Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.946

МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С АНИЗОТРОПНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Э. И. Семёнов

Аннотация: Доказана инвариантность квазилинейного параболического уравнения с анизотропной теплопроводностью в трехмерном координатном пространстве относительно некоторых преобразований эквивалентности и указаны явные формулы для этих преобразований. Рассмотрены нетривиальные редукции исследуемого уравнения к уравнениям аналогичного вида меньшей пространственной размерности. С учетом этих результатов построены новые точные многомерные решения изучаемого уравнения, зависящие от произвольных гармонических функций.

Ключевые слова: квазилинейное параболическое уравнение теплопроводности, уравнение Лиувилля, многомерные точные решения, преобразования эквивалентности, анизотропность, сопряженные гармонические функции.

Введение

В статье рассматривается трехмерное квазилинейное параболическое уравнение с анизотропной теплопроводностью и линейным источником (стоком) вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z,t)\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \lambda u, \qquad (1)$$

$$u = u(x,y,z,t),$$

где $a(x,y) > 0$, $k(z,t) \geq 0$ — непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов, $\lambda \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная. Такие уравнения встречаются при описании процессов переноса в пористых средах, в частности, в теории полупроводников. Групповая классификация уравнения (1) изучалась в работах [1, 2]. В случае, когда функция $k(z,t)$ тождественно равна нулю и $a(x,y) \equiv \text{const} > 0$, соотношение (1) является предельным уравнением быстрой диффузии в двумерном координатном пространстве, некоторые его свойства приведены в [3].

Наше исследование посвящено описанию некоторых свойств уравнения (1) и построению его многомерных точных решений.

1. Преобразования эквивалентности для уравнения (1)

Во многих задачах математической физики важную роль играют преобразования эквивалентности для эволюционных уравнений [4, 5], позволяющие находить новые решения, используя известные более простые решения. В этом разделе мы покажем инвариантность квазилинейного параболического уравнения с анизотропной теплопроводностью в трехмерном координатном пространстве (1) относительно некоторых преобразований эквивалентности и приведем явные формулы для этих преобразований.

Теорема 1. *Если функция $a(x,y)$ представима в виде $a(x,y) = \tilde{a}(\xi,\eta)$, где $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ — сопряженные гармонические функции, то уравнение* (1) *инвариантно относительно преобразования*

$$u(x,y,z,t) = \rho(x,y)v(\xi,\eta,z,t), \tag{2}$$

где $\rho(x,y) = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$ или $\rho(x,y) = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$, т. е. под действием (2) *оно сводится к уравнению аналогичного вида на функцию $v(\xi,\eta,z,t)$:*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \tilde{a}(\xi,\eta)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z,t)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \lambda v. \tag{3}$$

Доказательство. После подстановки выражения (2) в уравнение (1) и ряда несложных выкладок с учетом представления $a(x,y) = \tilde{a}(\xi,\eta)$ и свойства ортогональности градиентов сопряженных гармонических функций

$$(\nabla\xi, \nabla\eta) \equiv \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$$

приходим к соотношению

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \tilde{a}(\xi,\eta)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. + \rho\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\right)\right] + \rho\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z,t)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \lambda\rho v. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right), \tag{5}$$

в уравнении (4) тождественно обращается в нуль. Это следует из определения функции $\rho(x,y)$. Действительно, расписывая последнее выражение, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right) = \rho^{-2}\left[\rho\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right) - \left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\right)\right]$$
$$= \left[\rho\left(2\left(\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)^2\right) + 4\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\right.\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\right) - 8\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)$$
$$\left.-4\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\left(\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right)^2\right) - 4\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\left(\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right]\rho^{-2}.$$

Так как в силу гармоничности функции $\eta(x,y)$ имеем $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}$, последняя часть цепочки равенств упростится и примет вид

$$4\rho^{-1}\left(\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right)^2\right) - 4\rho^{-2}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right)^2\right).$$

Оно тождественно равно нулю, поскольку $\rho(x,y) = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$. Следовательно, из (4) вытекает уравнение (3), что и требовалось доказать.

Пример 1. Квазилинейное параболическое уравнение с анизотропной теплопроводностью вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos(x^2 - y^2)e^{2xy}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \lambda u$$

с помощью преобразования

$$u(x, y, z, t) = 4(x^2 + y^2)v(\xi, \eta, z, t),$$

где $\xi = (x^2 - y^2)$, $\eta = 2xy$, сводится к аналогичному уравнению на функцию $v(\xi, \eta, z, t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \cos(\xi)e^{\eta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^p\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \lambda v.$$

Замечание 1. Равенство нулю соотношения (5) вытекает из того факта, что функция $\ln|\rho(x, y)|$ гармоническая. Таким образом, если дана произвольная гармоническая функция $\eta(x, y)$, то гармонической будет функция $\ln|\nabla\eta(x, y)|^2$.

Замечание 2. Очевидно, что теорема 1 останется справедливой, если в уравнении (1) без ограничения общности функцию $a(x, y)$ положить тождественно равной единице. Тогда в формулировке теоремы нет необходимости требовать представления $a(x, y) = \tilde{a}(\xi, \eta)$, где $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ — сопряженные гармонические функции. В этом случае уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z, t)\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \lambda u \tag{6}$$

будет инвариантным относительно преобразования (2), т. е. сведется к уравнению аналогичного вида на функцию $v(\xi, \eta, z, t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z, t)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \lambda v. \tag{7}$$

Отметим, что редукцию уравнения (1) к уравнению (7) можно получить и для случая, когда $a(x, y)$ отлична от постоянной, при этом необходимо потребовать выполнения некоторых дополнительных условий на эту функцию. Так, имеет место

Теорема 2. *Если функция* $\ln|a(x, y)|$ *гармоническая, то уравнение* (1) *преобразованием*

$$u(x, y, z, t) = a(x, y)\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]v(\xi, \eta, z, t) \tag{8}$$

редуцируется к уравнению (7).

Доказательство. После подстановки соотношения (8) в уравнение (1) и некоторых элементарных преобразований мы получим уравнение (7) с дополнительным слагаемым вида

$$a(x, y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot\right)\ln|a(x, y)\rho(x, y)|. \tag{9}$$

Таким образом, достаточно показать, что функция $\ln|a(x, y)\rho(x, y)|$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Так как функция $\ln|\rho(x, y)|$, как показано ранее (см. доказательство теоремы 1), гармоническая, а функция $\ln|a(x, y)|$ по условию теоремы также гармоническая, то выражение (9) тождественно равно нулю. Это и доказывает справедливость теоремы.

Пример 2. Уравнение (1) с функцией $a(x,y) = \exp\{x^2 - y^2\}$ преобразованием $u(x,y,z,t) = \exp\{x^2 - y^2\}|\nabla\eta|^2 v(\xi,\eta,z,t)$ редуцируется к уравнению (7).

Замечание 3. Если вместо преобразования (2) рассмотреть более общее преобразование

$$u(x,y,z,t) = \psi(x,y)v(\xi,\eta,z,t), \tag{2'}$$

где функция $\psi(x,y)$ не обязана быть квадратом градиента гармонической функции $\xi(x,y)$ или $\eta(x,y)$, то с учетом дополнительных условий на функцию $\psi(x,y)$ будет справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Если функция $a(x,y)$ представима в виде*

$$a(x,y) = \frac{\psi(x,y)}{\rho(x,y)}\tilde{a}(\xi,\eta), \quad \text{где} \quad \rho(x,y) = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ — сопряженные гармонические функции и, кроме того, $\ln|\psi(x,y)|$ является гармонической функцией, то уравнение (1) с помощью преобразования (2′) сводится к уравнению вида (3).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с той лишь разницей, что вместо равенства нулю соотношения (5) надо показать равенство нулю выражения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

что непосредственно следует из условия гармоничности функции $\ln|\psi(x,y)|$. Более того, теорема 1 является следствием теоремы 3 при $\psi(x,y) = \rho(x,y)$.

Пример 3. Если в условиях теоремы 1 функция $a(x,y)$ допускает представление

$$a(x,y) = \tilde{a}(\xi,\eta)\exp\{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\},$$

где α, β, γ — произвольные постоянные, $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ — сопряженные гармонические функции, то уравнения (1) и (3) связаны преобразованием

$$u(x,y,z,t) = \rho(x,y)\exp\{\alpha\xi(x,y) + \beta\eta(x,y) + \gamma\}v(\xi,\eta,z,t). \tag{2''}$$

В частности, при $\tilde{a}(\xi,\eta) \equiv 1$ уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \exp\{\alpha\xi(x,y) + \beta\eta(x,y) + \gamma\}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z,t)\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \lambda u$$

преобразованием (2″) сводится к уравнению (7).

Покажем, как посредством полученных преобразований можно строить новые точные решения, исходя из одного простейшего решения вида «бегущей волны».

Пример 4. Пусть в уравнении (6) $k(z,t) \equiv \gamma$, $\gamma = \text{const} > 0$, $\lambda = 0$. Тогда для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{10}$$

с частным решением типа «бегущей волны»

$$u(x,y,z,t) = \exp\{-(\delta/\gamma)(x+y+z-\delta t)\}, \quad \delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

используя формулу (2), построим класс новых точных решений уравнения (10) вида

$$u(x,y,z,t) = \left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)\exp\left\{-\frac{\delta}{\gamma}\Big(\xi(x,y)+\eta(x,y)+z-\delta t\Big)\right\}, \quad (11)$$

где $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ — произвольные сопряженные гармонические функции. Например, если положить $\xi(x,y)=\exp(\beta x)\cos(\beta y)$, $\eta(x,y)=\exp(\beta x)\sin(\beta y)$, $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, то из (11) имеем точное решение уравнения (10):

$$u(x,y,z,t) = \beta^2\exp\{2\beta x - (\delta/\gamma)[\exp(\beta x)(\cos(\beta y)+\sin(\beta y))+z-\delta t]\}. \quad (11)'$$

В свою очередь, из решения $(11)'$ можно получить новое семейство точных решений

$$u(x,y,z,t) = \beta^2 n^2(x^2+y^2)^{n-1}\exp\{2\beta(x^2+y^2)^{n/2}\cos(n\varphi(x,y))$$
$$-(\delta/\gamma)[\exp\{\beta(x^2+y^2)^{n/2}\cos(n\varphi(x,y))\}(\cos(\beta\varrho(x,y))+\sin(\beta\varrho(x,y)))+z-\delta t]\},$$

где $\varrho(x,y)=(x^2+y^2)^{n/2}\sin(n\varphi(x,y))$ — гармонические полиномы степени $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(x,y)=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ или $\varphi(x,y)=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Очевидно, что данную процедуру размножения решений можно продолжать до бесконечности, поскольку уравнение (10) является особым с точки зрения групповой теории [1, 2] — допускает бесконечную алгебру точечных симметрий. Это означает, что уравнение (10) в координатном пространстве трех измерений обладает неограниченным запасом инвариантных решений.

2. Редукции уравнения (1) к уравнениям аналогичного вида меньшей размерности

В этом разделе приводятся нетривиальные редукции, связанные с понижением пространственной размерности уравнения (1).

Утверждение 1. *Если функция $a(x,y)$ представима в виде $\tilde a(\eta)$, где $\eta=\eta(x,y)$ — произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной, то уравнение* (1) *с помощью преобразования*

$$u(x,y,z,t) = \left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)v(\eta,z,t) \quad (12)$$

редуцируется к своему двумерному по пространственным переменным η и z аналогу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \tilde a(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z,t)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \lambda v. \quad (13)$$

Доказательство утверждения идентично доказательству теоремы 1, за исключением того факта, что здесь требуется зависимость $a(x,y)=\tilde a(\eta)$, где $\eta=\eta(x,y)$ — произвольная гармоническая функция. Кроме того, это утверждение останется справедливым, если взять $a(x,y)$ тождественно равной положительной константе. Если же наложим дополнительные ограничения на функцию $a(x,y)$, то получим новые редукции уравнения (1). Так, имеет место

Утверждение 2. *Если функция* $\ln|a(x,y)|$ *удовлетворяет уравнению Лапласа*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot\right)\ln|a(x,y)|=0, \tag{14}$$

то уравнение (1) *преобразованием*

$$u(x,y,z,t)=\zeta(x,y)v(\eta,z,t), \quad \eta(x,y)=\ln|a(x,y)|, \tag{15}$$

где

$$\zeta(x,y)=\frac{|\nabla a|^2}{a}, \quad |\nabla a|^2=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2, \quad a=a(x,y),$$

редуцируется к двумерному по пространственным переменным η *и* z *квазилинейному параболическому уравнению вида*

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z,t)\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\lambda v. \tag{16}$$

Доказательство. Так как функция $\zeta(x,y)$ не зависит от переменных z, t, для справедливости утверждения достаточно показать, что лапласиан в двумерном координатном пространстве переменных x, y от натурального логарифма функции $u(x,y,z,t)$ представим в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot\right)\ln|u(x,y,z,t)|=\frac{\zeta(x,y)}{a(x,y)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

Расписывая оператор Лапласа от выражения (15), имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot\right)\ln|u(x,y,z,t)|=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot\right)\ln|\zeta(x,y)|+\frac{\zeta(x,y)}{a(x,y)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(v^{-1}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

Покажем, что первое слагаемое в правой части последнего соотношения тождественно равно нулю. Так как функция $\ln|a(x,y)|$ по условию утверждения является гармонической, осталось доказать, что функция $\ln|\nabla a(x,y)|^2$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно,

$$\ln|\nabla a(x,y)|^2=2\eta(x,y)+\ln|\nabla\eta(x,y)|^2,$$

и поскольку функция $\eta(x,y)$ по определению гармоническая, в силу леммы 1 работы [3] функция $\ln|\nabla\eta(x,y)|^2$ будет решением уравнения Лапласа. Следовательно, функция $\ln|\zeta(x,y)|$ является гармонической как разность двух гармонических функций $\ln|\nabla a(x,y)|^2$ и $\ln|a(x,y)|$. Утверждение доказано.

3. Некоторые многомерные точные решения уравнения (1)

В этом разделе перейдем к вопросу построения некоторых частных точных решений уравнения (1). Наиболее очевидным представляется поиск решения уравнения (1) в следующем виде с разделением переменных:

$$u(x,y,z,t)=Q(z,t)\exp\{W(x,y)\}. \tag{17}$$

В результате после подстановки анзаца (17) в уравнение (1) получим уравнения в частных производных

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z,t)\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\lambda Q+\varepsilon_0, \quad Q=Q(z,t), \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \phi(x,y)e^W, \quad W = W(x,y), \tag{19}$$

где $\phi(x,y) = \frac{\varepsilon_0}{a(x,y)}$, ε_0 — свободная постоянная. Уравнение (19) есть не что иное, как неоднородное уравнение Лиувилля. Если $\phi(x,y)$ является гармонической функцией, то, как показано в [3], уравнение (19) имеет точное решение

$$W(x,y) = \ln\left|3\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi^3}\right|, \quad |\nabla\phi|^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2.$$

Пример 5. Если $a(x,y) = 1/\phi(x,y)$, где $\phi(x,y)$ — произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной, то уравнение (1) обладает точным решением

$$u(x,y,z,t) = \frac{3|\nabla\phi(x,y)|^2}{\phi^3(x,y)}Q(z,t),$$

где функция $Q(z,t)$ удовлетворяет уравнению (18).

При поиске решений уравнения (1) в форме (17) с функцией $a(x,y)$, тождественно равной единице, вместо уравнения (19) придем к однородному уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \varepsilon_0 e^W, \quad W = W(x,y). \tag{20}$$

Здесь $\varepsilon_0 \neq 0$ — константа, возникающая при разделении переменных. Если из [3] взять точные решения уравнения (20), то получим следующие точные решения уравнения (6):

$$u_1(x,y,z,t) = \frac{2C_0^2|\nabla\eta(x,y)|^2}{\varepsilon_0}\sec^2(C_0\eta)Q(z,t),$$

$$u_2(x,y,z,t) = \frac{2C_0^2|\nabla\eta(x,y)|^2}{\varepsilon_0}\operatorname{sech}^2(C_0\eta)Q(z,t),$$

где функция $Q(z,t)$ является решением уравнения (18), $|\nabla\eta(x,y)|^2 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$, $\eta = \eta(x,y)$ — произвольная гармоническая функция, $C_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

В случае, когда постоянная разделения равна нулю, имеем наиболее простое решение уравнения (1) в виде формулы (17), в которой $W(x,y)$ — произвольное решение уравнения Лапласа, а функция $Q(z,t)$ удовлетворяет уравнению (18) с $\varepsilon_0 = 0$.

Аналогично для уравнений (13), (16) видно, что их точные решения целесообразно отыскивать в виде

$$v(\eta,z,t) = \frac{Q(z,t)}{P(\eta)},$$

поскольку в этом случае придем к одному линейному параболическому уравнению (18) и одному нелинейному неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$PP'' - (P')^2 = \frac{\varepsilon_0}{\tilde{a}(\eta)}P, \quad P = P(\eta), \tag{21}$$

для уравнения (13) и одному нелинейному автономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$PP'' - (P')^2 = \varepsilon_0 P, \quad P = P(\eta), \tag{22}$$

для уравнения (16). Здесь ε_0 — константа разделения, а штрих означает производную по аргументу. Уравнение (22) легко интегрируется, а точные решения уравнения (21) для некоторых значений функции $\tilde{a}(\eta)$ можно найти в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 7. С. 1215–1223.
2. *Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г. и др.* Квазилинейное уравнение с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры / Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1986. (Итоги науки и техники).
3. *Семенов Э. И.* Свойства уравнения быстрой диффузии и его многомерные точные решения // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 862–869.
4. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
5. *Пухначев В. В.* Преобразования эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294, № 3. С. 535–538.
6. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.

Статья поступила 13 января 2005 г.

Семёнов Эдуард Иванович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
semenov@icc.ru