Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 514.76

ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВЫ ПРОСТРАНСТВА РАЗМЕРНОСТИ ДВА

В. А. Кыров

Аннотация: Изучаются двумерные многообразия, которые в бесконечно малой окрестности имеют структуру гельмгольцевых плоскостей. Исследуются основные объекты гельмгольцевых многообразий, в частности, определяется метрическая функция f, вводятся квазиметрическая связность и геодезическая. Определяется квазидлина кривой. Для некоторых гельмгольцевых пространств доказывается существование изотермических координат.

Ключевые слова: гельмгольцева плоскость, гельмгольцево многообразие, метрическая функция, структурные функции, квазиметрическая связность, изотермические координаты, квазидлина.

1. Введение. Как хорошо известно, риманово многообразие в бесконечно малой окрестности произвольной точки имеет структуру евклидова пространства. В данной работе изучаются двумерные многообразия, которые в бесконечно малой окрестности имеют структуру гельмгольцевых плоскостей. Исследуются основные объекты гельмгольцевых пространств, в частности, определяется метрическая функция f как основная характеристика (это аналог метрики в римановых пространствах, но без требования выполнения метрических аксиом), вводятся квазиметрическая связность, при параллельном переносе относительно которой сохраняется метрическая функция (в римановых пространствах аналогичная связность называется *метрической*), и геодезическая. Определяется квазидлина кривой. Для некоторых гельмгольцевых пространств доказывается существование изотермических координат, т. е. координат, в которых метрическая функция с точностью до некоторого непостоянного множителя совпадает с метрической функцией гельмгольцевой плоскости.

Г. Г. Михайличенко в монографии [1] построил полную классификацию двумерных *феноменологически симметричных геометрий*, т. е. геометрий, которые вкратце можно описать следующим образом. Существуют гладкое многообразие M, открытое и плотное подмногообразие M' из прямого произведения $M \times M$, а также достаточно гладкая невырожденная функция $f : M' \to \mathbb{R}$, которую будем называть *метрической*, и гладкая функция шести переменных $\Phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ такие, что для любого кортежа из четырех произвольных точек $\langle xyzu \rangle$, каждая пара из которого принадлежит множеству M', имеет место функциональное уравнение

$$\Phi(f(xy), f(xz), f(xu), f(yz), f(yu), f(zu)) = 0,$$

где $x, y, z, u \in M$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01071).

Этому свойству удовлетворяют некоторые известные, а также и неизвестные геометрии. К известным геометриям со свойством феноменологической симметрии принадлежат плоскость Евклида, псевдоевклидова плоскость, симплектическая плоскость. Ранее неизвестные двумерные геометрии со свойством феноменологической симметрии таковы:

собственно гельмгольцева плоскость Γ^2 с метрической функций

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2] \exp\left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \tag{1}$$

где $\gamma > 0$, $\gamma = \mathrm{const}$, x^1 и x^2 — локальные координаты точки x, причем функция arctg рассматривается однозначной с областью значений в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$, а множество $M' \subset \Gamma^2 \times \Gamma^2$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$, первые координаты которых различны (этот термин появился из анализа работы Гельмгольца «О фактах, лежащих в основании геометрии», где он предлагал изучать геометрию, в которой роль окружности выполняет логарифмическая спираль);

псевдогельмгольцева плоскость $P\Gamma^2$,

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2] \exp\left(2\beta \operatorname{Ar(c)th} \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \tag{2}$$

где $\beta = \mathrm{const}$, $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, причем выбираются функция Arth, если аргумент по модулю меньше единицы, и функция Arcth, если аргумент по величине больше единицы, множество $M' \subset P\Gamma^2 \times P\Gamma^2$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$, координаты которых, с одной стороны, не удовлетворяют условиям $x^1 - y^1 = \pm(x^2 - y^2)$, а с другой — $x^1 \neq y^1$;

дуальногельмгольцева плоскость D^2 с метрической функцией

$$f(xy) = (x^1 - y^1)^2 \exp\left(2 \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right), \tag{3}$$

причем множество $M' \subset D^2 \times D^2$ состоит из пар точек $\langle xy \rangle$, первые координаты которых различны;

симплициальная плоскость S^2,

$$f(xy) = \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}, \tag{4}$$

где область определения $M' \subset S^2 \times S^2$ этой метрической функции состоит из пар точек $\langle xy \rangle$ с различными первыми координатами.

Объединим в одном выражении метрические функции (1)–(3):

$$f(xy) = [(x^1 - y^1)^2 - \varepsilon(x^2 - y^2)^2] \exp\left[2\alpha \Phi_\varepsilon\left(\frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}\right)\right], \tag{5}$$

где для собственно гельмгольцевой плоскости Γ^2

$$\varepsilon = -1, \ \alpha = \gamma, \quad \Phi_{-1}(x) = \operatorname{arctg} x;$$

для псевдогельмгольцевой плоскости $P\Gamma^2$

$$\varepsilon = 1, \ \alpha = \beta, \quad \Phi_1(x) = \operatorname{Ar(c)th} x;$$

для дуальногельмгольцевой плоскости D^2

$$\varepsilon = 0, \ \alpha = 1, \quad \Phi_0(x) = x.$$

Ниже под термином «плоскость Гельмгольца», если нет опасности путаницы, будем понимать любую из этих четырех плоскостей, используя для краткости обозначение F^2.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки $x = (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$, $y = (x^1, x^2)$ плоскости F^2, тогда

$$f = \left[(dx^1)^2 - \varepsilon(dx^2)^2\right] \exp\left[2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)\right], \tag{5'}$$

$$f = \frac{dx^2}{dx^1}. \tag{4'}$$

Перейдем теперь от специально выбранной системы локальных координат к произвольной криволинейной системе координат. Тогда метрические функции (5′) и (4′) примут следующий вид:

$$f = g^\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j \exp\left[2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{a^2_i dx^i}{a^1_j dx^j}\right)\right], \quad i, j = 1, 2, \tag{5''}$$

$$f = \frac{a^2_i dx^i}{a^1_j dx^j}, \quad i, j = 1, 2, \tag{4''}$$

где $a^i_j = \partial x^i/\partial y^j$, $g^\varepsilon_{ij} = a^1_i a^1_j - \varepsilon a^2_i a^2_j$. Заметим, что в функциях (5″) и (4″) формы $a^i_j\, dx^j$ замкнуты.

Пусть G — группа диффеоморфизмов плоскости F^2. Преобразование g назовем *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию f, т. е. оставляет ее инвариантной. В монографии [1] показано, что по метрической функции f находится трехпараметрическая группа движений G, а по этой группе движений восстанавливается метрическая функция f с точностью до «масштабной» гладкой функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Решая эту задачу для выше приведенных плоскостей, приходим к группам движений G_{F^2}, которые в выше определенных координатах и специальной системе параметров для плоскостей Γ^2, $P\Gamma^2$, D^2 задаются уравнениями

$$x' = ax + \varepsilon by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (a^2 - \varepsilon b^2)\exp[2\alpha\Phi_\varepsilon(b/a)] = 1; \tag{6}$$

а для плоскости S^2 — уравнениями

$$x' = ax + c, \quad y' = ay + d, \quad a \neq 0. \tag{7}$$

Очевидно, что эти группы являются подгруппами группы аффинных преобразований. Выделим в группах G_{F^2} подгруппы $O(F^2)$ по следующему принципу. В G_{F^2} существует нормальная подгруппа T, являющаяся группой сдвигов. Фактор-группа G_{F^2}/T изоморфна подгруппе $O(F^2)$. Тогда G_{F^2} является полупрямым произведением $O(F^2)$ и T. Эту подгруппу будем называть *группой вращений плоскости* F^2. В соответствующей системе координат и параметров они задаются следующими уравнениями:

$$x' = ax + \varepsilon by, \quad y' = bx + ay, \quad (a^2 - \varepsilon b^2)\exp[2\alpha\Phi_\varepsilon(b/a)] = 1 \tag{6'}$$

и

$$x' = ax, \quad y' = ay, \quad a \neq 0. \tag{7'}$$

Можно показать, что у группы $O(F^2)$ имеется двухточечный инвариант:

для плоскости $F^2 = \Gamma^2$, $P\Gamma^2$, D^2

$$(x,y)_{F^2} = (x^1y^1 - \varepsilon x^2y^2)\exp(\alpha\Phi_\varepsilon(x^2/x^1) + \alpha\Phi_\varepsilon(y^2/y^1)), \tag{8}$$

для плоскости S^2

$$(x,y)_{S^2} = \sqrt{x^2y^2/x^1y^1}. \tag{9}$$

Пусть V^2 — двумерное вещественное линейное пространство с фиксированным базисом e_1, e_2. В V^2 определим гельмгольцево квазискалярное произведение (аналог скалярного произведения в евклидовых пространствах) между векторами ξ и η, которое относительно базиса e_1, e_2 в координатах задается формулой (8) или (9) и обозначается через $(\xi,\eta)_{F^2}$, где $F^2 = \Gamma^2$, $P\Gamma^2$, D^2, S^2 [2]. Заметим, что введенное здесь квазискалярное произведение не удовлетворяет обычным свойствам евклидова скалярного произведения. Так, оно не является билинейным и не определено для нулевых векторов.

Области определения функций $(\xi,\eta)_{\Gamma^2}$, $(\xi,\eta)_{P\Gamma^2}$, $(\xi,\eta)_{D^2}$, $(\xi,\eta)_{S^2}$ обозначим через $L' \subset V^2 \times V^2$, а области определения функций $(\xi,\xi)_{\Gamma^2}$, $(\xi,\xi)_{P\Gamma^2}$, $(\xi,\xi)_{D^2}$ — через $L \subset V^2$. Несложно показать, что $L' \subset L \times L$.

2. Двумерные гельмгольцевы пространства. Приступим теперь к построению двумерных гельмгольцевых многообразий, которые в бесконечно малой окрестности произвольной точки устроены как гельмгольцевы плоскости. Предварительно определим структурные функции, через которые выразим метрические функции этих пространств. Построения в этом пункте будут носить исключительно локальный характер.

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $T(M)$ — касательное расслоение со стандартным слоем V^n, $L(M)$ — расслоение линейных реперов u со структурной группой $GL(n,\mathbb{R})$. Каждый линейный репер u из $L(M)$ можно рассмотреть как изоморфизм V^n на $T_x(M)$ [3]. Пусть $(e_1,\dots,e_n)$ — фиксированный базис в V^n. Тогда $ue_i = X_i$, где $i = 1,\dots,n$, следовательно, $u\xi = \xi^i X_i \in T_x(M)$, причем $\xi = \xi^i e_i$. Пусть G — замкнутая подгруппа Ли группы $GL(n,\mathbb{R})$. Редуцированное подрасслоение группы $GL(n,\mathbb{R})$ к подгруппе G в координатной окрестности $U \subset M$ обозначим через $Q(U,G) \subset L(U)$ или просто через Q. Это подрасслоение является подмногообразием в $L(U)$ [4].

Рассмотрим гладкое отображение

$$\omega : Q_x(U) \times \{v\} \times T_x(U) \to V^n, \tag{10}$$

которое зададим формулой

$$\omega_v(u,X) = a_i^j X^i e_j, \tag{11}$$

где u — произвольный репер из Q_x, v — координатный репер из $L_x(U)$, $X \in T_x(U)$ — вектор с координатами $X^1,\dots,X^n$ в базисе v, $a_j^i = (X^{-1})_j^i$ — обратная матрица отличия репера u от v. Поскольку u — произвольный репер из Q_x, а v — фиксированный репер из $L_x(U)$, то для матрицы a справедливо разложение

$$a = bc \tag{12}$$

или, в координатах,

$$a_j^i = b_k^i c_j^k,$$

где в точке из U матрица b — произвольный элемент подгруппы G, а c — некоторая фиксированная матрица из $GL(n,\mathbb{R})$. Включая некоторый репер $u_0 \in Q_x$

в гладкое сечение из $Q(U)$, а вектор $X \in T_x(U)$ в гладкое векторное поле из $T(U)$, приходим к гладкости соответствия $x \mapsto \omega$ в координатной окрестности $U \subset M$. Тогда из (11) будет следовать гладкость в U элементов матрицы a. Непосредственный выбор этого сечения зависит от уточнения задачи. Рассматривая произвольное гладкое сечение из расслоения $Q(U)$ и сравнивая его с выше определенным, приходим в окрестности U к гладкости элементов матриц a, b и c разложения (12).

Определение 1. Компоненты матрицы a называются *структурными функциями.*

Лемма. *При переходе от системы координат в U к системе координат в U' структурные функции a в точке из непустого пересечения $U \cap U'$ преобразуются по закону*

$$a'^j_i = a^j_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i},$$

где a — структурные функции в координатной окрестности U, а a' — структурные функции в координатной окрестности U', причем $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Из леммы следует, что функции (11) инвариантны относительно произвольной замены координат.

Заметим, что в произвольной точке $x \in U$ в силу произвольности репера $u \in Q_x(M)$ отображение (10) равносильно семейству изоморфизмов $\{\rho_x\}$:

$$\rho_x(X) = b^i_k c^k_j X^j e_i. \tag{11'}$$

Очевидно, соответствие $x \to \rho_x$ является гладким.

Пусть теперь M — гладкое двумерное многообразие. Предположим, что G — это группа гельмгольцевых вращений $O(F^2)$. Рассмотрим редуцированное подрасслоение $Q(U) = Q(U, O(F^2))$ расслоения линейных реперов $L(U)$. Этому подрасслоению соответствует отображение

$$\omega_v : Q_x(U) \times T_x(U) \to V^2.$$

Из (11) следует, что в координатах для отображения ω_v имеем

$$\omega_v(u, X) = b^j_k c^k_i X^i e_j, \quad i, j, k = 1, 2, \tag{13}$$

где в точке из U b — произвольная матрица из $O(F^2)$. Аналогичным образом для этого подрасслоения определяется семейство изоморфизмов вида (11′). Заметим, что (13) при произвольном u задает семейство векторов в V^2, которые определяют одно и то же значение квазискалярного произведения $(\xi, \xi)_{F^2}$. Пусть в (13) X — произвольный вектор, удовлетворяющий условию $\rho_x(X) \in L$. Тогда в $T_x(M)$ естественно переносится квазискалярное произведение по формуле

$$f(X, Y) = (\omega_v(u, X), \omega_v(u, Y))_{F^2}, \tag{14}$$

причем $X, Y \in T_x(M)$. Мы получили гладкое отображение для гладких векторных полей X и Y, в каждой точке из U образы которых относительно (11′) принадлежат области определения квазискалярного произведения. Заметим, что формула (14) может служить определением гладкого сечения в $Q(U)$, о котором говорилось выше.

Определение 2. Функция

$$f : Q_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \to \mathbb{R},$$

определенная формулой (14), называется *метрической функцией* гельмгольцева двумерного многообразия.

Обратим внимание на то, что метрическая функция (14) в произвольной точке x гельмгольцева многообразия M является инвариантом преобразований $a \to ba$, где $b \in O(F^2)$.

Определение 3. Двумерное гладкое многообразие M назовем *собственно гельмгольцевым, псевдогельмгольцевым, дуальногельмгольцевым или симплициальным*, если в касательном пространстве $T_x(M)$ произвольной точки x введена функция

$$(\omega_v(u,X),\omega_v(u,Y))_{\Gamma^2},\ (\omega_v(u,X),\omega_v(u,Y))_{P\Gamma^2},\ (\omega_v(u,X),\omega_v(u,Y))_{D^2}$$

или $(\omega_v(u,X),\,\omega_v(u,Y))_{S^2}$ соответственно.

Ниже, если нет опасности путаницы, эти многообразия мы будем называть просто *гельмгольцевыми*.

Найдем теперь явный вид метрической функции (14) в окрестности U. Пусть отображение ω_v переводит векторы $X, Y \in T_x(M)$ соответственно в векторы $\omega_v(u,X) = a_i^j X^i e_j$, $\omega_v(u,Y) = a_i^j Y^i e_j$. Тогда метрическая функция f принимает следующий вид:

для собственно гельмгольцевых, псевдогельмгольцевых и дуальногельмгольцевых пространств

$$f(X,Y) = g_{ij}^{\varepsilon} X^i Y^j \exp\left(\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{a_k^2 X^k}{a_l^1 X^l}\right) + \alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{a_k^2 Y^k}{a_l^1 Y^l}\right)\right); \tag{15}$$

для симплициальных пространств

$$f(X,Y) = \sqrt{\frac{a_k^2 X^k a_j^2 Y^j}{a_l^1 X^l a_i^1 Y^i}}, \tag{16}$$

причем

$$g_{ij}^{\varepsilon} = a_i^1 a_j^1 - \varepsilon a_i^2 a_j^2, \tag{17}$$

где $\varepsilon = -1, 1, 0$ и $i, j, k, l = 1, 2$. Можно показать, что символы (17) образуют тензор. Следует заметить, что этот тензор зависит от выбора структурных функций, т. е. от матрицы b, хотя метрическая функция f от такого выбора не зависит. Несложно также проверить, что метрические функции (15) и (16) остаются инвариантными при переходе к произвольной другой системе координат.

Дифференциалы координат dx^i образуют контравариантный тензор первого ранга, которому однозначно соответствует вектор в касательном пространстве $T_x(M)$. Положим в (15) и (16) $X^i = Y^i = dx^i$. Тогда будем иметь

$$f = g_{ij}^{\varepsilon}\, dx^i dx^j \exp\left(2\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{a_k^2 dx^k}{a_l^1 dx^l}\right)\right); \tag{15$'$}$$

$$f = \frac{a_j^2 dx^j}{a_i^1 dx^i}. \tag{16$'$}$$

Заметим, что метрические функции $(5'')$ и $(4'')$ в координатной окрестности U можно получить как частный случай метрических функций $(15')$ и $(16')$ соответственно. Для этого необходимо в U потребовать замкнутость форм $a_j^i\, dx^j$ для некоторой матрицы a.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующим определением. Гельмгольцево многообразие M будем называть *локально плоским*, если в координатной окрестности произвольной точки можно подобрать систему координат и матрицу b в разложении (12) такие, что $a^i_j = \delta^i_j$.

Обратим внимание на то, что существуют два эквивалентных способа определения структуры гельмгольцева многообразия. Это либо задание в стандартном слое V^2 квазискалярного произведения, либо задание в V^2 действия группы гельмгольцевых вращений $O(\Gamma^2)$. Эта эквивалентность является следствием того, что по группе вращений находится квазискалярное произведение, а по квазискалярному произведению восстанавливается сама группа.

3. Квазиметрическая связность гельмгольцевых двумерных многообразий. Приступим теперь к исследованию связностей в гельмгольцевых двумерных пространствах. Построим линейные связности в расслоении линейных реперов этих многообразий, которые аналогичны метрической связности в римановых пространствах, т. е. связности, при параллельном переносе относительно которых сохраняются метрические функции. Построения этого пункта будут иметь локальный характер, т. е. проводятся относительно координатной окрестности $U \in M$.

Определение 4. Вектор X из $T_x(M)$ называется *неизотропным*, если на нем определено значение метрической функции (15) (или (16)) при условии, что $X = Y$, и *сильно неизотропным*, если это значение строго положительно, т. е. $f(X,X) > 0$.

Образ неизотропного вектора X при отображении (11′) принадлежит определенному выше множеству $L \subset V$.

Определение 5. Связность ∇ в $L(M)$ называется *квазиметрической* или *согласованной связностью* двумерного гельмгольцева многообразия M, если параллельный перенос слоев из $T(M)$ переводит неизотропный вектор в неизотропный с сохранением значения метрической функции f.

Обозначим через $T^1(M)$ подмножество $T(M)$, состоящее из векторов X : $f(X,X) = 1$. Это множество является гладким подмногообразием в $T(M)$. Тогда при параллельном переносе вектор из $T^1(M)$ переходит в вектор из $T^1(M)$.

Из определения квазиметрической связности ∇ следует равенство нулю ковариантной производной:

$$\nabla_k f(X,X) = 0.$$

Кручение в данной связности определяется обычным образом, как в любом пространстве с линейной связностью [3]. Справедлива следующая

Теорема 1. *Гельмгольцево двумерное многообразие в координатной окрестности U произвольной точки допускает квазиметрическую связность ∇ с нулевым кручением, компоненты символов Кристоффеля которой задаются следующими выражениями:*

для собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева пространств

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} h^{\varepsilon lk} \left(\frac{\partial h^\varepsilon_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h^\varepsilon_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h^\varepsilon_{ij}}{\partial x^k} \right) - \alpha h^{\varepsilon lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}); \tag{18}$$

для симплициального пространства

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} h^{lk} \left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right) - h^{lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk}), \tag{19}$$

где

$$h^{\varepsilon}_{ij} = a^1_i a^1_j - \varepsilon a^2_i a^2_j + \alpha\big(a^1_i a^2_j - a^1_j a^2_i\big), \quad h_{ij} = a^1_i a^2_j - a^1_j a^2_i; \tag{20}$$

$$\lambda_{ijk} = a^2_j \frac{\partial a^1_i}{\partial x^k} - a^1_j \frac{\partial a^2_i}{\partial x^k} \tag{21}$$

и $h^{ij}h_{jk} = \delta^i_k$, $h^{\varepsilon ij}h^{\varepsilon}_{jk} = \delta^i_k$, $\varepsilon = -1, 1, 0$ *и* $\alpha = \gamma, \beta, 1$.

Доказательство этой теоремы для собственно гельмгольцевых, псевдогельмгольцевых и дуальногельмгольцевых пространств можно найти в работе [5], а доказательство для симплициальных пространств аналогично.

Несложно показать, что символы h^{ε}_{ij} и h_{ij} преобразуются по тензорному закону, которые будут называться *квазиметрическими тензорами.* Символы λ_{ijk} преобразуются по закону

$$\lambda'_{ijk} = \lambda_{lmn} \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} + h_{lm} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i x'^k} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j},$$

где $i, j, k, l = 1, 2$. Легко заметить, что тензоры h^{ε}_{ij}, h_{ij} и символы λ_{ijk} зависят от структурных функций.

В выражениях (18) и (19) структурные функции a являются произвольными ($a = bc$). Найдем закон преобразования этих выражений при преобразовании структурных функций $a \to ba$. Выясним сначала, как преобразуются квазиметрический тензор h и символы λ. Из определения группы $O(F^2)$ получаем

для собственно гельмгольцевых, псевдогельмгольцевых и дуальногельмгольцевых пространств

$$h^{\varepsilon}_{ij} = \bar{h}^{\varepsilon}_{ij} e^{-2\alpha\varphi}, \quad \lambda_{ijk} = \bar{\lambda}_{ijk} e^{-2\alpha\varphi} - \bar{h}^{\varepsilon}_{ij} e^{-2\alpha\varphi} \varphi_k;$$

для симплициальных пространств

$$h_{ij} = \bar{h}_{ij}\varphi^2, \quad \lambda_{ijk} = \bar{\lambda}_{ijk}\varphi^2 - \bar{h}_{ij}\varphi\varphi_k,$$

где φ — независимый параметр однопараметрической группы $O(F^2)$, который определяется из связей между a и b в уравнениях (6) и (7). Символы $\bar{h}$, $\bar{h}^{\varepsilon}$ и $\bar{\lambda}$ соответствуют параметру $\varphi = \mathrm{const}$, т. е. выражаются через фиксированные структурные функции c.

Подставляя последние выражения в (18) и (19), убеждаемся, что символы Кристоффеля Γ являются инвариантами преобразований $a \to ba$. Итак, получена

Теорема 2. *Симметричная квазиметрическая связность ∇ гельмгольцева двумерного пространства в координатной окрестности U не зависит от структурных функций a.*

Объединяя теоремы 1 и 2, в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Симметричная квазиметрическая связность ∇ гельмгольцева двумерного пространства в координатной окрестности U единственна.*

Предположим, что в координатной окрестности U произвольной точки $x \in M$ функции a^i_j равны δ^i_j. Тогда мы приходим локально к гельмгольцевой плоскости F^2. Значит, метрические функции (15′), (16′) в U в подходящей системе координат совпадают с функциями (5′) и (4′) соответственно. Поэтому квазиметрический тензор локально гельмгольцевых пространств принимает такой вид:

$$h^{\varepsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из выражений (18)–(21) следует, что в окрестности U символы Кристоффеля $\Gamma = 0$ и компоненты тензора кривизны $\mathbb{R}$ также равны нулю, т. е. пространство является локально плоским.

Определение 6. Параметризованная кривая x_t, $a < t < b$, двумерного гельмгольцева многообразия M с квазиметрической связностью ∇ называется *геодезической*, если касательное векторное поле $X = \dot{x}_t$ вдоль кривой x_t параллельно вдоль x_t, т. е. ковариантная производная $\nabla_X X$ существует и равна нулю для всех t из области определения [3].

Из определения следует, что если в точке с параметром $t = t_0$ касательный вектор к геодезической принадлежит множеству $T^1(M)$, то при параллельном переносе вдоль геодезической он переходит в касательный вектор, принадлежащий этому же пространству. Из определения геодезической также вытекает, что она локально удовлетворяет системе двух уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2x^l}{dt^2} + \Gamma^l_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0, \quad i,j,l = 1,2, \tag{22}$$

где Γ — символы Кристоффеля согласованной связности.

Для локально плоских гельмгольцевых пространств в координатной окрестности U двумерного многообразия M в некоторой системе координат симметричные символы Кристоффеля Γ равны нулю, поэтому геодезическими являются прямые.

С этого момента будем предполагать, что касательные векторы к изучаемой кривой x_t являются неизотропными, т. е. $\rho_x(X) \in L \subset V^2$. Из определения геодезической вытекает

Теорема 4. *Геодезическая гельмгольцева двумерного пространства с квазиметрической связностью ∇ в координатной окрестности U произвольной точки является решением следующего уравнения:*

в случае собственно гельмгольцевых, псевдогельмгольцевых и дуальногельмгольцевых пространств

$$g^{\varepsilon}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \exp\left[2\alpha\Phi_{\varepsilon}\left(\frac{a^2_i\dot{x}^i}{a^1_j\dot{x}^j}\right)\right] = a = \mathrm{const}; \tag{23.1}$$

в случае симплициальных пространств

$$\frac{a^2_i\dot{x}^i}{a^1_j\dot{x}^j} = a = \mathrm{const}, \tag{23.2}$$

где $i,j = 1,2$, $\dot{x}^i = dx^i/dt$, $\varepsilon = -1,1,0$, $\alpha = \gamma,\beta,1$.

Следует заметить, что решениями уравнений (23.1) и (23.2) являются не только геодезические.

Теорема 5. *Гладкая параметризованная кривая x_t является решением уравнения (23.1) (или (23.2)) в координатной окрестности U тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:*

$$b^1_j a^j_i \dot{x}^i = p^1_k R^k, \quad b^2_j a^j_i \dot{x}^i = p^2_k R^k, \quad i,j,k = 1,2, \tag{24}$$

где b — произвольная матрица из $O(F^2)$ в каждой точке из $U \subset M$, $R^1 = \mathrm{const}$, $R^2 = \mathrm{const}$, $p^i_j \in O(F^2)$ при произвольном параметре t, причем p^i_j — гладкие функции параметра t.

Доказательство. Очевидно, что если кривая x_t — решение системы уравнений (24), то она является также решением уравнения (23.1) или (23.2).

Предположим, что кривая x_t будет решением уравнения (23.1) или (23.2). Заметим, что левая часть уравнения (23.1) или (23.2) в U представляет собой значение метрической функции (15) или (16) на касательном векторе $\dot{x}$ кривой x_t, следовательно, это значение сохраняется, если мы от структурных функций a перейдем к произвольным структурным функциям вида ba. Эти структурные функции определяют семейство изоморфизмов (11′), относительно которых образы касательного вектора $\dot{x}$ имеют одно и то же значение гельмгольцева квазискалярного произведения вектора на себя в V^2. Поскольку квазискалярное произведение инвариантно относительно группы гельмгольцевых вращений $O(F^2)$, мы приходим к системе уравнений (24), причем

$$((R^1)^2 + (R^2)^2)\exp[2\gamma \operatorname{arctg}(R^2/R^1)] = a$$

для собственно гельмгольцевых пространств,

$$((R^1)^2 - (R^2)^2)\exp[2\beta \operatorname{Ar(c)th}(R^2/R^1)] = a$$

для псевдогельмгольцевых пространств,

$$(R^1)^2 \exp[2(R^2/R^1)] = a$$

для дуальногельмгольцевых пространств и

$$R^2/R^1 = a$$

для симплициальных пространств. Гладкость функций p следует из гладкости векторного поля $\dot{x}$ и гладкости соответствия $x \to \rho_x$. Таким образом, исходная кривая является решением системы уравнений вида (24). □

Итак, мы пришли к семейству систем двух дифференциальных уравнений первого порядка (поскольку матрицы b и p, рассматриваемые в произвольных точках окрестности $U \subset M$ и V^2, являются произвольными элементами группы $O(F^2)$). Множество решений этих систем будем обозначать через K_U. Среди кривых семейства K_U есть и геодезические.

Теорема 6. *Для постоянного вектора $R \in V^2$ в координатной окрестности $U \subset M$ существует семейство кривых такое, что для каждой кривой из этого множества произвольный касательный вектор подходящим отображением ρ_x переводится в вектор R.*

Доказательство. Рассмотрим постоянный вектор $R = (R^1, R^2) \in V^2$, который обратные изоморфизмы ρ_x^{-1} переводят в касательные векторы $\rho_x^{-1}(R)$. Из определения отображений ρ_x следует, что соответствие $x \to \rho_x^{-1}$ является гладким, поэтому множества векторов $\rho_x^{-1}(R)$ образуют гладкие векторные поля. Траекториями этих полей и являются искомые кривые. □

Пусть A^2 — двумерное аффинное пространство с гельмгольцевой структурой (гельмгольцева плоскость), множество свободных векторов которого совпадает с V^2. Рассмотрим прямую на плоскости A^2, заданную в аффинных координатах уравнениями $x^1 - x^1_0 = R^1 t$, $x^2 - x^2_0 = R^2 t$, касательный вектор к которой имеет координаты (R^1, R^2). Возьмем такую гладкую кривую x_t в $U \subset M$, образ касательного вектора к которой при некотором изоморфизме ρ_x из семейства $\{\rho_x\}$ совпадает с (R^1, R^2) (существование такой кривой следует из теоремы 5). Эта кривая удовлетворяет системе уравнений

$$b^1_j a^j_i \dot{x}^i = R^1, \quad b^2_j a^j_i \dot{x}^i = R^2, \quad i, j = 1, 2. \tag{24$'$}$$

Множество таких кривых образует подмножество $K'_U \subset K_U$.

Рассмотрим семейство гладких отображений

$$\Omega : U \to A^2,$$

дифференциал каждого из которых в точке $x \in U$ совпадает с некоторым изоморфизмом из $\{\rho_x\}$. Очевидно, что данное отображение является локальным диффеоморфизмом. Обозначим через $U'(x) \subset U$ окрестность произвольной точки $x \in U$, на которой отображение Ω является диффеоморфизмом.

Теорема 7. *Для кривой $y = y(t)$ из A^2, проходящей через точку y_0, касательный вектор к которой в произвольной точке имеет вид $p^i_j R^j$, существует кривая $x = x(t)$ в U, проходящая через точку x_0, ограничение которой на $U'(x_0) \subset U$ подходящее отображение Ω переводит диффеоморфно в $y = y(t)$.*

Доказательство. Рассмотрим кривую $y = y(t)$ из A^2, проходящую через точку y_0 и в произвольной точке имеющую касательный вектор вида $p^i_j R^j$. Пусть x_0 — прообраз точки y_0 при отображении Ω. Поскольку $\Omega : U \to A^2$ — локальный диффеоморфизм, то отображение $\Omega^{-1}|_{U'(x_0)}$, обратное к ограничению $\Omega|_{U'(x_0)}$, кривую $y = y(t)$ переводит в искомую кривую. $\Box$

Пусть в уравнениях (23.1), (23.2) a — структурные функции. Рассмотрим в аффинном пространстве A^2 собственно гельмгольцеву окружность, заданную уравнением $x^1 - x^1_0 = \sqrt{a}e^{-\gamma t}\cos t$, $x^2 - x^2_0 = \sqrt{a}e^{-\gamma t}\sin t$; псевдогельмгольцеву окружность — уравнением $x^1 - x^1_0 = \sqrt{a}e^{-\beta t}\operatorname{ch} t$, $x^2 - x^2_0 = \sqrt{a}e^{-\beta t}\operatorname{sh} t$ или $x^1 - x^1_0 = \sqrt{a}e^{-\beta t}\operatorname{sh} t$, $x^2 - x^2_0 = \sqrt{a}e^{-\beta t}\operatorname{ch} t$; дуальногельмгольцеву окружность — уравнением $x^1 - x^1_0 = \sqrt{a}e^{-t}$, $x^2 - x^2_0 = \sqrt{a}e^{-t}t$; симплициальную окружность — уравнением $x^1 - x^1_0 = R^1 t$, $x^2 - x^2_0 = R^2 t$. Тогда касательные векторы к этим окружностям в произвольных точках имеют следующие координаты:

$$(-\sqrt{a}e^{-\gamma t}(\gamma\cos t + \sin t), \sqrt{a}e^{-\gamma t}(-\gamma\sin t + \cos t));$$

$$(\sqrt{a}e^{-\beta t}(-\beta\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t), \sqrt{a}e^{-\beta t}(-\beta\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t))$$

или

$$(\sqrt{a}e^{-\beta t}(-\beta\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t), \sqrt{a}e^{-\beta t}(-\beta\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)); \quad (-\sqrt{a}e^{-t}, \sqrt{a}e^{-t}(-t+1));$$

(R^1, R^2) соответственно. Эти координаты обозначим через $p^i_j R^j$. Возьмем кривую x_t в координатной окрестности $U \subset M$, удовлетворяющую условию теоремы 7. Для нее приходим к такому семейству систем уравнений:

$$a^1_i \dot{x}^i = -\sqrt{a}e^{-\gamma t}(\gamma\cos t + \sin t), \quad a^2_i \dot{x}^i = \sqrt{a}e^{-\gamma t}(-\gamma\sin t + \cos t); \tag{25}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^1_i \dot{x}^i = \sqrt{a}e^{-\beta t}(-\beta\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t), \quad a^2_i \dot{x}^i = \sqrt{a}e^{-\beta t}(-\beta\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t), \\ a^1_i \dot{x}^i = \sqrt{a}e^{-\beta t}(-\beta\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t), \quad a^2_i \dot{x}^i = \sqrt{a}e^{-\beta t}(-\beta\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t); \end{array}\right. \tag{26}$$

$$a^1_i \dot{x}^i = -\sqrt{a}e^{-t}, \quad a^2_i \dot{x}^i = \sqrt{a}e^{-t}(-t+1); \tag{27}$$

$$a^1_i \dot{x}^i = R^1, \quad a^2_i \dot{x}^i = R^2. \tag{28}$$

Предположим, что существует координатная окрестность $U \subset M$, в которой $a^i_j = \delta^i_j$, т. е. пространство является локально плоским. Интегрируя эти уравнения, получим

$$x^1 - x^1_0 = \sqrt{a}e^{-\gamma t}\cos t, \quad x^2 - x^2_0 = \sqrt{a}e^{-\gamma t}\sin t; \tag{25'}$$

$$\begin{cases} x^1 - x^1_0 = \sqrt{a}e^{-\beta t}\operatorname{ch} t, \quad x^2 - x^2_0 = \sqrt{a}e^{-\beta t}\operatorname{sh} t, \\ x^1 - x^1_0 = \sqrt{a}e^{-\beta t}\operatorname{sh} t, \quad x^2 - x^2_0 = \sqrt{a}e^{-\beta t}\operatorname{ch} t; \end{cases} \tag{26'}$$

$$x^1 - x^1_0 = \sqrt{a}e^{-t}, \quad x^2 - x^2_0 = \sqrt{a}e^{-t}t; \tag{27'}$$

$$x^1 - x^1_0 = R^1 t, \quad x^2 - x^2_0 = R^2 t, \tag{28'}$$

причем $\left(x^1_0, x^2_0\right)$ — координаты некоторой точки в U. Заметим, что эти кривые являются орбитами подгрупп вращений трехпараметрических групп движений, которые действуют в этой окрестности. Обратим внимание на то, что в U геодезические (прямые) также являются траекториями подгруппы группы движений.

4. Конформное отображение гельмгольцевых пространств. Здесь определяется конформное соответствие гельмгольцевых пространств. Доказывается существование для некоторого класса гельмгольцевых многообразий изотермических координат, т. е. координат, в которых метрическая функция на некоторый множитель отличается от метрической функции локально плоского пространства.

Рассмотрим два гельмгольцевых многообразия (M, f) и (M', f') с метрическими функциями f и f' соответственно. Пусть φ — локальный диффеоморфизм между этими пространствами, т. е. такое гладкое отображение, которое какую-то координатную окрестность U точки x многообразия M переносит диффеоморфно в координатную окрестность U' точки $\varphi(x)$ многообразия M'. Это соответствие систему координат из U переносит в U' так, что если точка $x \in M$ с координатами x^1, x^2, то соответствующая ей точка $\varphi(x)$ с этими же координатами.

Определение 7. Будем говорить, что многообразия M и M' *локально конформно отображены* друг в друга относительно локального диффеоморфизма φ, если имеет место следующее равенство:

$$f' = e^{2\sigma} f, \tag{29}$$

где σ — некоторая гладкая функция координат точки. Если $\sigma = 0$, то многообразия будем называть *изометричными*.

Теорема 8. *Для того чтобы гельмгольцевы многообразия M и M' были локально изометричными, необходимо и достаточно, чтобы в разложении структурных функций* (12) *для этих пространств существовали одинаковые матрицы c и c' относительно локально диффеоморфных координатных окрестностей.*

Необходимость. Пусть φ — локальный диффеоморфизм координатных окрестностей U и U' гельмгольцевых пространств M и M'. Предположим, что существуют разложения структурных функций в этих окрестностях: $a = bc$ и $a' = b'c'$ гельмгольцевых пространств M и M', для которых $c = c'$, тогда $f = f'$, т. е. пространства M и M' локально изометричны.

Достаточность. Предположим, что пространства M и M' локально изометричны, т. е. существует локальный диффеоморфизм $\varphi : M \to M'$ такой, что $f = f'$. Воспользуемся тем, что задание метрической функции в гельмгольцевом многообразии равносильно определению в нем семейства изоморфизмов $(11')$. Поскольку диффеоморфизм φ переносит систему координат из U в U', то в точках $x \in U$ и $\varphi(x) \in U'$ мы можем выбрать произвольные касательные векторы с одними и теми же координатами относительного координатного базиса. Обозначим эти векторы через X. Пусть $\{\rho_x\}$ и $\{\rho'_{\varphi(x)}\}$ — семейства изоморфизмов в U и U' соответственно. Тогда $\rho_x(X) = b^j_k c^k_i X^i e_j$ и $\rho'_x(X) = b'^j_k c'^k_i X^i e_j$. Предположим, что в семействе изоморфизмов $\{\rho_x\}$ существует хотя бы один изоморфизм, который не совпадает ни с одним изоморфизмом из $\{\rho'_x\}$, следовательно, никакой изоморфизм из $\{\rho_x\}$ не совпадает ни с каким изоморфизмом из $\{\rho'_x\}$, и наоборот; противоречие. $\square$

Следствие. *В координатной окрестности U произвольной точки x двумерного гельмгольцева пространства M существует такое открытое подмножество $U' \subset U$, что ограничение отображения $(11')$ на U' является изометрией.*

С данного момента будем предполагать, что M и M' совпадают. Тогда конформное отображение будет называться *конформным преобразованием*, а метрические функции — *конформно эквивалентными.*

Рассмотрим такую связность гельмгольцева пространства M, относительно которой при параллельном переносе сохраняется метрическая функция f', т. е.

$$\nabla_k f'(X, X) = 0. \tag{30}$$

Справедлива следующая

Теорема 9. *Символы Кристоффеля квазиметрической связности ∇ двумерного гельмгольцева пространства M с метрической функцией f', которая конформно связана с метрической функцией f формулой (29) в координатной окрестности U, имеют следующие выражения:*

для собственно гельмгольцевых, псевдогельмгольцевых и дуальногельмгольцевых пространств

$$\frac{\partial h^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki} h^{\varepsilon}_{jl} - \Gamma^l_{kj} h^{\varepsilon}_{il} - 2\alpha\lambda_{ijk} - 2g^{\varepsilon}_{ij}\sigma_k = 0, \tag{31}$$

для симплициальных пространств

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki} h_{jl} - \Gamma^l_{kj} h_{il} - 2\lambda_{ijk} - 2g_{ij}\sigma_k = 0, \tag{32}$$

причем $g^{\varepsilon}_{ij} = a^1_i a^1_j - \varepsilon a^2_i a^2_j$, $g_{ij} = a^1_i a^2_j + a^1_j a^2_i$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. $\square$

Несложно проверить, что уравнения (31), (32) инвариантны относительно преобразований структурных функций: $a \to ba$, где в произвольной точке из $U \subset M$ b — любой элемент группы $O(F^2)$.

Перейдем теперь к проблеме введения в координатной окрестности U собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева, дуальногельмгольцева и симплициального пространств M изотермических координат, т. е. координат, относительно которых метрическая функция f имеет конформно локально плоский вид. Сначала рассмотрим собственно гельмгольцевы, псевдогельмгольцевы и дуальногельмгольцевы пространства, а затем симплициальные. Затем воспользуемся тем, что задание метрической функции f в $U \subset M$ равносильно заданию изоморфизмов $(12')$.

Теорема 10. *Если в некоторой координатной окрестности U произвольной точки собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева или дуальногельмгольцева пространства со структурными функциями* (12) *можно подобрать такую систему координат, что выполняются условия*

$$\frac{\partial A}{\partial y^2} - \varepsilon \frac{\partial B}{\partial y^1} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial y^2} - \frac{\partial A}{\partial y^1} = 0, \tag{33}$$

где

$$A = -\frac{c_1^1 c_2^1 - \varepsilon c_1^2 c_2^2}{(c_2^1)^2 - \varepsilon (c_2^2)^2}, \quad B = -\frac{c_1^1 c_2^2 - c_2^1 c_1^2}{(c_2^1)^2 - \varepsilon (c_2^2)^2},$$

то метрическая функция f в ней будет на некоторый множитель $(\lambda(x^1, x^2))^2$ отличаться от метрической функции локально плоского пространства, т. е. будет ей локально конформно эквивалентна.

Рассмотрим гельмгольцевы пространства, для которых в координатной окрестности U можно перейти к такой системе координат y^1, y^2, относительно которой матрица c в разложении (12) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 & \varepsilon \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^1 \end{pmatrix},$$

причем для собственно гельмгольцевых пространств $\varepsilon = -1$, для псевдогельмгольцевых пространств $\varepsilon = 1$, для дуальногельмгольцевых пространств $\varepsilon = 0$.

Новая система координат связана со старой так: $x^1 = \varphi(y^1, y^2)$, $x^2 = \psi(y^1, y^2)$. Для положительного решения нашей проблемы мы должны исследовать на совместность систему уравнений, которая является следствием закона преобразования структурных функций:

$$c_1^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y^1} + c_2^1 \frac{\partial \psi}{\partial y^1} - c_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} - c_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial y^2} = 0, \quad -\varepsilon c_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y^1} - \varepsilon c_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial y^1} + c_1^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} + c_2^1 \frac{\partial \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Разрешая последнюю систему относительно производных $\partial\psi/\partial y^1$, $\partial\psi/\partial y^2$, получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial y^1} = A \frac{\partial \varphi}{\partial y^1} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y^2} = \varepsilon B \frac{\partial \varphi}{\partial y^1} + A \frac{\partial \varphi}{\partial y^2}, \quad \left(c_2^1\right)^2 - \varepsilon \left(c_2^2\right)^2 \neq 0. \tag{34}$$

Заметим, что $a_1^1 a_2^1 - \varepsilon a_1^2 a_2^2 = c_1^1 c_2^1 - \varepsilon c_1^2 c_2^2$, $a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = c_1^1 c_2^2 - c_2^1 c_1^2$, $\left(a_2^1\right)^2 - \varepsilon \left(a_2^2\right)^2 = \left(c_2^1\right)^2 - \varepsilon \left(c_2^2\right)^2$, $\left(a_1^1\right)^2 - \varepsilon \left(a_1^2\right)^2 = \left(c_1^1\right)^2 - \varepsilon \left(c_1^2\right)^2$, поэтому результат не зависит от выбора матрицы c. Несложно проверить, что для любого нетривиального решения φ, ψ якобиан $\partial(\varphi, \psi)/\partial(y^1, y^2)$ отличен от нуля. Легко убедиться также в том, что если выполнены условия (33), причем функции φ, ψ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (y^2)^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (y^1)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial (y^2)^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial (y^1)^2} = 0, \tag{34$'$}$$

то система (34) становится совместна, и наоборот. Заметим, что если $\left(c_2^1\right)^2 - \varepsilon \left(c_2^2\right)^2 = 0$, то мы должны разрешить исходную систему относительно производных $\partial\varphi/\partial y^1$, $\partial\varphi/\partial y^2$ и провести аналогичные рассуждения.

Таким образом, если в новой системе координат y^1, y^2 выполнены условия (33), то структурные функции двумерных гельмгольцевых пространств можно привести к виду

$$a_j^i = \begin{pmatrix} b_1(\varepsilon, \alpha) & \varepsilon b_2(\varepsilon, \alpha) \\ b_2(\varepsilon, \alpha) & b_1(\varepsilon, \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 & \varepsilon \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^1 \end{pmatrix},$$

где $b_1(-1,\alpha) = \cos\alpha e^{-\gamma\alpha}$, $b_2(-1,\alpha) = \sin\alpha e^{-\gamma\alpha}$, $b_1(1,\alpha) = \operatorname{ch}\alpha e^{-\beta\alpha}$, $b_2(1,\alpha) = \operatorname{sh}\alpha e^{-\beta\alpha}$, $b_1(0,\alpha) = e^{-\alpha}$, $b_2(0,\alpha) = \alpha e^{-\alpha}$, причем в силу произвольности матрицы b параметр α является произвольной гладкой функцией координат. Положим в структурных функциях a следующие обозначения для λ^1 и λ^2: при $\varepsilon = -1$

$$\lambda^1 = \lambda\cos\alpha_1 e^{-\gamma\alpha_1}, \quad \lambda^2 = \lambda\sin\alpha_1 e^{-\gamma\alpha_1},$$

при $\varepsilon = 1$

$$\lambda^1 = \lambda\operatorname{ch}\alpha_1 e^{-\beta\alpha_1}, \quad \lambda^2 = \lambda\operatorname{sh}\alpha_1 e^{-\beta\alpha_1},$$

при $\varepsilon = 0$

$$\lambda^1 = \lambda e^{-\alpha_1}, \quad \lambda^2 = \lambda\alpha_1 e^{-\alpha_1},$$

где λ — произвольная гладкая функция координат, определенная в координатной окрестности U. Тогда

$$a^i_j = \begin{pmatrix} b_1(\varepsilon,\bar\alpha) & \varepsilon b_2(\varepsilon,\bar\alpha) \\ b_2(\varepsilon,\bar\alpha) & b_1(\varepsilon,\bar\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

где $\bar\alpha = \alpha + \alpha_1$, причем в произвольной точке из U матрица b является произвольной матрицей из группы $O(F^2)$, где $F^2 = \Gamma^2, P\Gamma^2, D^2$. Тогда метрические функции гельмгольцевых пространств примут такой вид:

$$f = (\lambda(x^1,x^2))^2 \left([(X^1)^2 - \varepsilon(X^2)^2] \exp\left(2\alpha\Phi_\varepsilon \frac{X^2}{X^1}\right)\right),$$

причем x^1, x^2 — координатная система в U, $\alpha = \gamma, \beta, 1$, $\varepsilon = -1, 1, 0$. Заметим, что в отличие от (15) в последних выражениях для f будет $X^i = Y^i$. $\square$

Определение 8. Координаты, описанные в теореме 10, называются *изотермическими координатами* собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева или дуальногельмгольцева многообразия.

Аналогичным способом можно доказать существование изотермических координат в двумерных римановых пространствах. Классическое доказательство можно найти, например, в книге [6].

Теорема 11. *Если в некоторой координатной окрестности U произвольной точки симплициального пространства со структурными функциями* (12) *можно подобрать такую систему координат, что выполняются условия*

$$\frac{\partial A}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial y^1} = 0, \tag{35}$$

где $A = -c^2_1/c^2_2$, $B = -c^1_1/c^1_2$, то метрическая функция f в ней будет на некоторый множитель $\lambda(x^1,x^2)$ отличаться от метрической функции локально плоского пространства.

Рассуждая, как и выше, в координатной окрестности U перейдем от координат x^1, x^2 к таким координатам y^1, y^2, что матрица c разложения (14) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае мы должны проверить на совместность систему дифференциальных уравнений

$$c^2_1\frac{\partial\varphi}{\partial y^1} + c^2_2\frac{\partial\psi}{\partial y^1} = 0, \;\; c^1_1\frac{\partial\varphi}{\partial y^2} + c^1_2\frac{\partial\psi}{\partial y^2} = 0. \tag{36}$$

Заметим, что если в системе уравнений (36) хотя бы один из коэффициентов равен нулю, то система будет совместной. Поэтому мы полагаем, что все коэффициенты отличны от нуля. Разрешая (36) относительно производных $\partial\psi/\partial x^1$, $\partial\psi/\partial x^2$, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial y^1} = A\frac{\partial\varphi}{\partial y^1}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y^2} = B\frac{\partial\varphi}{\partial y^2}. \tag{36$'$}$$

Поскольку $a_1^2/a_2^2 = c_1^2/c_2^2$, $a_1^1/a_2^1 = c_1^1/c_2^1$, результат не зависит от выбора матрицы c. Несложно убедиться в том, что для любого нетривиального решения φ, ψ якобиан замены координат отличен от нуля. Очевидно, что если выполнены условия (35), а функции φ, ψ удовлетворяют еще уравнениям

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^1 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^1 \partial y^2} = 0,$$

то система (36$'$) будет совместной, и наоборот. Рассуждая, как и выше, имеем

$$a = b\begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

причем в каждой точке U матрица b является произвольной матрицей из группы симплициальных вращений $O(S^2)$, а метрическая функция примет вид

$$f = \lambda(x^1, x^2)\frac{X^2}{X^1}.$$

Здесь x^1, x^2 — координаты в U и $\lambda = \lambda^2/\lambda^1$. Заметим, что в отличие от (16) в последних выражениях для f мы положили $X^i = Y^i$. $\square$

Определение 9. Координаты, описанные в теореме 11, называются *изотермическими координатами* симплициального многообразия.

5. Квазидлина кривой в гельмгольцевом пространстве. В данном пункте определяется квазидлина неизотропной кривой, а также находятся экстремали функционала квазидлины.

Под *метрикой* гельмгольцева двумерного многообразия M будем понимать следующую величину:

$$df = \sqrt{g_{ij}^{\varepsilon} dx^i dx^j}\exp\left[\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{a_i^2 dx^i}{a_j^1 dx^j}\right)\right], \quad i, j = 1, 2. \tag{37}$$

Следует заметить, что рассматриваемая величина не удовлетворяет всем метрическим аксиомам.

Определение 10. Гладкую параметризованную кривую x_t гельмгольцева многообразия будем называть *неизотропной*, если все ее касательные векторы сильно неизотропны, т. е. на этих касательных векторах значение $f(X, X)$ метрической функции (15) положительно.

Обозначим через Θ множество всех неизотропных кривых гельмгольцева многообразия M. Пусть Θ_{pq} — множество неизотропных кривых с началом в p и концом в q.

Рассмотрим достаточно гладкую неизотропную кривую $x : [\alpha, \beta] \to M$, причем $x_\alpha = p$, $x_\beta = q$. Естественным образом определяется квазидлина произвольного касательного вектора $\dot{x} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2)$ кривой x_t (не следует отождествлять квазидлину с классическим определением длины):

$$s = \sqrt{g_{ij}^{\varepsilon}\dot{x}^i\dot{x}^j}\exp\left[\alpha\Phi_\varepsilon\left(\frac{a_i^2\dot{x}^i}{a_j^1\dot{x}^j}\right)\right], \quad g_{ij}^{\varepsilon} = a_i^1 a_j^1 - \varepsilon a_i^2 a_j^2. \tag{38}$$

Квазидлина вектора dx^i определяется формулой (37). Заметим, что квазидлина касательного вектора $\dot{x}$ является однородной функцией его координат.

Под *сопряженной квазидлиной* касательного вектора $\dot{x}$ неизотропной кривой будем понимать следующую величину:

$$s^* = \sqrt{g^{\varepsilon}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,\exp\left[-\alpha\Phi_{\varepsilon}\left(\frac{a^2_i\dot{x}^i}{a^1_j\dot{x}^j}\right)\right]. \tag{38$'$}$$

Обратим внимание на то, что сопряженная квазидлина не сохраняется при параллельном переносе векторов относительно квазиметрической связности.

Очевидно, что квазидлина и сопряженная квазидлина касательного вектора связаны тождеством

$$ss^* = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j, \quad i,j = 1,2.$$

Под *квазидлиной неизотропной гладкой кривой* $x_t \in \Theta_{pq}$, $x_\alpha = p$, $x_\beta = q$ будем понимать следующий интеграл:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g^{\varepsilon}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,\exp\left[\alpha\Phi_{\varepsilon}\left(\frac{a^2_i\dot{x}^i}{a^1_j\dot{x}^j}\right)\right]dt. \tag{39}$$

Это выражение представляет собой предел сумм квазидлин бесконечно малых последовательных смещений вдоль кривой.

Аналогично вводится функционал сопряженной квазидлины, определяемый для неизотропной кривой из Θ_{pq}:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g^{\varepsilon}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,\exp\left[-\alpha\Phi_{\varepsilon}\left(\frac{a^2_i\dot{x}^i}{a^1_j\dot{x}^j}\right)\right]dt. \tag{39$'$}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Квазидлина l и сопряженная квазидлина l^* неизотропной кривой x_t гельмгольцева пространства не зависят от параметризации на кривой.*

Доказательство. Перейдем от параметра t на кривой к другому параметру τ, причем так, чтобы функции $t = t(\tau)$ и $\tau = \tau(t)$ были гладкими и монотонно возрастающими. Тогда квазидлина кривой равна

$$l = \int\limits_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} \frac{df}{d\tau}d\tau = \int\limits_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} \frac{df}{dt}\frac{dt}{d\tau}d\tau = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{df}{dt}\,dt.$$

Аналогично для сопряженной квазидлины кривой:

$$l^* = \int\limits_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} s^*(\tau)d\tau = \int\limits_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} s^*(t)\frac{dt}{d\tau}d\tau = \int\limits_{\alpha}^{\beta} s^*(t)\,dt.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Функционалы l и l^* в координатной окрестности U для гладких неизотропных кривых определены корректно, т. е. интегралы* (39) *и* (39′) *существуют.*

Это является следствием того, что подынтегральные выражения в (39) и (39′) непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Лемма 2 доказана.

Ограничиваясь координатной окрестностью U, приходим к выводу, что квазидлина произвольной неизотропной кривой из семейства K_U в силу уравнения (23) равна

$$l = \sqrt{a}(\beta - \alpha).$$

Приступим теперь к решению проблемы нахождения экстремалей функционалов l и l^*. Под экстремалью функционала l или l^* будет пониматься кривая (параметризованная кривая) из множества Θ_{pq}, на которой этот функционал принимает экстремальное значение. Здесь устанавливаются необходимые условия существования таких экстремалей. Сначала будут найдены экстремали функционала l.

Теорема 12. *Неизотропная гладкая кривая гельмгольцева пространства M является решением системы*

$$\frac{d^2x^l}{ds^{*2}} + \Gamma^l_{ij}\frac{dx^i}{ds^*}\frac{dx^j}{ds^*} = 0 \tag{40}$$

тогда и только тогда, когда она является экстремалью функционала квазидлины (39).

Варьируя функционал (39), находим

$$\delta l = -\int\limits_0^L h^{\varepsilon}_{lk}\left(\frac{d^2x^l}{ds^{*2}} + \Gamma^l_{ij}\frac{dx^i}{ds^*}\frac{dx^j}{ds^*}\right)\delta x^k\, ds^*,$$

где $h^{\varepsilon}_{ij} = a^1_i a^1_j - \varepsilon a^2_i a^2_j + \alpha\big(a^1_i a^2_j - a^2_i a^1_j\big)$ — квазиметрический тензор гельмгольцева пространства.

Предположим теперь, что на варьируемой кривой $x_t \in \Theta_{pq}$ функционал (39) принимает экстремальное значение, тогда $\delta l = 0$ и поэтому кривая x_t удовлетворяет системе уравнений (40). Если кривая $x_t, x_\alpha = p, x_\beta = q$ является решением системы (40), то $\delta l = 0$, следовательно, она является экстремалью функционала квазидлины (39). □

Заметим, что аналогичный подход в римановых пространствах приводит нас к геодезической в обычном смысле, т. е. к кривой, являющейся экстремалью функционала римановой длины [7]. Найдем теперь экстремали функционала l^*.

Теорема 13. *Неизотропная гладкая кривая гельмгольцева пространства M является решением системы*

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \Gamma^{*l}_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 \tag{41}$$

тогда и только тогда, когда она является экстремалью функционала сопряженной квазидлины (39′).

Предположим, что кривая $x_t \in \Theta_{pq}$ является экстремалью функционала l^*. Включая ее в семейство кривых из Θ_{pq}, а затем варьируя функционал (42′), устанавливаем, что

$$\delta l^* = -\int\limits_0^{L^*} h^{*\varepsilon}_{lk} \left(\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \Gamma^{*l}_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right) \delta x^k \, ds,$$

где

$$\Gamma^{*l}_{ij} = \frac{1}{2} h^{*\varepsilon lk} \left(\frac{\partial h^{*\varepsilon}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h^{*\varepsilon}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial h^{*\varepsilon}_{ij}}{\partial x^k} \right) + \alpha h^{*\varepsilon lk} (\lambda_{jki} + \lambda_{kij} - \lambda_{ijk})$$

и

$$h^{*\varepsilon}_{ij} = a^1_i a^1_j - \varepsilon a^2_i a^2_j - \alpha \big(a^1_i a^2_j - a^1_j a^2_i \big),$$

причем $i, j, k, l = 1, 2$; $\varepsilon = 1, -1, 0$, $\alpha = \gamma, \beta, 1$. Можно показать, что символы Γ^{*l}_{ij} тензор не образуют, а символы $h^{*\varepsilon}_{ij}$ преобразуются по тензорному закону.

Поскольку на кривой $x_t \in \Theta_{pq}$ функционал $(39')$ принимает экстремальное значение, то $\delta l^* = 0$ и поэтому x_t удовлетворяет системе уравнений (41). Если кривая $x_t, x_\alpha = p$, $x_\beta = q$ является решением системы (41), то $\delta l^* = 0$, т. е. она является экстремалью функционала $(39')$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г. Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001.
2. *Кыров В. А.* Векторы некоторых двумерных феноменологически симметричных геометрий // Наука, культура, образование. Горно-Алтайск, 2000. № 6/7. С. 111–114.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
4. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
5. *Кыров В. А.* Двумерные гельмгольцевы многообразия // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 2001. № 118. С. 53–57.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
7. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 17 апреля 2003 г., окончательный вариант — 29 июня 2005 г.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский гос. университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
kfizika@gasu.ru