(t), \dots, r_{l_{n-p}-2}(t)$ постоянны на $\Delta_i^{(l_{n-p})}$. Обозначая через $r_{k_n}, \dots, r_{l_{n-p}-2}$ их значения на $\Delta_i^{(l_{n-p})}$, имеем

$$\int\limits_{\Delta_i^{(l_{n-p})}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt = r_{k_n} \dots r_{l_{n-p}-2} \int\limits_{\Delta_i^{(l_{n-p})}} r_{l_{n-p}}(t) \dots r_{k_{n+1}}(t)(f-\tilde{f})\,dt.$$

Но последний интеграл согласно лемме равен нулю, ибо $l_{n-p} < k_{n+1} - 4$.

В сумме $\Sigma_4^{\sim}$ согласно лемме

$$\int\limits_{\Delta_x^{(\nu)}} w_m(t)(f-\tilde{f})\,dt = 0,$$

если $\nu < k_{n+1} - 4$, т. е. в сумме $\Sigma_4^{\sim}$ не более пяти отличных от нуля слагаемых. Итак,

$$|S_m(f-\tilde{f}, x)| \le \sum_{\nu=k_{n+1}-4}^{k_{n+1}+1} 2^\nu \int\limits_{\Delta_x^\nu} |f-\tilde{f}|\,dt \le 5\mu_0.$$

Соединяя рассмотренные случаи, имеем $|S_m(f-\tilde{f}, x)| \le 6\mu_0$. Неограниченность последовательности $\|S_m(\tilde{f}, x)\|_{\Lambda(\psi)}$ доказана.

Пусть теперь функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ заданы. Покажем, что, выбирая последовательность (l_n) растущей достаточно быстро, можно добиться, чтобы интеграл

$$\int\limits_0^1 \varphi(|\tilde{f}'(x)|)\,dx$$

сходился.

Нетрудно проверить, что функция $\tilde{f}$ на отрезке $[2^{-k_{n+1}}, 2^{-k_n}]$ имеет производную, удовлетворяющую неравенству $|f'(x)| \le \frac{3}{2}\mu_n 2^{l_n}$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \varphi(|\tilde{f}'(x)|)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{2^{-k_{n+1}}}^{2^{-k_n}} \varphi(|\tilde{f}'(x)|)\,dx \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{3}{2}\mu_n 2^{l_n}\right)}{2^{l_n}} 2^{k_{n+1}-k_n+1}.$$

Поскольку $\varphi(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$, последовательность (l_n) можно выбрать так, чтобы ряд сходился. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема означает, что нельзя указать условие на функцию f в терминах роста ее производной f', при котором ряд Фурье — Уолша функции f сходится в пространстве Лоренца $\Lambda(\psi)$ с условием (1). Вопрос о том, каким должно быть это условие, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и приложения. М.: Наука, 1987.

2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

3. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II. Function spaces. Berlin: Springer-Verl., 1973.

4. *Gordon R. A.* The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.

5. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.

6. *Schipp F. Wade W. R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Akad. Kiado, 1990.

Статья поступила 22 ноября 2004 г., окончательный вариант — 29 июня 2005 г.

Лукомский Сергей Федорович
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
Астраханская, 83, Саратов 410012
LukomskiiSF@info.sgu.ru