*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2006. Том 47, № 2*

*УДК 517.55*

# УСРЕДНЕННАЯ ФУНКЦИЯ ДЕНА ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

**Е. Г. Кукина**

**Аннотация:** Доказано, что относительная усредненная функция Дена при не слишком жестких ограничениях ограничена константами сверху и снизу.

**Ключевые слова:** усредненная функция Дена, функция Дена, вероятность.

## 1. Введение

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ — конечный алфавит. Обозначим через $\Sigma(X)$ свободный моноид на множестве $X \cup X^{-1}$, где $X^{-1} = \left\{x_1^{-1}, \dots, x_r^{-1}\right\}$ — множество формально обратных элементов. Элементы моноида $\Sigma(X)$ будем называть *словами*. Обозначим через $|w|$ длину слова $w$. Покажем, как в соответствии с идеями статьи [1] можно ввести на моноиде $\Sigma(X)$ вероятностную меру.

Функцию $\gamma : \Sigma(X) \to \mathbb{N}$ будем называть *сложностью*, если она имеет конечное слоение, т. е. для всех $k$ выполнено условие $\operatorname{card} \Gamma_k < \infty$, где $\Gamma_k = \{w \in \Sigma(X) \mid \gamma(w) = k\}$.

Пусть на множестве $\mathbb{N}$ определена некоторая вероятность $\{p_k = P\{\xi = k\}\}$. Это позволяет определить вероятность на моноиде $\Sigma(X)$ следующим образом:

$$\forall w \in \Gamma_k \quad p(w) = P\{\xi = w\} = \pi_k = \frac{p_k}{\operatorname{card} \Gamma_k}, \tag{1}$$

т. е. $P\{\xi \in \Gamma_k\} = p_k$, а все элементы множества $\Gamma_k$ равновероятны.

Пусть $G$ — произвольная конечно-определенная группа, представленная как фактор-группа $F(X)/R$ свободной группы $F(X)$ конечного ранга $r$ с множеством свободных порождающих $X$ по нормальной подгруппе $R = \operatorname{ncl}(r_1, \dots, r_m)$. Обозначим через $\mathfrak{P}(G) = \langle x_1, \dots, x_r \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ соответствующее представление группы $G$ с помощью порождающих элементов и определяющих соотношений. Любое слово $w$ моноида $\Sigma(X)$ однозначно определяет элемент группы $F(X)$, а естественный гомоморфизм $\varphi : F(X) \to G$ позволяет говорить о значении слова $w$ в группе $G$. В частности, запись $w =_G v$ ($w =_{F(X)} v$) понимается так, что значения слов $w$ и $v$ в группе $G$ ($F(X)$) совпадают.

Заметим, что равенство $w =_G 1$ эквивалентно тому, что существует запись вида

$$w =_{F(X)} g_1 g_2 \dots g_s, \tag{2}$$

где $g_j = \left(r_{i_j}^{\varepsilon_j}\right)^{f_j}$ для некоторого $f_j \in F(X)$, $\varepsilon_j \in \pm 1$, $i_j \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$. Как обычно, запись $g^f$ означает сопряжение $f^{-1} g f$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00489) и Министерства образования РФ (грант Е–02–1.0–191).

Определение 1. *Площадью $S_w$ слова $w =_G 1$ относительно представления* $\mathfrak{P}(G)$ называется наименьшее значение $s$, для которого существует запись вида (2).

Площадь слова $w =_{F(X)} 1$ полагается равной 0.

Определим множество $\Omega_k = \{w =_G 1 \mid |w| \leq k\}$ слов из моноида $\Sigma(X)$, значения которых в группе $G$ равны 1, а длина не превосходит фиксированного числа $k$.

В работе [2] М. Громов вводит

Определение 2. *Усредненной функцией Дена группы $G$ относительно представления* $\mathfrak{P}(G)$ называется функция

$$\sigma(k) = \frac{\sum\limits_{w \in \Omega_k} S_w}{\operatorname{card} \Omega_k}. \tag{3}$$

В [2] также излагается гипотеза о субквадратичности усредненной функции Дена свободных абелевых групп. В статье [3] эта гипотеза доказана.

Усреднение при определении функции $\sigma(k)$ происходит в соответствии с равномерной вероятностью на множестве $\Omega_k$. Существует другая возможность определения усредненной функции. Например, с учетом подхода из работы [1] усредненная функция Дена может быть определена в соответствии со сложностью $\gamma$ и распределением $\{p_k\}$.

В этом случае определим множество $\Omega'_k = \{w =_G 1 \mid \gamma(w) \leq k\}$ слов из моноида $\Sigma(X)$, значения которых в группе $G$ равны 1, а сложность не превосходит фиксированного числа $k$.

Определение 3. *Относительной усредненной функцией Дена группы $G$*, отвечающей представлению $\mathfrak{P}(G)$, сложности $\gamma(w)$ и вероятности $\{p_k\}$, назовем функцию

$$\zeta_{\gamma,\{p_k\}}(k) = \zeta(k) = \frac{\sum\limits_{w \in \Omega'_k} p(w) S_w}{p(\Omega'_k)}. \tag{4}$$

Корректность определения 3 обеспечивается следующим свойством распределения $\{p_k\}$.

Определение 4. Распределение $\{p_k\}$ назовем *хорошим*, если $p_k \neq 0$ для всех $k$.

Только для хороших распределений вероятность любого непустого подмножества $\Sigma(X)$ не равна нулю. Это одно из требований, накладываемых на распределение в работе [1].

Дальше мы будем рассматривать только функцию $\gamma(w) = |w|$, которая является одним из основных примеров сложности. Заметим, что тогда $\Omega'_k = \Omega_k$.

Введем множество $\Delta_k = \{w =_G 1 \mid |w| = k\}$.

Определение 5. *Точной усредненной функцией Дена группы $G$ относительно представления* $\mathfrak{P}(G)$ называется функция

$$\delta(k) = \frac{\sum\limits_{w \in \Delta_k} S_w}{\operatorname{card} \Delta_k}. \tag{5}$$

Функция $\delta(n)$ определена не для всех $n$. Ее область определения будем обозначать через $\operatorname{Dom}(\delta)$. Точная усредненная функция Дена согласуется как с определением 2, так и с определением 3.

Будем писать $f \preceq g$, если для функций $f$ и $g$ существуют константы $a, b, c$ $(a, b > 0)$ такие, что для любого $n > 0$ верно

$$f(n) \leq ag(bn) + c.$$

Заметим, что обычно в работах встречается другое упорядочение. Используют обозначение $f \preceq g$, если для функций $f$ и $g$ существуют константы $a, b, c, d$ $(a, b > 0)$ такие, что для любого $n > 0$ верно $f(n) \leq ag(bn) + cn + d$. Такое определение не позволяет выделить функции, меньшие линейных.

В п. 2 будет доказано, что относительная усредненная функция Дена $\zeta(k)$ группы $G$ ограничена сверху ненулевой константой при некоторых (не слишком жестких) ограничениях на распределение $\{p_k\}$ и саму группу $G$.

В п. 3 мы докажем, что относительная усредненная функция Дена $\zeta(k)$ ограничена снизу положительной константой для любого хорошего распределения $\{p_k\}$ и любой конечно-определенной группы $G$, кроме свободной группы в естественном представлении.

В исключительном случае свободной группы $F(X)$ в естественном представлении $\mathfrak{P}(F(X)) = \langle x_1, \dots, x_r \mid \rangle$ относительная усредненная функция Дена тождественно равна нулю.

## 2. Ограничение сверху

**Предложение 1.** *Пусть $G$ — конечно-определенная группа с условием $\delta(k) \prec k^\beta$ для некоторого $\beta \geq 0$, и пусть $\{p_k\}$ — хорошая вероятность на $\mathbb{N}$ с условием $M\xi^\beta = M < \infty$. Тогда относительная усредненная функция Дена $\zeta(k)$ группы $G$, отвечающая сложности $\gamma(w) = |w|$ и вероятности $\{p_k\}$, не превосходит некоторой положительной константы.*

Доказательство. Условие $\delta(k) \prec k^\beta$ означает, что существует положительная константа $D$ такая, что $\delta(k) \leq Dk^\beta$ для всех $k \geq 1$.

Преобразуем выражение (4), используя равенство вероятностей для слов одинаковой длины и некоторые другие простые свойства:

$$\zeta_{\gamma,\{p_k\}}(n) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{w \in \Delta_k} p(w) S_w}{p(\Omega_n)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k \sum\limits_{w \in \Delta_k} S_w}{p(\Omega_n)}$$
$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k \delta(k) \operatorname{card}(\Delta_k)}{p(\Omega_n)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k \operatorname{card}(\Gamma_k) \delta(k) \frac{\operatorname{card}(\Delta_k)}{\operatorname{card}(\Gamma_k)}}{p(\Omega_n)}.$$

Поскольку $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$, последовательность $p(\Omega_n)$ возрастает. Значит, последовательность $\frac{1}{p(\Omega_n)}$ ограничена сверху некоторой положительной константой $C$. Получаем

$$\zeta_{|\cdot|,\{p_k\}}(n) \leq C \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(k) \leq CD \sum_{k=1}^{n} p_k k^\beta \leq CD \sum_{k=1}^{\infty} p_k k^\beta = CDM\xi^\beta = CDM.$$

Предложение доказано.

**Следствие 1.** *Возьмем любое распределение, имеющее дисперсию* (т. е. *в предыдущих обозначениях $M\xi^2 < \infty$). Выберем $\beta = 2$* (*в этот класс попадают, например, все автоматные группы*). *Тогда относительная усредненная функция Дена $\zeta_{|\cdot|,\{p_k\}}(k)$ группы $G$ не превосходит некоторой положительной константы.*

**Следствие 2.** *Возьмем произвольное распределение со свойством* $\forall m \in \mathbb{N}$ $M\xi^m < \infty$ *(например, таковым является пуассоновское распределение* $\{p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\}$*). Пусть* $G$ *— произвольная конечно-определенная группа, у которой точная усредненная функция Дена* $\delta(k)$ *ограничена сверху многочленом. Тогда относительная усредненная функция Дена* $\zeta_{|\cdot|,\{p_k\}}(k)$ *будет ограничена сверху некоторой константой.*

## 3. Ограничение снизу

Пусть $G$ — конечно-определенная группа.

Если для какого-то $n_0 \in \mathrm{Dom}(\delta)$ выполнено свойство

$$\frac{\mathrm{card}\{w =_{F(X)} 1 \mid |w| = n_0\}}{\mathrm{card}\,\Delta_{n_0}} = q < 1, \tag{6}$$

то $\delta(n_0) > 1 - q$. Действительно, если $w \in \Delta_{n_0}$, но $w \neq_{F(X)} 1$, то $S_w \geq 1$.

**Предложение 2.** *Пусть* $\{p_k\}$ *— произвольное хорошее распределение. Предположим также, что для некоторого* $n_0 \in \mathrm{Dom}(\delta)$ *выполнено неравенство* $\delta(n_0) > D > 0$. *Тогда функция* $\zeta_{|\cdot|,\{p_k\}}(n)$ *для всех* $n \geq n_0$ *ограничена снизу некоторой положительной константой.*

Доказательство. Действительно,

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{n} q_k \delta(k) \geq q_{n_0}\delta(n_0),$$

где $q_k$ — вероятность того, что слово из множества $\Omega_n$ принадлежит множеству $\Delta_k$. Понятно, что $q_k = \frac{p(\Delta_k)}{p(\Omega_n)}$. Поскольку $p(\Omega_n) \leq 1$, получаем $q_k \geq p(\Delta_k)$. Так как распределение хорошее, имеем $p(\Delta_k) > 0$. Следовательно, $\zeta(n) \geq p(\Delta_{n_0})D$ для любого $n \geq n_0$.

Отсюда легко следует

**Предложение 3.** *Пусть* $\mathfrak{P}(G) = \langle x_1, \dots, x_r \mid r_1, \dots, r_m\rangle$ *— произвольное конечное представление, кроме единственного исключения — естественного представления свободной группы. Пусть* $\gamma(w) = |w|$ *и распределение* $\{p_k\}$ *хорошее. Тогда относительная усредненная функция Дена* $\zeta_{\gamma,\{p_k\}}(n)$ *ограничена снизу положительной константой начиная с некоторого номера* $n_0$.

При сделанных предположениях для некоторого $n_0$ выполнено условие (6). Теперь доказательство легко вытекает из предложения 2.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Borovik A. V., Myasnikov A. G., Shpilrain V.* Measuring sets in infinite groups // Contemp. Math. 2002. V. 298. P. 21–42.
2. *Gromov M.* Asymptotic invariants of infinite groups in geometric group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
3. *Кукина Е. Г., Романьков В. А.* Субквадратичность усредненной функции Дена для свободных абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 44, № 4. С. 772–778.


*Статья поступила 20 мая 2004 г.*

*Кукина Екатерина Георгиевна*
*Омский гос. университет, кафедра информационных систем,*
*пр. Мира, 55-А, Омск 644077*
gkukin@omsu.ru