Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.91+517.929

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Г. В. Демиденко, В. А. Лихошвай,
Т. В. Котова, Ю. Е. Хропова

Аннотация: Установлены связи между решениями широкого класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений больших размеров и решениями дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Доказано, что решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при неограниченном увеличении числа уравнений сводится к решению начальной задачи для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Рассматриваемый класс систем содержит, в частности, систему дифференциальных уравнений, возникающую при моделировании многостадийного синтеза вещества.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, обобщенные решения.

§ 1. Введение

В работе мы продолжаем изучать связи между системами обыкновенных дифференциальных уравнений больших размеров и дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{1.1}$$

Первый результат в этом направлении получен при изучении системы дифференциальных уравнений, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества без ветвления [1, 2]. Эта система имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} = g(x_n) - \frac{n-1}{\tau} x_1, \\ \frac{dx_i}{dt} = \frac{n-1}{\tau}(x_{i-1} - x_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau} x_{n-1} - \theta x_n. \end{gathered} \tag{1.2}$$

В [1] установлено, что если неограниченно увеличивать число уравнений n в системе (1.2) и рассматривать только последние компоненты решения задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 04–01–00458, 05–07–98011, 05–07–98012, 05–04–08084), программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 8273), NSF:FIBR N EF–0330786.

Коши с нулевыми начальными данными $x|_{t=0} = 0$, то мы получим равномерно сходящуюся последовательность

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty, \quad t \in [0, T],$$

при этом предельная функция $y(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv -\theta y(t) + g(y(t-\tau)), \quad t > \tau.$$

Следовательно, функция $y(t)$ является решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (1.1) в случае, когда правая часть имеет вид

$$f(t, u, v) = -\theta u + g(v).$$

Связь систем дифференциальных уравнений больших размеров с дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом (1.1) с произвольной правой частью установлена в работе [3].

Цель данной работы — описание широкого класса систем

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t, x), \tag{1.3}$$

состоящих из достаточно большого числа дифференциальных уравнений, для решений которых также имеет место связь с решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{1.4}$$

§ 2. Формулировка основных результатов

Рассмотрим серию систем дифференциальных уравнений вида (1.3). Каждая из систем содержит n обыкновенных дифференциальных уравнений, линейная часть которых определяется числовой матрицей A_n размером $n \times n$, а нелинейные члены задаются первой компонентой вектор-функции $F_n(t, x)$, имеющей вид

$$F_n(t, x) = \begin{pmatrix} g(t, x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Укажем условия на последовательность матриц $\{A_n\}$ и функцию $g(t, u)$, при которых будем рассматривать серию систем дифференциальных уравнений вида (1.3).

1. Пусть $\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n$ — собственные значения матрицы A_n. Предположим, что

$$\lambda_1^n \to -\theta, \quad n \to \infty,$$
$$\operatorname{Re} \lambda_j^n \le -\frac{n-1}{\tau} + \lambda_0, \quad j = 2, \dots, n,$$

где $\lambda_0, \theta \ge 0$, $\tau > 0$ — постоянные.

2. Пусть алгебраическое дополнение α_n элемента $b_{1,n}$ матрицы $(\lambda I - A_n) = (b_{i,j})$ не зависит от λ и

$$|\alpha_n| \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{1-n} \le a < \infty.$$

3. Предположим, что имеет место сходимость

$$\frac{1}{\alpha_n}\prod_{j=2}^{n}\bigl(\lambda_1^n-\lambda_j^n\bigr)\to e^{-\theta\tau},\quad n\to\infty.$$

4. Предположим, что функция $g(t,z)\in C\bigl(R_2^+\bigr)$ ограничена: $|g(t,z)|\le G<\infty$, и удовлетворяет условию Липшица

$$\sup_{t\ge 0}|g(t,z_1)-g(t,z_2)|\le L|z_1-z_2|,\quad z_1,z_2\in R.$$

Для каждой из систем уравнений вида (1.3) рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными условиями

$$\frac{dx}{dt}=A_nx+F_n(t,x),\quad x|_{t=0}=0. \tag{2.1}$$

Будем неограниченно увеличивать число уравнений системы и рассматривать только последнюю компоненту решения задачи Коши (2.1). Тогда на отрезке $[0,T]$ получим последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* 1–4. *Тогда последовательность* $\{x_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[0,T]$ *и предельная функция* $y(t)$ *является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом:*

$$\frac{dy(t)}{dt}=-\theta y(t)+g(t-\tau,y(t-\tau)),\ t>\tau,\quad y(t)=0,\ 0\le t<\tau. \tag{2.2}$$

Замечание. Из доказательства теоремы будут вытекать равномерные оценки для модуля разности

$$|x_n^n(t)-y(t)|,\quad t\in[0,T],\ n\gg 1. \tag{2.3}$$

Из теоремы 1 мы получаем эффективный метод для построения приближения n-й компоненты $x_n(t)$ решения задачи Коши (2.1) с нулевыми начальными условиями и при $n\gg 1$. Именно, для нахождения приближения $x_n(t)$ можно решить начальную задачу для уравнения с запаздывающим аргументом (2.2) и получить оценку (2.3). Очевидно, мы можем таким методом изучать качественные свойства n-й компоненты $x_n(t)$.

Можно показать, что при рассмотрении серии задач Коши для систем вида (1.3) с ненулевыми начальными условиями справедлив аналог теоремы 1. Однако в отличие от нулевых начальных условий здесь возникает интересная особенность, заключающаяся в том, что сходимость последовательности $\{x_n^n(t)\}$ имеет место в пространстве $L_p(0,T)$ и предельная функция $y(t)$ является обобщенным решением дифференциального уравнения (1.4). Следовательно, вместо классических решений уравнения с запаздывающим аргументом (1.4) мы будем иметь дело с обобщенными решениями.

Покажем это на простом примере, когда вектор начальных данных в задаче Коши

$$\frac{dx}{dt}=A_nx+F_n(t,x),\quad x|_{t=0}=x_0 \tag{2.4}$$

имеет первую компоненту, отличную от нуля, а все остальные компоненты нулевые, т. е.

$$x_0=(a,0,\dots,0),\quad a\ne 0.$$

Будем неограниченно увеличивать число уравнений системы и рассматривать только последнюю компоненту решения задачи Коши (2.4). Тогда на отрезке $[0,T]$ получим последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$. Имеет место аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* 1–4. *Тогда для любого* $T > \tau$ *имеет место сходимость*

$$\|x_n^n(t) - y(t),\, L_p(0,T)\| \to 0, \quad p \geq 1, \quad n \to \infty, \tag{2.5}$$

где

$$y(t) = 0 \quad \textit{при} \;\; 0 \leq t < \tau, \tag{2.6}$$

$$y(t) = e^{-\theta(t-\tau)}a + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} g(s, y(s))\, ds \quad \textit{при} \;\; t > \tau. \tag{2.7}$$

Теорема 3. *Предельная функция* $y(t)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W_p^1(\tau, T)$ *для любого* $T > \tau$, *при этом она является обобщенным решением следующей начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом* (1.4)*:*

$$y_t'(t) = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)),\; t > \tau, \quad y(t) = 0,\; t \in [0, \tau), \quad y(\tau+0) = a. \tag{2.8}$$

§ 3. Равномерная сходимость последовательности $\{x_n^n(t)\}$

В этом параграфе мы покажем, что доказательство теоремы 1 сводится к доказательству теорем 1, 2 из работы [1], при этом будет указано, как получаются оценки для модуля разности (2.3).

В силу того, что в задаче Коши (2.1) начальные условия нулевые, n-я компонента решения задачи является решением следующей задачи Коши:

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1^n\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2^n\right) \dots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_n^n\right) x_n = \alpha_n g(t, x_n),$$

$$x_n|_{t=0} = \dots = x_n^{(n-1)}|_{t=0} = 0,$$

где $\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n$ — собственные значения матрицы A_n. По формуле Коши имеем

$$x_n(t) = \alpha_n \int\limits_0^t \psi_n(t-s) g(s, x_n(s))\, ds, \tag{3.1}$$

где функция $\psi_n(t)$ — решение задачи Коши

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1^n\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2^n\right) \dots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_n^n\right) \psi = 0,$$

$$\psi|_{t=0} = \dots = \psi^{(n-2)}|_{t=0} = 0, \quad \psi^{(n-1)}|_{t=0} = 1.$$

Представим эту функцию в виде суммы контурных интегралов.

Пусть Γ_1 — окружность $\{\lambda : |\lambda + \theta| = \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, и Γ_2 — контур в комплексной плоскости, охватывающий собственные значения $\lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n$. Из условия 1 следует существование $n_0 > 1$ такого, что при всех $n > n_0$ собственное число λ_1^n лежит внутри окружности Γ_1, и можно считать контуры Γ_1, Γ_2 не пересекающимися. Более того, можно считать, что окружность Γ_1 в комплексной плоскости лежит правее вертикальной прямой

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = -(n-1)/\tau + \lambda_0 + 1\}.$$

Тогда, используя теорему Коши, нетрудно показать, что функция $\psi_n(t)$ представима в виде

$$\psi_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_1} \frac{e^{t\lambda}\, d\lambda}{(\lambda - \lambda_1^n) P_{n-1}(\lambda)} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_2} \frac{e^{t\lambda}\, d\lambda}{(\lambda - \lambda_1^n) P_{n-1}(\lambda)} = H_n^1(t) + H_n^2(t), \quad (3.2)$$

где

$$P_{n-1}(\lambda) = \big(\lambda - \lambda_2^n\big) \dots \big(\lambda - \lambda_n^n\big).$$

Следовательно, формулу (3.1) можно переписать следующим образом:

$$x_n(t) = \alpha_n \int\limits_0^t \big(H_n^1(t-s) + H_n^2(t-s)\big) g(s, x_n(s))\, ds. \quad (3.3)$$

Будем использовать эту формулу для доказательства теоремы. Для этого изучим предельные свойства последовательностей $\big\{\alpha_n H_n^1(t)\big\}$, $\big\{\alpha_n H_n^2(t)\big\}$.

Вначале рассмотрим первый интеграл в (3.2). В силу интегральной формулы Коши имеем

$$H_n^1(t) = \frac{e^{\lambda_1^n t}}{P_{n-1}(\lambda_1^n)}. \quad (3.4)$$

Отсюда, учитывая условия 1 и 3, получим равномерную сходимость на отрезке $[0, T]$:

$$\alpha_n H_n^1(t) \to e^{-\theta(t-\tau)}, \quad n \to \infty. \quad (3.5)$$

Рассмотрим второй интеграл в (3.2). При $n > n_0$ контур Γ_2 можно рассматривать как границу области

$$D_2 = \{\lambda : |\lambda| < 2\|A_n\|,\ \operatorname{Re}\lambda < -(n-1)/\tau + \lambda_0 + 1\}.$$

Тогда, очевидно, можно записать неравенство

$$\big|e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t)\big| \le 2\|A_n\| \max_{\lambda \in \Gamma_2} |\lambda - \lambda_1^n|^{-1} |P_{n-1}(\lambda)|^{-1} e^{(-\frac{n-1}{\tau} + \lambda_0 + 1 - \operatorname{Re}\lambda_1^n)t}, \quad t > 0.$$

Следовательно, существует $n_1 \ge n_0$ такое, что при всех $n > n_1$

$$\big|e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t)\big| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Учитывая это, получаем представление

$$e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t) = -\int\limits_t^\infty \frac{d}{ds}\big(e^{-\lambda_1^n s} H_n^2(s)\big)\, ds. \quad (3.6)$$

Используя такое представление, изучим предельные свойства последовательности $\big\{\alpha_n H_n^2(t)\big\}$ при $t > \tau$.

Из определения интеграла $H_n^2(t)$, очевидно, имеем

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t)\big) = e^{-\lambda_1^n t} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_2} \frac{e^{t\lambda}\, d\lambda}{P_{n-1}(\lambda)}.$$

Отметим, что контурный интеграл

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_2} \frac{e^{t\lambda}\, d\lambda}{P_{n-1}(\lambda)} \quad (3.7)$$

является решением задачи Коши

$$P_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi = 0,$$

$$\varphi|_{t=0} = \cdots = \varphi^{(n-3)}|_{t=0} = 0,\ \varphi^{(n-2)}|_{t=0} = 1.$$

В силу условия 1 для этого интеграла справедлива оценка

$$|\varphi(t)| \le \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{(-\frac{n-1}{\tau}+\lambda_0)t}, \quad t \ge 0. \tag{3.8}$$

Переписывая формулу (3.6) в виде

$$e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t) = -\int\limits_t^\infty e^{-\lambda_1^n s}\varphi(s)\,ds, \quad n > n_1,$$

и используя неравенство (3.8), получаем оценку

$$\left|\alpha_n e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t)\right| \le |\alpha_n| \int\limits_t^\infty \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} e^{(-\frac{n-1}{\tau}+\lambda_0-\operatorname{Re}\lambda_1^n)s}\,ds.$$

Пусть $\theta_0 > 0$ такое, что $\lambda_0 - \operatorname{Re}\lambda_1^n \le \theta_0$, тогда при $n > n_1$ будем иметь неравенство

$$\left|\alpha_n e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t)\right| \le |\alpha_n| \int\limits_t^\infty \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} e^{(-\frac{n-1}{\tau}+\theta_0)s}\,ds.$$

Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$\left|\alpha_n e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t)\right| \le \frac{|\alpha_n|}{(\frac{n-1}{\tau}-\theta_0)^{n-1}} \int\limits_{(\frac{n-1}{\tau}-\theta_0)t}^\infty \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\xi} d\xi.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\left|\alpha_n H_n^2(t)\right| \le e^{\operatorname{Re}\lambda_1^n t}|\alpha_n| \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{1-n} \left(1 - \frac{\theta_0\tau}{n-1}\right)^{1-n} (1 - S_n(t)), \quad t \ge 0, \tag{3.9}$$

где

$$S_n(t) = 1 - e^{-\omega t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(\omega t)^k}{k!}, \quad \omega = \frac{n-1}{\tau} - \theta_0.$$

В работе [1] изучены предельные свойства последовательности $\{S_n(t)\}$. В частности, из теорем 1, 2 в [1] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равномерная сходимость

$$S_n(t) \to 1, \quad t \in [\tau+\varepsilon, T],\ n \to \infty, \tag{3.10}$$

$$S_n(t) \to 0, \quad t \in [0, \tau-\varepsilon],\ n \to \infty. \tag{3.11}$$

Учитывая (3.10) и условия 1, 2, из неравенства (3.9) получаем равномерную сходимость

$$\alpha_n H_n^2(t) \to 0, \quad n \to \infty,$$

на отрезке $[\tau+\varepsilon, T]$ для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда согласно (3.2), (3.5) получаем равномерную сходимость на отрезке $[\tau+\varepsilon, T]$:

$$\alpha_n \psi_n(t) \to e^{-\theta(t-\tau)}, \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0, \tau-\varepsilon]$ есть равномерная сходимость

$$\alpha_n \psi_n(t) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.13}$$

В силу определения функции $\psi_n(t)$ имеем $\psi_n(0) = 0$. С другой стороны, из (3.2) следует, что

$$\psi_n(0) = H_n^1(0) + H_n^2(0),$$

поэтому

$$H_n^1(0) = -H_n^2(0). \tag{3.14}$$

Из формулы (3.4) вытекает тождество

$$e^{-\lambda_1^n t} H_n^1(t) \equiv \frac{1}{P_{n-1}(\lambda_1^n)}.$$

Тогда ввиду (3.14)

$$e^{-\lambda_1^n t} H_n^1(t) \equiv -H_n^2(0).$$

Следовательно, учитывая представление (3.2), получаем

$$e^{-\lambda_1^n t} \psi_n(t) = -H_n^2(0) + e^{-\lambda_1^n t} H_n^2(t)$$

или, используя контурный интеграл $\varphi(t)$, определенный в (3.7), будем иметь

$$e^{-\lambda_1^n t} \psi_n(t) = \int\limits_0^t \frac{d}{ds}\big(e^{-\lambda_1^n s} H_n^2(s)\big)\, ds = \int\limits_0^t e^{-\lambda_1^n s} \varphi(s)\, ds.$$

Из этого представления и неравенства (3.8) выводим оценку

$$|\alpha_n \psi_n(t)| \le e^{\operatorname{Re} \lambda_1^n t} |\alpha_n| \int\limits_0^t \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} e^{(-\frac{n-1}{\tau} + \lambda_0 - \operatorname{Re} \lambda_1^n)s}\, ds$$

и, вычисляя интеграл, как при выводе (3.9), приходим к неравенству

$$|\alpha_n \psi_n(t)| \le e^{\operatorname{Re} \lambda_1^n t} |\alpha_n| \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{1-n} \left(1 - \frac{\theta_0 \tau}{n-1}\right)^{1-n} S_n(t).$$

Следовательно, учитывая условия 1, 2 и (3.11), получаем равномерную сходимость (3.13) на отрезке $[0, \tau-\varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$.

Используя (3.12), (3.13) и представление (3.3), установим равномерную сходимость последовательности $\{x_n^n(t)\}$, при этом для предельной функции $y(t)$ будем иметь тождество

$$y(t) \equiv \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)} g(s, y(s))\, ds, \quad t > \tau, \tag{3.15}$$

из которого, очевидно, вытекает, что функция $y(t)$ является решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (1.4).

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{x_n^n(t)\}$ покажем, что эта последовательность является фундаментальной в $C[0,T]$. Для простоты будем считать, что в условии 2 константа a равна 1.

В силу представления (3.1) для любых n, l имеем

$$x_{n+l}(t) - x_n(t) = \int\limits_0^t (\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(t-s) - \alpha_n\psi_n(t-s))g(s, x_{n+l}(s))\,ds$$

$$+ \int\limits_0^t \alpha_n\psi_n(t-s)(g(s, x_{n+l}(s)) - g(s, x_n(s)))\,ds = I^1_{n,l}(t) + I^2_{n,l}(t). \quad (3.16)$$

Рассмотрим первый интеграл $I^1_{n,l}(t)$. Сделав замену $\xi = t - s$, перепишем его в виде

$$I^1_{n,l}(t) = \int\limits_0^t (\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi) - \alpha_n\psi_n(\xi))g(t-\xi, x_{n+l}(t-\xi))\,d\xi. \quad (3.17)$$

Возьмем произвольно $\varepsilon \in (0,1)$. Учитывая условие 4, на отрезке $[0, \tau(1-\varepsilon)]$ получим оценку

$$\max_{t\in[0,\tau(1-\varepsilon)]} \left|I^1_{n,l}(t)\right| \le G\tau \max_{\xi\in[0,\tau(1-\varepsilon)]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)| + |\alpha_n\psi_n(\xi)|). \quad (3.18)$$

В силу (3.13) правая часть в этой оценке стремится к нулю при $n \to \infty$.

Оценим интеграл $I^1_{n,l}(t)$ на отрезке $[\tau(1-\varepsilon), \tau(1+\varepsilon)]$. Вначале покажем, что функция $|\alpha_n\psi_n(t)|$ ограничена при $t \ge 0$. Действительно, из представления (3.2) имеем

$$|\alpha_n\psi_n(t)| \le \left|\alpha_n H^1_n(t)\right| + \left|\alpha_n H^2_n(t)\right|. \quad (3.19)$$

В силу сходимости (3.5) существует $n_2 \ge n_1$ такое, что при всех $n > n_2$

$$\left|\alpha_n H^1_n(t)\right| \le e^{2\theta_0\tau}.$$

Вследствие неравенства (3.9), определения функции $S_n(t)$ и условий 1, 2 существует $n_3 \ge n_2$ такое, что при всех $n > n_3$

$$\left|\alpha_n H^2_n(t)\right| \le e^{2\theta_0\tau}.$$

Тогда из (3.19) при $n > n_3$ вытекает оценка

$$|\alpha_n\psi_n(t)| \le 2e^{2\theta_0\tau}, \quad t \ge 0. \quad (3.20)$$

Учитывая это неравенство и (3.18), получим

$$\max_{t\in[\tau(1-\varepsilon),\tau(1+\varepsilon)]} \left|I^1_{n,l}(t)\right| \le G\tau \max_{\xi\in[0,\tau(1-\varepsilon)]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)| + |\alpha_n\psi_n(\xi)|) + 8G\tau\varepsilon e^{2\theta_0\tau}. \quad (3.21)$$

Оценим теперь $I^1_{n,l}(t)$ на отрезке $[\tau(1+\varepsilon), T]$. Перепишем представление (3.17) в виде

$$I^1_{n,l}(t) = \int\limits_0^{\tau(1-\varepsilon)} (\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi) - \alpha_n\psi_n(\xi))g(t-\xi, x_{n+l}(t-\xi))\,d\xi$$

$$+ \int\limits_{\tau(1-\varepsilon)}^{\tau(1+\varepsilon)} (\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi) - \alpha_n\psi_n(\xi))g(t-\xi, x_{n+l}(t-\xi))\,d\xi$$

$$+ \int\limits_{\tau(1+\varepsilon)}^{t} (\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi) - \alpha_n\psi_n(\xi))g(t-\xi, x_{n+l}(t-\xi))\,d\xi = J^1_{n,l}(t) + J^2_{n,l}(t) + J^3_{n,l}(t).$$

Для первых двух слагаемых, очевидно, справедливы оценки вида (3.18), (3.21). Для получения оценки слагаемого $J^3_{n,l}(t)$ будем учитывать сходимость (3.12). В силу условия 4, очевидно, имеем

$$\max_{t\in[\tau(1+\varepsilon),T]}\left|J^3_{n,l}(t)\right| \\ \le G(T-\tau)\max_{\xi\in[\tau(1+\varepsilon),T]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|+|\alpha_n\psi_n(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|).$$

Согласно (3.12) правая часть в этой оценке стремится к нулю при $n\to\infty$.

Из сказанного выше при $n>n_3$ вытекает неравенство

$$\max_{t\in[\tau(1+\varepsilon),T]}\left|I^1_{n,l}(t)\right| \le G\tau\max_{\xi\in[0,\tau(1-\varepsilon)]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)|+|\alpha_n\psi_n(\xi)|)+8G\tau\varepsilon e^{2\theta_0\tau} \\ +G(T-\tau)\max_{\xi\in[\tau(1+\varepsilon),T]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|+|\alpha_n\psi_n(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|). \quad (3.22)$$

Суммируя оценки (3.18), (3.21) и (3.22), получаем следующее неравенство для первого интеграла в (3.16):

$$\max_{t\in[0,T]}\left|I^1_{n,l}(t)\right| \le G\tau\max_{\xi\in[0,\tau(1-\varepsilon)]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)|+|\alpha_n\psi_n(\xi)|)+8G\tau\varepsilon e^{2\theta_0\tau} \\ +G(T-\tau)\max_{\xi\in[\tau(1+\varepsilon),T]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|+|\alpha_n\psi_n(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|), \quad (3.23)$$

справедливое при $n>n_3$.

Рассмотрим второй интеграл $I^2_{n,l}(t)$ в (3.16). В силу условия Липшица и неравенства (3.20) имеем оценку

$$\left|I^2_{n,l}(t)\right| \le 2e^{2\theta_0\tau}L\int_0^t|x_{n+l}(s)-x_n(s)|\,ds.$$

Из представления (3.16) получим

$$|x_{n+l}(t)-x_n(t)| \le \left|I^1_{n,l}(t)\right|+2e^{2\theta_0\tau}L\int_0^t|x_{n+l}(s)-x_n(s)|\,ds.$$

Используя неравенство Гронуолла, будем иметь

$$|x_{n+l}(t)-x_n(t)| \le e^{Mt}\left|I^1_{n,l}(t)\right|, \quad M=2e^{2\theta_0\tau}L.$$

Отсюда

$$\max_{t\in[0,T]}|x_{n+l}(t)-x_n(t)| \le e^{MT}\max_{t\in[0,T]}\left|I^1_{n,l}(t)\right|. \quad (3.24)$$

В силу (3.12), (3.13) при $n\to\infty$ имеет место сходимость

$$\max_{\xi\in[0,\tau(1-\varepsilon)]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)|+|\alpha_n\psi_n(\xi)|)\to 0,$$

$$\max_{\xi\in[\tau(1+\varepsilon),T]}(|\alpha_{n+l}\psi_{n+l}(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|+|\alpha_n\psi_n(\xi)-e^{-\theta(\xi-\tau)}|)\to 0.$$

Следовательно, учитывая неравенства (3.23) и (3.24), для любого $\varepsilon>0$ можно указать $n_\varepsilon\ge n_3$ такое, что при всех $n>n_\varepsilon$, $l\ge 1$ будет выполняться оценка

$$\max_{t\in[0,T]}|x_{n+l}(t)-x_n(t)| \le 10GT\varepsilon e^{MT+2\theta_0\tau}, \quad M=2e^{2\theta_0\tau}L. \quad (3.25)$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что последовательность $\{x_n^n(t)\}$ фундаментальна в $C[0,T]$ и тем самым имеет предел $y(t) \in C[0,T]$. Ввиду (3.1), (3.13), очевидно, $y(t) = 0$ при $t \le \tau$. Учитывая равномерную сходимость последовательности $\{x_n^n(t)\}$, (3.1) и (3.12), получаем, что при $t > \tau$ функция $y(t)$ удовлетворяет тождеству (3.15). Следовательно, $y(t)$ является решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

Теорема доказана.

Отметим, что, переходя в неравенстве (3.25) к пределу при $l \to \infty$, мы получим при всех $n > n_\varepsilon$ следующую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]} |y(t) - x_n(t)| \le 10GT\varepsilon e^{MT+2\theta_0\tau}, \quad M = 2e^{2\theta_0\tau}L.$$

§ 4. Обобщенные решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

Переходим к рассмотрению случая, когда начальные условия в задаче Коши (2.4) не являются нулевыми. Нетрудно показать, что при таких начальных условиях n-я компонента решения задачи Коши (2.4) представляет собой решение следующей задачи:

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1^n\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2^n\right)\dots\left(\frac{d}{dt} - \lambda_n^n\right)x_n = \alpha_n g(t, x_n),$$

$$x_n|_{t=0} = \dots = x_n^{(n-2)}|_{t=0} = 0, \quad x_n^{(n-1)}|_{t=0} = \alpha_n a,$$

где $\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n$ — собственные значения матрицы A_n. По формуле Коши имеем аналог (3.1):

$$x_n(t) = \alpha_n\psi_n(t)a + \alpha_n\int_0^t \psi_n(t-s)g(s, x_n(s))\,ds. \tag{4.1}$$

Согласно (3.12), (3.13) для любого $\varepsilon > 0$ на отрезках $[0, \tau-\varepsilon]$, $[\tau+\varepsilon, T]$ при $n \to \infty$ имеет место равномерная сходимость

$$\alpha_n\psi_n(t) \to \begin{cases} 0 & \text{на } [0, \tau-\varepsilon], \\ e^{-\theta(t-\tau)}a & \text{на } [\tau+\varepsilon, T]. \end{cases}$$

Следовательно, из представления (4.1) и теоремы 1 в силу теоремы Лебега получаем сходимость (2.5), а также равенства (2.6), (2.7) для предельной функции $y(t)$.

Теорема 2 доказана.

Докажем теорему 3. Проверим, что $y(t) \in W_p^1(\tau, 3\tau)$. Из явного выражения

$$y(t) = e^{-\theta(t-\tau)}a + \int_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)}g(s, y(s))\,ds \quad \text{при} \quad t > \tau$$

вытекает, что $y(t) \in C[\tau, 3\tau] \cap C^1(\tau, 2\tau) \cap C^1(2\tau, 3\tau)$. Учитывая, что $y(t) = 0$ при $0 < t < \tau$, на интервале $(\tau, 2\tau)$ имеем

$$y'(t) = -\theta\left(e^{-\theta(t-\tau)}a + \int_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)}g(s,0)\,ds\right) + g(t-\tau, 0) = -\theta y(t) + g(t-\tau, 0),$$

а на интервале $(2\tau, 3\tau)$ —

$$y'(t) = -\theta\left(e^{-\theta(t-\tau)}a + \int\limits_0^\tau e^{-\theta(t-s-\tau)}g(s,0)\,ds + \int\limits_\tau^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)}g(s,y(s))\,ds\right) \\ + g(t-\tau, y(t-\tau)) = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)).$$

Отсюда, поскольку $y(\tau+0) = a$, получим

$$y'(2\tau-0) = -\theta y(2\tau) + g(\tau,0), \quad y'(2\tau+0) = -\theta y(2\tau) + g(\tau,a)$$

и, значит,

$$y'(2\tau+0) - y'(2\tau-0) = g(\tau,a) - g(\tau,0).$$

Поэтому $y'(2\tau+0) = y'(2\tau-0)$ тогда и только тогда, когда $g(\tau,a) = g(\tau,0)$. Следовательно, для произвольной функции $g(t,z)$, удовлетворяющей условию 4, функция $y(t)$ не принадлежит классу $C^1(\tau,3\tau)$, но имеет обобщенную производную $D_t y(t)$ на интервале $(\tau,3\tau)$. Из предыдущего вытекает явное выражение

$$D_t y(t) = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad \tau < t < 3\tau.$$

Тем самым функция $y(t) \in W_p^1(\tau,3\tau)$ есть обобщенное решение задачи (2.8).

Аналогичные рассуждения можно провести на произвольном интервале (τ, T).

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
2. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
3. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А.* О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 538–552.

Статья поступила 21 октября 2005 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru

Лихошвай Виталий Александрович
Институт цитологии и генетики СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 2, Новосибирск 630090
likho@bionet.nsc.ru

Котова Татьяна Викторовна, *Хропова Юлия Евгеньевна*
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
tanya_kot@gorodok.net, julia@gorodok.net