Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 512.57

ВЛОЖЕНИЯ КВАЗИКЛЕТОК ИТЕРАТИВНЫХ АЛГЕБР

И. А. Мальцев

Аннотация: Изучается взаимосвязь между проективными и вполне ограниченными расширениями предитеративных алгебр. Доказывается, что каждое проективное расширение степени 1 квазиклетки алгебры $\mathcal{P}_k^*$ является максимальной подалгеброй вполне ограниченного расширения степени 1 этой же квазиклетки, а также, что проективное расширение квазиклетки всегда можно отделить от ее вполне ограниченного расширения в той же алгебре гипертождествами.

Ключевые слова: итеративная алгебра, клон, квазиклетка, многозначная логика, расширение итеративной алгебры.

1. Квазиклетки

1.1. *Предитеративной алгеброй Поста* называется алгебра

$$\mathcal{P}_A^* = \langle O_A; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle,$$

у которой основное множество O_A образовано всеми функциями, отображающими множество A в себя, и операции ζ, τ, Δ при $n > 1$ определены следующим образом:

$$(\zeta f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \quad (\tau f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Если функция f унарная, то $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$. Операция $*$ для n-арной функции f и m-арной функции g определена так:

$$(f * g)(x_1, \dots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}).$$

1.2. Если множество A содержит k элементов, то вместо $\mathcal{P}_A^*$ обычно пишут $\mathcal{P}_k^*$ и говорят, что указанная алгебра *имеет конечный ранг* k. Для упрощения выкладок в указанном случае будем считать, что A совпадает с множеством чисел $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

1.3. Подалгебры алгебры $\mathcal{P}_A^*$ называются *предитеративными алгебрами.*

1.4. *Клонами* называются предитеративные алгебры, содержащие все селекторы (проекции) $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

Иногда с целью получить клон селекторы вносят в сигнатуру предитеративной алгебры. Так как все селекторы можно получить операциями $\zeta, \tau, \Delta, *$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00270).

из единственной функции $e_2^2(x_1, x_2)$, именно ее можно выбрать в качестве нульарной сигнатурной операции. С такой точки зрения клон над множеством A — это алгебра $\langle F; e_2^2, \zeta, \tau, \Delta, *\rangle$ типа $(0, 1, 1, 1, 2)$, у которой $F \subseteq O_A$.

1.5. Пусть $D \subseteq A$, $D \neq \varnothing$. Алгебру $\mathcal{K}_D$, образованную всеми функциями из $\mathcal{P}_A^*$, значения которых принадлежат D, назовем *простой квазиклеткой* над множеством D; множество D назовем *определяющим* для $\mathcal{K}_D$. *Квазиклеткой* называется подалгебра алгебры $\mathcal{P}_A^*$, являющаяся объединением произвольного множества простых квазиклеток.

Нетрудно заметить, что любое объединение U простых квазиклеток $\mathcal{K}_{D_i} \leq \mathcal{P}_A^*$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{P}_A^*$. Каждая функция f из такого объединения принадлежит какой-то простой квазиклетке $\mathcal{K}_{D_j}$. Той же простой квазиклетке принадлежат функции, которые можно получить из f операциями ζ, τ, Δ. Для любой функции g из U функция $f * g$ принадлежит $\mathcal{K}_{D_j}$, а функция $g * f$ — той квазиклетке, из которой взята g.

1.6. Далее через $f \restriction B$ будет обозначаться ограничение функции f на множество B. Для произвольного множества M функций, принадлежащих P_A, через $M \restriction B$ будет обозначаться совокупность ограничений всех функций из M на множество B.

1.7. Обозначим через $\mathcal{A}(A)$ объединение множеств значений всех функций, принадлежащих подалгебре $\mathcal{A}$ предитеративной алгебры $\mathcal{P}_A^*$. Алгебру $\mathcal{A} \restriction \mathcal{A}(A)$ назовем *ядром алгебры* $\mathcal{A}$. Ядро алгебры $\mathcal{A}$ назовем *отделимым*, если оно не совпадает с $\mathcal{A}$, т. е. если $\mathcal{A}(A) \neq A$. Мощность множества $A \setminus \mathcal{A}(A)$ назовем *уровнем алгебры* $\mathcal{A}$.

1.8. Назовем *компонентой квазиклетки* $\mathcal{K}$ простую квазиклетку $\mathcal{K}_D$, содержащуюся в $\mathcal{K}$, но не содержащуюся ни в какой другой простой квазиклетке из $\mathcal{K}$. Совокупность всех определяющих множеств всех компонент квазиклетки $\mathcal{K}$ обозначим через $F_{\mathcal{K}}$.

Пример. Множество всех функций из P_3, значения которых принадлежат либо множеству $\{0, 1\}$, либо множеству $\{0, 2\}$, образует квазиклетку $\mathcal{K}$ алгебры $\mathcal{P}_3^*$. Квазиклетка $\mathcal{K}$ получается объединением простых квазиклеток $\mathcal{K}_{\{0,1\}}$ и $\mathcal{K}_{\{0,2\}}$, образованных функциями из P_3, значения которых принадлежат множествам $\{0, 1\}$ и $\{0, 2\}$ соответственно. В силу определения 1.8 квазиклетки $\mathcal{K}_{\{0,1\}}$ и $\mathcal{K}_{\{0,2\}}$ являются компонентами квазиклетки $\mathcal{K}$. Согласно 1.5 множества $\{0, 1\}$ и $\{0, 2\}$ будут для этих клеток определяющими, поэтому $F_{\mathcal{K}} = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}$. Квазиклетки $\mathcal{K}_{\{0,1\}}$ и $\mathcal{K}_{\{0,2\}}$ имеют отделимые ядра $\mathcal{P}_{\{0,1\}}^*$ и $\mathcal{P}_{\{0,2\}}^*$ соответственно, их уровни равны единице. Квазиклетка $\mathcal{K}$ имеет уровень 0, поскольку не обладает отделимым ядром. $\square$

2. Расширения итеративных алгебр

2.1. Пусть B — некоторое множество и A — его подмножество. Функцию φ, отображающую B на A и обладающую следующим свойством:

$$\forall x \in A \ \varphi(x) = x,$$

назовем *проекцией* множества B на A.

2.2. Рассмотрим некоторую подалгебру $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_A^*$. Пусть A — подмножество множества B и φ — проекция множества B на A. Каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{A}$ сопоставим функцию

$$f_\varphi(y_1, \ldots, y_n) = f(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_n)),$$

принадлежащую $\mathcal{P}_B^*$. Функцию f_φ назовем *φ-продолжением функции f*. Множество φ-продолжений всех функций из $\mathcal{A}$ назовем *проективным φ-расширением алгебры $\mathcal{A}$* на множество B.

2.3 [1]. *Любое проективное φ-расширение подалгебры $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_A^*$ на множество B является подалгеброй алгебры $\mathcal{P}_B^*$, изоморфной $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Обозначим проективное φ-расширение алгебры $\mathcal{A}$ на множество B через $\mathcal{A}_\varphi$. Очевидна замкнутость множества $\mathcal{A}_\varphi$ относительно операций ζ, τ, Δ, $*$.

Через ψ обозначим отображение, сопоставляющее каждой функции $f \in \mathcal{A}$ ее φ-продолжение f_φ. Из определения 2.2 следует, что две функции g_1, g_2 из $\mathcal{A}_\varphi$ различны тогда и только тогда, когда не совпадают функции $g_1 \restriction A$ и $g_2 \restriction A$. Это означает, что отображение ψ взаимно однозначное.

Докажем, что $\psi(\zeta f) = \zeta(\psi(f))$ для каждой функции $f \in \mathcal{A}$. Действительно, так как $\psi(g) = g_\varphi$ для каждой функции $g \in \mathcal{A}$, то

$$\begin{aligned}(\psi(\zeta f))(x_1,\dots,x_n) &= (\zeta f)_\varphi(x_1,\dots,x_n) = (\zeta f)(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n))\\ &= f(\varphi(x_n),\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_{n-1})) = f_\varphi(x_n,x_1,\dots,x_{n-1})\\ &= (\psi(f))(x_n,x_1,\dots,x_{n-1}) = (\zeta(\psi(f)))(x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$

Видим, что отображение ψ сохраняет операцию ζ. Аналогично доказывается, что оно сохраняет также операции τ и Δ.

Возьмем теперь в $\mathcal{A}$ функции f и g арности n и m соответственно и докажем, что $\psi(f*g) = \psi(f)*\psi(g)$. Так как функция φ на множестве A совпадает с тождественной функцией e_1^1 и все значения функции g принадлежат A, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}(\psi(f*g))(x_1,\dots,x_{n+m-1}) &= (f*g)_\varphi(x_1,\dots,x_{n+m-1})\\ &= (f*g)(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_{n+m-1}))\\ &= f(g(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_m)),\varphi(x_{m+1}),\dots,\varphi(x_{n+m-1}))\\ &= f(\varphi(g(\varphi(x_1)),\dots,\varphi(x_m)),\varphi(x_{m+1}),\dots,\varphi(x_{n+m-1}))\\ &= f_\varphi(g_\varphi(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{n+m-1}) = (f_\varphi * g_\varphi)(x_1,x_2,\dots,x_{n+m-1})\\ &= (\psi(f)*\psi(g))(x_1,x_2,\dots,x_{n+m-1}). \quad \square\end{aligned}$$

Пример. Алгебру $\mathcal{P}_2^*$ можно изоморфно вложить в $\mathcal{P}_4^*$, полагая $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$, $\varphi(1) = \varphi(3) = 1$. Алгебру $\mathcal{P}_2^*$ порождают функции $x\&y$ и $\neg x$. Функция $\neg x$ отобразится в функцию $g(x)$, определяемую следующим образом:

$$g(0) = g(2) = 1, \quad g(1) = g(3) = 0.$$

Образ $f(x,y)$ функции $x\&y$ задается следующей таблицей:

$y \setminus x$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	1	0	1

Каждая принадлежащая порождаемой подалгебре функция не различает элементы 2 и 0, а также элементы 3 и 1. $\square$

2.4. Принадлежащая предитеративной алгебре $\mathcal{A}$ функция $u(x)$ называется *единицей* этой алгебры, если

$$f(u(x_1),\dots,u(x_n)) = f(x_1,\dots,x_n) = u(f(x_1,\dots,x_n)) \tag{2.1}$$

для любой функции f из $\mathcal{A}$.

2.5. (1) *Предитеративная алгебра может содержать лишь одну единицу.*

(2) *Если подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_k^*$ содержит единицу $u(x)$, то эта единица проектирует множество E_k на множество $u(E_k)$.*

Доказательство. (1) Пусть u_1 и u_2 — две единицы, принадлежащие одной и той же предитеративной алгебре. Из 2.1 получаем следующие равенства:

$$u_1(x) = u_1(u_2(x)) = u_2(x).$$

(2) Для каждого $y \in u(E_k)$ в E_k есть такой элемент x, что $u(x) = y$. Из (2.1) следует равенство

$$u(y) = u(u(x)) = u(x) = y.$$

Видим, что функция $u(x)$ отображает множество E_k на $u(E_k)$, оставляя элементы из $u(E_k)$ неподвижными. $\square$

2.6. *Если подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_k^*$ содержит единицу $u(x)$, то она является проективным u-расширением алгебры $\mathcal{A} \upharpoonright U$, где U — множество значений функции $u(x)$, на множество E_k.*

Доказательство. Обозначим через f^r ограничение функции $f \in \mathcal{P}_k^*$ на множество U, а через $\mathcal{A}^r$ — совокупность ограничений всех функций из алгебры $\mathcal{A}$ на то же множество. Ввиду (2.1) любая функция g из $\mathcal{A}$ удовлетворяет равенству $u(g) = g$, поэтому все значения функции g принадлежат U. Это означает, что множеству U принадлежат значения всех функций из $\mathcal{A}$, тем самым множество $\mathcal{A}^r$ замкнуто относительно операций ζ, τ, Δ, $*$ и является подалгеброй алгебры $\mathcal{P}_U^*$.

Для любых $z_1,\dots,z_n \in U$ и любой функции $f \in \mathcal{A}$ верно равенство

$$f(z_1,\dots,z_n) = f^r(z_1,\dots,z_n).$$

Отсюда и из (2.1) получаем соотношения

$$f(y_1,\dots,y_n) = f(u(y_1),\dots,u(y_n)) = f^r(u(y_1),\dots,u(y_n)),$$

также справедливые для каждой функции $f \in \mathcal{A}$. В 2.5 показано, что функция u проектирует множество E_k на U. Это доказывает, что алгебра $\mathcal{A}$ является проективным u-расширением алгебры $\mathcal{A}^r$ на множество E_k. $\square$

2.7. Следствие. *Квазиклетка алгебры $\mathcal{P}_A^*$ не содержит единицы, если ее определяющее множество отлично от A и содержит более одного элемента.*

Доказательство. Если квазиклетке $\mathcal{K}$ принадлежит единица u и $u(A) = U$, то ввиду определения 1.5 $\mathcal{K}$ должна содержать все функции из P_A, у которых значения принадлежат U. Поскольку u — единица, множество значений любой функции $f \in \mathcal{K}$ является подмножеством множества U. Это означает, что квазиклетка $\mathcal{K}$ простая. Поскольку $\mathcal{K} \neq \mathcal{P}_A^*$, множество значений любой функции из $\mathcal{K}$ не совпадает с A, поэтому $U \neq A$.

Пусть $|U| > 1$, функция f принадлежит $\mathcal{K}$, элементы $c_1, \dots, c_n$ принадлежат A, но не все находятся в U, $f(c_1, \dots, c_n) = a$ и $b \in U$, $b \neq a$. Функция

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n), & \text{если } \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq U, \\ b, & \text{если } \{x_1, \dots, x_n\} \nsubseteq U, \end{cases}$$

принадлежит $\mathcal{K}$, так как множество ее значений является подмножеством множества U.

Согласно 2.6 из $u \in \mathcal{K}$ следует, что $\mathcal{K}$ является проективным u-расширением алгебры $\mathcal{K} \restriction U$. Это означает, что функции f и g для любых $x_1, \dots, x_n$ из A удовлетворяют равенствам

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(u(x_1), \dots, u(x_n)), \quad g(x_1, \dots, x_n) = g(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

Поскольку $\{u(x_1), \dots, u(x_n)\} \subseteq U$, то $g = f$. Однако

$$f(u(c_1), \dots, u(c_n)) = f(c_1, \dots, c_n) = a,$$

но $g(u(c_1), \dots, u(c_n)) = g(c_1, \dots, c_n) = b$, так как $\{c_1, \dots, c_n\} \nsubseteq U$. Видим, что функция $g \in \mathcal{K}$ не является проективным u-продолжением функции $g \restriction U$ на множество A. Это доказывает, что и $\mathcal{K}$ не является проективным u-расширением алгебры $\mathcal{K} \restriction U$, а потому не может содержать единицу. $\square$

2.8. Пусть $D \subseteq A$ и $\mathcal{B}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{P}_D^*$. Подалгебру алгебры $\mathcal{P}_A^*$, образованную всеми функциями f из P_A, обладающими следующими свойствами:

$$f \restriction D \in \mathcal{B}, \quad f(A) = f(D),$$

назовем *вполне ограниченным расширением алгебры* $\mathcal{B}$ *на множество* A.

Алгебра $\mathcal{A}$, о которой говорится в определении 2.8, получается следующим образом. Каждая функция h из $\mathcal{B}$ каким-то образом доопределяется на множестве A так, чтобы все значения полученной функции содержались в множестве значений функции h. Множество всех функций, полученных такими доопределениями, и образует алгебру $\mathcal{A}$.

Рассмотрим вполне ограниченные расширения квазиклеток алгебры $\mathcal{P}_k^*$, образованной всеми функциями, определенными на конечном множестве E_k.

2.9. Любые вполне ограниченные или проективные расширения квазиклетки алгебры $\mathcal{P}_k^*$ на множестве E_{k+m} назовем *расширениями степени* m.

2.10. *Каждое проективное расширение степени* 1 *квазиклетки* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}_k^*$ *на множестве* E_{k+1} *является максимальной подалгеброй вполне ограниченного расширения степени* 1 *той же квазиклетки на то же множество.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}_p$ — проективное и $\mathcal{A}_o$ — вполне ограниченное расширения квазиклетки $\mathcal{K}$ на множество E_{k+1}. Добавим к функциям из $\mathcal{A}_p$ принадлежащую $\mathcal{A}_o$ функцию $h \notin \mathcal{A}_p$ и докажем, что полученное множество порождает $\mathcal{A}_o$. Пусть

$$F_{\mathcal{K}} = \{M_1, \dots, M_s\}, \quad M = \bigcup_{i=1}^{s} M_i.$$

Для $s = 1$, $|M_1| \geq 2$ утверждение доказано Лау [2]. Рассмотрим случай $s > 1$. Все значения функции h принадлежат множеству $M_i \in F_{\mathcal{K}}$. Простая квазиклетка $\mathcal{K}_i$ с определяющим множеством M_i является компонентой квазиклетки $\mathcal{K}$.

Проективное расширение индуцируется некоторой функцией φ, проектирующей множество E_{k+1} на E_k. Обозначим через $\mathcal{K}_{ip}$ проективное φ-расширение квазиклетки $\mathcal{K}_i \restriction E_k$ на множество E_{k+1}. Все функции из $\mathcal{K}_{ip}$ принадлежат алгебре $\mathcal{A}_p$, поэтому $h \notin \mathcal{K}_{ip}$. Из упомянутой теоремы Лау следует, что h вместе с функциями из $\mathcal{K}_{ip}$ порождает квазиклетку $\mathcal{K}_i$.

Пусть $j \in \{1, \dots, s\}$, $j \neq i$. Докажем, что компонента $\mathcal{K}_j$ с определяющим множеством M_j также принадлежит порождаемой алгебре. Поскольку $h \notin \mathcal{A}_p$, то должны найтись такие числа $c_1, \dots, c_n$, что

$$h(c_1, \dots, c_n) \neq h(\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n)). \tag{2.2}$$

Функция φ проектирует множество E_{k+1} на E_k, т. е. обладает следующим свойством: $\forall x \in E_k\ \varphi(x) = x$. Отсюда и из (2.2) следует, что $c_j = k+1$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$. Положим

$$\varphi(c_1) = b_1, \dots, \varphi(c_n) = b_n, \quad h(c_1, \dots, c_n) = d_1, \quad h(b_1, \dots, b_n) = d_2.$$

Если множество M_j содержит более одного элемента, то, поскольку $d_1 \in E_k$ и $d_2 \in E_k$, в $\mathcal{A}_p$ найдется такая функция $g(x)$, что

$$g \restriction E_k \in \mathcal{K}_j, \quad g(d_1) \neq g(d_2).$$

Обозначим через $\mathcal{K}_{jp}$ проективное φ-расширение квазиклетки $\mathcal{K}_j \restriction E_k$ на множество E_{k+1}. Очевидно, $g * h \notin \mathcal{K}_{jp}$, поэтому функция $g * h$ вместе с функциями из $\mathcal{K}_{jp}$ порождает квазиклетку $\mathcal{K}_j$.

Если же множество M_j содержит один элемент, то компонента $\mathcal{K}_j$ вырожденная и содержит лишь функции-константы. Согласно 2.8 для каждой такой функции v доопределение функции $v \restriction E_k$ на множестве E_{k+1} совпадает с v, поэтому $\mathcal{K}_j$ принадлежит порождаемой алгебре. $\square$

2.11. Следствие. *Пусть $\mathcal{K}_p^{\{m\}}$ — проективное и $\mathcal{K}_t^{\{m\}}$ — вполне ограниченное расширения квазиклетки $\mathcal{K}^{\{0\}} \subseteq \mathcal{P}^*_{k-m}$ на множество E_k, имеющие степень m. Между $\mathcal{K}_p^{\{m\}}$ и $\mathcal{K}_t^{\{m\}}$ существует неуплотняемая возрастающая цепь длины m, обладающая следующим свойством: каждая отличная от $\mathcal{K}_p^{\{m\}}$ и $\mathcal{K}_t^{\{m\}}$ вершина этой цепи для подходящего i является проективным расширением степени $m-i$ на множество E_k вполне ограниченного расширения степени i квазиклетки $\mathcal{K}^{\{0\}}$ на множество E_{k-i}.*

Доказательство. Обозначим через ψ_1 какую-нибудь проекцию множества E_{1+k-m} на E_{k-m}, через $\mathcal{K}_p^{\{1\}}$ и $\mathcal{K}_t^{\{1\}}$ — проективное ψ_1-расширение и вполне ограниченное расширение квазиклетки $\mathcal{K}^{\{0\}}$ на множество E_{1+k-m}. Согласно 2.10 $\mathcal{K}_p^{\{1\}}$ является максимальной подалгеброй алгебры $\mathcal{K}_t^{\{1\}}$.

Теперь возьмем некоторую проекцию $\widetilde{\psi}_2$ множества E_{2+k-m} на E_{1+k-m} и обозначим через $\mathcal{K}_p^{\{2\}}$ и $\mathcal{K}_{tp}^{\{2\}}$ соответственно проективные $\widetilde{\psi}_2$-расширения алгебр $\mathcal{K}_p^{\{1\}}$ и $\mathcal{K}_t^{\{1\}}$ на множество E_{2+k-m}. Поскольку эти расширения изоморфны соответственно алгебрам $\mathcal{K}_p^{\{1\}}$ и $\mathcal{K}_t^{\{1\}}$ (см. 2.3), алгебра $\mathcal{K}_p^{\{2\}}$ максимальна в $\mathcal{K}_{tp}^{\{2\}}$. Положим $\psi_2 = \psi_1(\widetilde{\psi}_2)$. Нетрудно заметить, что ψ_2 проектирует множество E_{2+k-m} на E_{k-m} и потому $\mathcal{K}_p^{\{2\}}$ является проективным ψ_2-расширением алгебры $\mathcal{K}^{\{0\}}$ на множество E_{2+k-m}.

Обозначим через $\mathcal{K}_t^{\{2\}}$ вполне ограниченное расширение алгебры $\mathcal{K}_t^{\{1\}}$ на множество E_{2+k-m}. Ввиду 2.10 алгебра $\mathcal{K}_{tp}^{\{2\}}$ максимальна в $\mathcal{K}_t^{\{1\}}$. Очевидно,

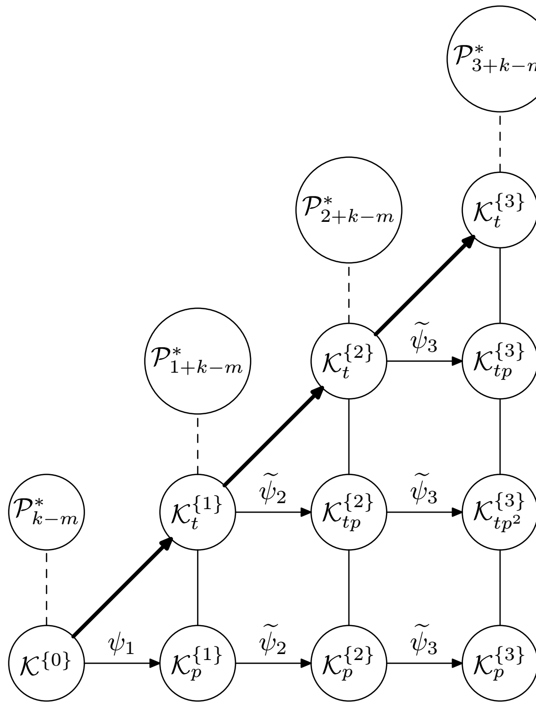

Рис. 1. Построение цепи подалгебр длины 3.

$\mathcal{K}^{\{2\}}_t$ совпадает с вполне ограниченным расширением алгебры $\mathcal{K}^{\{0\}}$ на множество E_{2+k-m}, что и отображено в ее обозначении.

Далее задаем какую-нибудь проекцию $\widetilde{\psi}_3$ множества E_{3+k-m} на E_{2+k-m} и аналогичным образом строим цепь подалгебр $\mathcal{K}^{\{3\}}_p$, $\mathcal{K}^{\{3\}}_{tp^2}$, $\mathcal{K}^{\{3\}}_{tp}$, $\mathcal{K}^{\{3\}}_t$ алгебры $\mathcal{P}^*_{3+k-m}$ (рис. 1, толстые стрелки указывают вполне ограниченные расширения степени 1). Процесс продолжаем до тех пор, пока не получим нужную цепь подалгебр алгебры $\mathcal{P}^*_k$. $\square$

3. Конгруэнции на квазиклетках

3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{P}^*_A$, имеющая отделимое ядро, и $S = \{A_i \mid i \in I\}$ — произвольная совокупность попарно различных подмножеств множества $A \setminus \mathcal{A}(A)$. Зададим на $\mathcal{A}$ отношение эквивалентности $\varkappa_S$, считая функции f и g из $\mathcal{A}$ эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

(1) *Арности функций f и g совпадают.*

(2) *Если ни одно из множеств A_i, входящих в S, не является подмножеством множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$, то должно выполняться равенство $f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n)$.*

3.2. *Для любой совокупности $S = \{A_i \mid i \in I\}$ попарно различных подмножеств множества $A \setminus \mathcal{A}(A)$ эквивалентность $\varkappa_S$ является конгруэнцией на $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Очевидна стабильность отношения $\varkappa_S$ относительно операций ζ, τ, Δ. Пусть функции f_1 и g_1 эквивалентны по $\varkappa_S$ соответственно функциям f_2 и g_2. Докажем, что функции $f_1 * g_1$ и $f_2 * g_2$ также эквивалентны.

Действительно, если

$$h_1(x_1,\dots,x_{n+m-1}) = f_1(g_1((x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1})),$$

$$h_2(x_1,\dots,x_{n+m-1}) = f_2(g_2((x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}))$$

и ни одно из множеств A_i, входящих в S, не является подмножеством множества $\{x_1,\dots,x_{m+n-1}\}$, то

$$g_1(x_1,\dots,x_m) = g_2(x_1,\dots,x_m).$$

Поскольку никакая функция из $\mathcal{A}$ не принимает значений из множества $A \setminus \mathcal{A}(A)$, ни одно из множеств A_i, входящих в S, не является подмножеством множества

$$\{g_1(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}\},$$

поэтому $h_1(x_1,\dots,x_{n+m-1}) = h_2(x_1,\dots,x_{n+m-1})$. □

Отметим, что некоторые S-конгруэнции могут оказаться тривиальными.

3.3. Конгруэнции $\varkappa_S$ на имеющих отделимое ядро подалгебрах алгебры $\mathcal{P}_A^*$ назовем *S-конгруэнциями*, а отвечающие им гомоморфизмы — *S-гомоморфизмами.*

Впервые S-конгруэнции и S-гомоморфизмы были рассмотрены Лау [3] для вполне ограниченных расширений предитеративных алгебр конечного ранга.

В [1, 4] А. И. Мальцев впервые рассматривал гомоморфизмы предитеративных алгебр. В частности, он отметил, что при определенных условиях можно получать вложения предитеративных алгебр в виде некоторых произведений.

3.4. Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра итеративной алгебры $\mathcal{P}_A^*$, задано семейство гомоморфизмов $\gamma_i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{B_i}^*$ $(i \in I)$,

$$B = \prod_{i\in I} B_i.$$

Каждой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ из $\mathcal{A}$ сопоставим функцию f^γ из $\mathcal{P}_B^*$, определенную следующим образом. Если $g_1,\dots,g_n$ — произвольные элементы множества B и для любого $i \in I$ справедливо

$$f^{\gamma_i}(g_1(i),\dots,g_n(i)) = g(i),$$

то $f^\gamma(g_1,\dots,g_n) = g$. Легко убедиться в том, что отображение $\gamma : f \to f^\gamma$ — гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{P}_B^*$. Поскольку γ полностью определяется семейством γ_i, то будем писать $\gamma = \prod\limits_{i\in I} \gamma_i$.

Далее нам потребуется следующая простая лемма.

3.5. Лемма. *Пусть $B = \prod\limits_{i\in I} B_i$, задано семейство гомоморфизмов $\gamma_i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{B_i}^*$, где $i \in I$, и $\gamma = \prod\limits_{i\in I} \gamma_i$ — гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ на подалгебру $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{P}_B^*$. Если один из гомоморфизмов γ_i является изоморфизмом, то алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны.*

Доказательство. Из определения гомоморфизма γ и условий леммы 3.5 непосредственно видно, что если функции f и g из $\mathcal{A}$ различны, то функции $\gamma(f) = f^\gamma$ и $\gamma(g) = g^\gamma$ также различны, поэтому отображение γ взаимно однозначное. □

3.6. *Пусть A — множество, B — его собственное подмножество, имеющее не менее двух элементов. Пусть также подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{P}_A^*$ является вполне ограниченным расширением подалгебры $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{P}_B^*$, $S = \{A_i \mid i \in I\}$ — совокупность попарно различных подмножеств множества $A \setminus \mathcal{A}(A)$, $\varkappa_S$ — S-конгруэнция на $\mathcal{A}$. Существует такое множество C, что*

(1) *$B \subseteq C \subseteq A$;*

(2) *алгебра $\mathcal{A}/\varkappa_S$ изоморфна некоторой подалгебре $\mathcal{C}$ алгебры $\mathcal{P}_C^*$, являющейся вполне ограниченным расширением подалгебры $\mathcal{B}$ на множество C;*

(3) *алгебра $\mathcal{A}$ содержит некоторую подалгебру $\mathcal{H}$, которая является проективным φ-расширением подалгебры $\mathcal{C}$ для какой-то проекции φ множества A на C, и, следовательно, алгебра $\mathcal{A}/\varkappa_S$ изоморфна $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Пусть

$$Q = \prod_{i\in I} A_i, \quad Q = \{g_j \mid j \in J\}, \quad D_S = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Множество Q образовано всевозможными функциями, отображающими множество I в D_S так, что $g_j(i) \in A_i$ для любых $i \in I$ и $j \in J$. Обозначим через Q_j множество $A \setminus g_j(I)$, и пусть $R = \prod\limits_{j\in J} Q_j$. Отображение γ_j, ставящее в соответствие функции $f \in \mathcal{A}$ функцию $f^{\gamma_j} = f \restriction Q_j$, является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{P}_{Q_j}^*$, поэтому $\gamma = \prod\limits_{i\in I} \gamma_j$ — гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{P}_R^*$. Докажем, что $\varkappa_s$ — ядерная конгруэнция гомоморфизма γ.

Если n-арные функции f_1 и f_2 из $\mathcal{A}$ не сравнимы по $\varkappa_S$, то в A найдутся такие элементы $a_1, \ldots, a_n$, что

$$f_1(a_1, \ldots, a_n) \neq f_2(a_1, \ldots, a_n)$$

и $\{a_1, \ldots, a_n\} \not\supseteq A_i$ для любого $i \in I$. Зафиксируем для каждого $i \in I$ некоторый элемент $g(i) \in A_i \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Возникающая функция g принадлежит множеству Q, поэтому $A \setminus g(I)$ входит сомножителем в множество R, образованное всеми функциями, отображающими множество J в $\bigcup\limits_{j\in J} (A \setminus g_j(I))$ так, что $h_i(j) \in A_i$ для любой функции $h_i \in R$ и любого $j \in J$. Элементы $a_1, \ldots, a_n$ принадлежат множеству $A \setminus g(I)$, следовательно, в R найдутся такие функции $h_1, \ldots, h_n$, что

$$h_1(j) = a_1, \ldots, h_n(j) = a_n.$$

Ввиду выбора элементов $a_1, \ldots, a_n$ справедливо соотношение

$$(\gamma(f_1))(h_1, \ldots, h_n) \neq (\gamma(f_2))(h_1, \ldots, h_n). \tag{3.1}$$

Теперь предположим, что $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ и $f_1 \equiv_{\varkappa_S} f_2$. Если $\gamma(f_1) \neq \gamma(f_2)$, то в R найдутся такие $h_1, \ldots, h_n$, что выполняется соотношение (3.1). Это означает, что для некоторого j из J

$$f_1(h_1(j), \ldots, h_n(j)) \neq f_2(h_1(j), \ldots, h_n(j)). \tag{3.2}$$

Из определения множества R следует, что

$$\{h_1(j), \ldots, h_n(j)\} \not\supseteq A_i$$

для любого $i \in I$, поэтому неравенство (3.2) противоречит выбору функций f_1 и f_2.

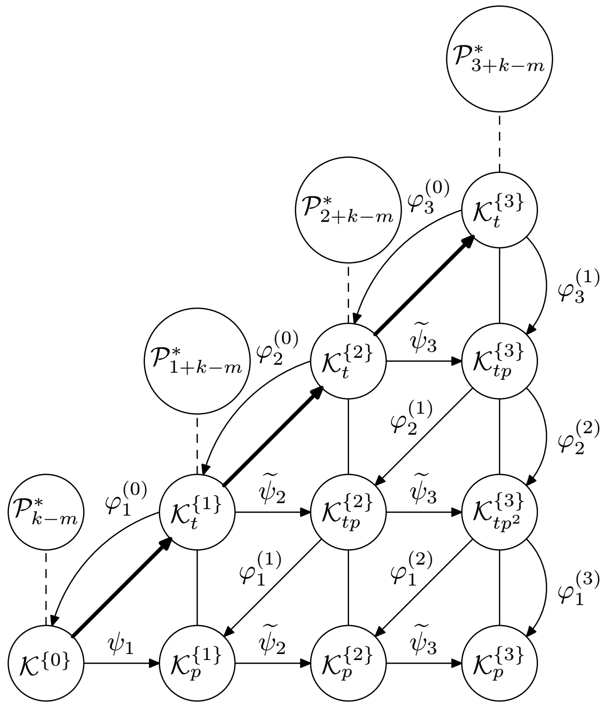

Рис. 2. S-гомоморфизмы алгебр, указанных на рис. 1.

Из определения 3.1 вытекает, что образ $\mathcal{A} \upharpoonright Q_j$ алгебры $\mathcal{A}$ при гомоморфизме γ_j изоморфен алгебре $\mathcal{A}/\varkappa_{S_j}$, где множество $S_j = \{\{a_i\} \mid i \in I_j\}$ удовлетворяет соотношению

$$\bigcup_{i \in I_j} \{a_i\} = g_j(I).$$

Ввиду доказанной леммы 3.5 алгебра $\mathcal{A}/\varkappa_{S_j}$ изоморфна алгебре $\mathcal{A}/\varkappa_S$. Полагая $C = Q_j$, видим, что $B \subseteq C \subseteq A$, и потому утверждение (1) доказываемой теоремы верно. Так как алгебра $\mathcal{C} = \mathcal{A} \upharpoonright Q_j$ является вполне ограниченным расширением подалгебры $\mathcal{B}$ на множество C, справедливо утверждение (2). Алгебру $\mathcal{C}$ изоморфно вкладываем в $\mathcal{A}$ при помощи какой-нибудь проекции φ множества A на C и получаем подалгебру $\mathcal{H}$. Утверждение (3) также справедливо. $\square$

3.7. *Если выполнены все условия теоремы* 3.6 *и множество A конечно, то степень подалгебры $\mathcal{H}$ строго меньше степени алгебры $\mathcal{A}$. Если к тому же каждое множество A_i содержит лишь один элемент, то алгебра $\mathcal{H}$ имеет степень $|A \setminus (\mathcal{A}(A) \cup D_S)|$, где $D_S = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.*

Доказательство. Предположим, что каждое множество A_i из S содержит лишь один элемент. Тогда множество B также содержит один элемент, $C = A \setminus D_S$ и γ отображает алгебру $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A} \upharpoonright C$. Очевидно, алгебра $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright C$ является вполне ограниченным расширением алгебры $\mathcal{B}$ степени $|A \setminus C|$, причем любое проективное расширение $\mathcal{C}$ этой алгебры в $\mathcal{P}^*_A$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$. $\square$

В теореме 3.6 сказано, что для любого нетривиального вполне ограниченного расширения $\mathcal{A}$ какой-либо итеративной алгебры $\mathcal{B}$ ее фактор-алгебра по любой S-конгруэнции изоморфна подалгебре этой алгебры, которую можно получить в два этапа: сначала строится определенное вполне ограниченное расширение алгебры $\mathcal{B}$, а затем полученная алгебра изоморфно вкладывается в $\mathcal{A}$ при помощи какой-либо проекции. Если мы ограничиваемся изучением итеративных алгебр над конечными множествами, то справедливо утверждение 3.7. Так, на рис. 2 через $\varphi_1^{(i)}$, $i = \overline{0,3}$, обозначены S-гомоморфизмы. В частности, фактор-алгебра по любой S-конгруэнции алгебры $\mathcal{K}_t^{\{3\}}$ изоморфна одной из алгебр $\mathcal{K}_{tp}^{\{3\}}$, $\mathcal{K}_{tp^2}^{\{3\}}$, $\mathcal{K}_p^{\{3\}}$.

4. О разделении квазиклеток гипертождествами

Каждой алгебре $\mathbf{A} = \langle A; \Omega \rangle$ однозначно соответствует клон $\mathcal{T}(\mathbf{A})$ всех ее термальных функций, т. е. клон, порожденный множеством Ω основных операций алгебры $\mathbf{A}$. Каждый клон $\mathcal{C}$ функций, определенных на множестве A, является клоном всех термальных функций алгебры $\langle A; F \rangle$, где F — любое множество, порождающее клон $\mathcal{C}$. Поскольку клон может обладать многими порождающими системами, это соответствие не является однозначным.

4.1. Пусть $f_1^{n_1}, \ldots, f_k^{n_k}$ — все функциональные символы и $x_1, \ldots, x_n$ — все предметные символы, входящие в термы T_1 и T_2. Выражение

$$\forall f_1^{n_1} \ldots \forall f_k^{n_k}\, \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (T_1 = T_2)$$

называется *гипертождеством*. Будем называть его *гипертождеством алгебры* $\mathbf{A}$, если равенство $T_1 = T_2$ превращается в тождество, истинное на $\mathbf{A}$, при любом выборе термальных функций арности $n_1, \ldots, n_k$ алгебры $\mathbf{A}$ и подстановке их вместо функциональных символов $f_1^{n_1}, \ldots, f_k^{n_k}$, входящих в T_1 и T_2.

Клоны являются одним из видов универсальных алгебр, поэтому можно ставить вопрос об истинности или ложности на клонах тождеств соответствующей сигнатуры. Каждое такое тождество имеет вид

$$\forall f_1 \ldots \forall f_k\, \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (T_1 = T_2).$$

Здесь однако возникают большие трудности, так как функциональные символы должны замещаться любыми функциями без учета их арности. Эти затруднения исчезают, если вместо таких тождеств рассматривать формулы 4.1, которые далее по-прежнему будут называться *гипертождествами*.

4.2. *Клон $\mathcal{C}$ отделим от клонов $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ системой гипертождеств S, если выполняется одно из двух условий.*

(1) *Все гипертождества из S ложны в $\mathcal{C}$, но для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ в S есть гипертождество, истинное в $\mathcal{C}_i$.*

(2) *Все гипертождества из S истинны в $\mathcal{C}$, но для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ в S есть гипертождество, ложное в $\mathcal{C}_i$.*

Разумеется, нельзя разделить гипертождествами изоморфные клоны. Если исключить эти случаи, то любые два булевых клона, образованных операциями на множестве из двух элементов, можно разделить гипертождествами [5, 6]. Для множеств с числом элементов более двух легко строятся примеры пар неизоморфных клонов, не разделимых гипертождествами [5].

Из определения 4.2 следует, что если говорят о разделимости клонов гипертождествами, то имеют в виду истинность на клонах формулы вида

$$\forall f_{11}^{n_{11}} \dots \forall f_{1k_1}^{n_{1k_1}} (T_{11} = T_{12}) \vee \dots \vee \forall f_{m1}^{n_{m1}} \dots \forall f_{mk_m}^{n_{1k_m}} (T_{m1} = T_{m2}).$$

Если вид формулы несколько изменить, то ранее неразделимые клоны становятся разделимыми.

4.3. *Клон $\mathcal{C}$ слабо отдели́м от клонов $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ гипертождествами, если найдется формула вида*

$$\forall f_1^{n_1} \dots \forall f_k^{n_k} ((T_{11} = T_{12}) \vee \dots \vee (T_{m1} = T_{m2})) \tag{4.1}$$

с термами $T_{11}, \dots, T_{m2}$, в которых все функциональные переменные принадлежат множеству $f_1^{n_1}, \dots f_k^{n_k}$, удовлетворяющая одному из следующих условий.

(1) *Формула* (4.1) *ложна на $\mathcal{C}$, но для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ эта формула истинна на $\mathcal{C}_i$.*

(2) *Формула* (4.1) *истинна на $\mathcal{C}$, но для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ эта формула ложна на $\mathcal{C}_i$.*

4.4. Будем говорить, что два клона *слабо разделимы гипертождествами уровня* p, если их разделяет формула (4.1), содержащая функциональную переменную арности p и не содержащая функциональных переменных большей арности.

4.5. Говорят, что два клона *различаются на уровне* m, если число функций арности m в этих клонах различно.

Нетрудно доказать, что *любые два клона слабо разделимы гипертождествами уровня m, если они различаются на уровне m.* Действительно, пусть число функций арности m в первом клоне равно k, во втором s и $k > s$. Формула

$$\forall f_0^m \forall f_1^m \dots \forall f_s^m ((f_0 = f_1) \vee (f_0 = f_2) \vee \dots \vee (f_0 = f_s))$$

истинна во втором клоне, но ложна в первом.

Поскольку клон непременно различается от собственного подклона на каком-то уровне, *каждый клон слабо отделим гипертождествами от любого собственного подклона.* В частности, слабо разделимы гипертождествами любые два клона, принадлежащие цепи, о которой говорится в 2.11.

Применяемые в построении формулы (4.1) равенства примитивны, и сама формула использует только информацию о мощностях соответствующих слоев, образованных функциями определенной арности в клонах. В [7] доказано, что в алгебре $\mathcal{P}_3^*$ простые квазиклетки отделимы от своих максимальных подалгебр гипертождествами уровня 1, а объединение двух и трех простых квазиклеток слабо отделимо от своих максимальных подалгебр гипертождествами уровня 2 и 1. Приведенные там гипертождества уже нетривиальны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.
2. *Lau D.* Prävollständige Klassen von $P_{k,l}$ // J. Inf. Process. Cybern. (Elektronische Informationsverarbeitung und Kynernetik). 1975. N 11. S. 624–626.
3. *Lau D.* Kongruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$ // Rostock. Math. Kolloq. 1977. N 3. S. 37–43.
4. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1976.

5. *Денеке К., Мальцев И. А.* Разделение клонов гипертождествами // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 310–316.

6. *Денеке К., Мальцев И. А., Решке М.* О разделимости булевых клонов гипертождествами // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1050–1066.

7. *Мальцев И. А., Швайгерт Д.* Гипертождества QZ-алгебр // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 132–139.

Статья поступила 13 ноября 2005 г.

Мальцев Иван Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
malcev@math.nsc.ru