Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 517.54

ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

И. Р. Каюмов, Ю. В. Обносов

Аннотация: Доказывается гипотеза Мехии — Поммеренке о том, что тейлоровские коэффициенты гиперболически выпуклых функций в круге ведут себя как $O(\log^{-2}(n)/n)$ $(n \to \infty)$ в предположении, что образ единичного круга при отображении такими функциями является областью с ограниченным граничным вращением. Кроме того, получены асимптотически точные оценки интегральных средних производных таких функций, а также рассмотрен пример гиперболически выпуклой функции, отображающей единичный круг на область с бесконечным граничным вращением.

Ключевые слова: конформное отображение, однолистная функция, гиперболически выпуклая функция, интегральные средние.

Пусть Ω — односвязная область, лежащая в круге $D = \{z : |z| < 1\}$. Область Ω называется *гиперболически выпуклой* [1], если любые две точки из Ω можно соединить дугой окружности, лежащей в Ω и ортогональной к окружности $|z| = 1$. Голоморфная и однолистная в D функция f называется *гиперболически выпуклой*, если область $f(D)$ лежит в D и является гиперболически выпуклой. В [1] получен критерий гиперболической выпуклости функции f. Голоморфная функция f гиперболически выпукла тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re}\left[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 2zf'(z)\frac{\overline{f(z)}f(z)}{1-|f(z)|^2}\right] > 0, \quad z \in D. \tag{1}$$

Поскольку гиперболическая выпуклость инвариантна относительно автоморфизмов круга на себя, можно считать, что Ω содержит 0. Как показано, в [1], любая гиперболически выпуклая область, содержащая 0, является звездообразной, а любая выпуклая область — гиперболически выпуклой. Следовательно, класс гиперболически выпуклых функций находится между классами звездных и выпуклых функций. Для решения различных экстремальных задач в указанных классах успешно используется представление Рисса — Херглоца [2, с. 61] голоморфных в круге функций с положительной вещественной частью (например, в случае выпуклых функций таковой будет $zf''(z)/f'(z) + 1$). К сожалению, в случае гиперболически выпуклых функций это представление использовать невозможно, поскольку левая часть неравенства (1) не является гармонической функцией.

Для тейлоровских коэффициентов гиперболически выпуклых функций, как известно [3], справедлива оценка $a_n = o(1/n)$, $n \to \infty$ (этот факт следует из

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05–01–00523, 03–01–00015, 03–01–96193-р2003Татарстан-а).

спрямляемости границы гиперболически выпуклой области). С другой стороны, имеются примеры [3] гиперболически выпуклых функций (круговые многоугольники), для которых

$$\limsup_{n\to\infty} n\log^2 n|a_n| > 0.$$

В работе [3] сформулирована следующая гипотеза:

$$a_n = O(1/(n\log^2 n)) \tag{2}$$

для всех гиперболически выпуклых функций.

В данной работе эта гипотеза будет доказана в предположении, что область $\Omega = f(D)$ имеет ограниченное граничное вращение $a(\Omega)$, где

$$a(\Omega) = \lim_{r\to 1} a(\Omega_r) = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\operatorname{Re}\left[re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}+1\right]\right|d\theta.$$

Последний предел (конечный или бесконечный), очевидно, существует. Величины $a(\Omega_r)$ характеризуют граничное вращение линий уровня области Ω (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть функция f гиперболически выпукла в круге D. Тогда найдется положительная константа $C < \infty$ такая, что*

$$|a_n| \le C\frac{a(\Omega_{1-1/n})}{n\log^2 n}, \quad n \ge 2.$$

Доказательство. Оценим сначала интегральные средние от модуля третьей производной:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f'''(re^{i\theta})|d\theta \le \max_{\theta}|f'(re^{i\theta})|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|d\theta.$$

Поммеренке и Мехия [5] показали, что для гиперболически выпуклых функций существует абсолютная положительная константа $C < \infty$ такая, что

$$|f'(re^{i\theta})| \le \frac{C\log^{-2}(1-r)}{1-r}, \quad \frac{1}{2} < r < 1. \tag{3}$$

Ясно, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)' + \left(\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)^2\right|d\theta$$
$$\le \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)'\right|d\theta + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|^2 d\theta. \tag{4}$$

Оценивая второй интеграл в неравенстве (4), найдем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|^2 d\theta = \frac{1}{r^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|^2 d\theta = \frac{2}{r^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\operatorname{Re}\left[re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right]\right|^2 d\theta.$$

Известно [6, с. 52], что
$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \le \frac{6}{1-|z|^2},$$
следовательно,
$$\frac{2}{r^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\mathrm{Re}\left[re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right]\right|^2 d\theta \le \frac{12}{r^2(1-r^2)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\mathrm{Re}\left[re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right]\right| d\theta$$
$$\le \frac{12}{r^2(1-r^2)}(a(\Omega_r)+2\pi).$$

Для оценки первого интеграла в правой части неравенства (4) воспользуемся представлением Шварца для голоморфной в круге D функции zf''/f':
$$z\frac{f''(rz)}{f'(rz)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left[e^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}\right]\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt + iC.$$

Дифференцируя последнее равенство по z, получаем
$$\frac{f''(rz)}{f'(rz)} + rz\left(\frac{f''(rz)}{f'(rz)}\right)' = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left[e^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}\right]\frac{2e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\,dt.$$

Поэтому
$$\left|\left(\frac{f''(rz)}{f'(rz)}\right)'\right| \le \frac{1}{r}\left|\frac{f''(rz)}{f'(rz)}\right| + \frac{1}{\pi r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\mathrm{Re}\left[e^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}\right]\right|\frac{1}{|e^{it}-z|^2}\,dt.$$

Интегрируя полученное неравенство по окружности $z = re^{i\theta}$ и применяя теорему Фубини, убеждаемся, что
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\frac{f''(r^2e^{i\theta})}{f'(r^2e^{i\theta})}\right)'\right| d\theta \le C\frac{a(\Omega_r)}{r^2(1-r)}.$$

В силу известных теорем искажения [6, с. 52] это неравенство справедливо без r^2 в знаменателе:
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\frac{f''(r^2e^{i\theta})}{f'(r^2e^{i\theta})}\right)'\right| d\theta \le C\frac{a(\Omega_r)}{(1-r)}$$
с некоторой другой константой C.

Таким образом, существует положительная константа $C < \infty$ такая, что
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f'''(re^{i\theta})|d\theta \le \max_\theta|f'(re^{i\theta})|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f'''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right| d\theta \le C\frac{a(\Omega_r)\log^{-2}\frac{1}{1-r}}{(1-r)^2},\ \frac{1}{2} < r < 1. \tag{5}$$

Обозначим через b_n тейлоровские коэффициенты функции $f'''(z)$, т. е.
$$b_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f'''(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta.$$

Отсюда следует, что

$$|b_n| \le \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} |f'''(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Полагая $r = 1 - 1/n$ и применяя неравенство (5), получаем оценку

$$|b_n| \le Ca(\Omega_{1-1/n}) n^2 \log^{-2} n.$$

Последняя оценка влечет утверждение теоремы, так как

$$b_n = (n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3}.$$

Следствие. *Если Ω — гиперболически выпуклая область с ограниченным граничным вращением, то гипотеза* (1) *справедлива. В частности, эта гипотеза справедлива для любого кругового гиперболически выпуклого многоугольника.*

В работе [3] была также сформулирована и другая гипотеза: коэффициенты гиперболически выпуклых функций удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2(1 - r^{2k}) = O\left(\log^{-3} \frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1. \tag{6}$$

Геометрический смысл этого соотношения заключается в том, что площадь области $f(|z| < r)$ сходится к площади образа круга $f(D)$ со скоростью порядка $|\log(1-r)|^{-3}$ при $r \to 1$.

Теорема 2. *Предположим, что функция f гиперболически выпукла и область $f(D)$ имеет конечное граничное вращение. Тогда тейлоровские коэффициенты f удовлетворяют соотношению* (6).

Доказательство. Положим

$$I(r) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Дифференцируя последнее соотношение по r, получаем

$$I'(r) = 2\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 \operatorname{Re}\left[e^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right] d\theta,$$

откуда в силу ограниченности граничного вращения и неравенства (3)

$$I'(r) \le C \max_{\theta} |f'(re^{i\theta})|^2 \le \frac{C_1}{(1-r)^2 \log^4(1-r)} + C_2.$$

Интегрируя последнее соотношение по r, приходим к неравенству

$$I(r) \le \frac{C_3}{(1-r)\log^4(1-r)} + C_4.$$

В силу равенства Парсеваля

$$I(r) = \sum k^2 |a_k|^2 r^{2k-2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 r^{2k-2} \le \frac{C_3}{(1-r)\log^4(1-r)} + C_4.$$

Доказательство завершается интегрированием последнего равенства по r.

Замечание. Если продифференцировать функцию $I(r)$ два раза, то теорему 2 можно усилить в том смысле, что вместо ограниченности граничного вращения достаточно потребовать выполнения соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right|^2 d\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1.$$

Теорема 3. *Предположим, что функция f гиперболически выпукла и область $f(D)$ имеет конечное граничное вращение. Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(e^{i\theta})| \log^p(1 + |f'(e^{i\theta})|) d\theta < +\infty \tag{7}$$

для любого положительного $p < 1$.

Замечание. Этот результат неверен при $p = 1$, поскольку для произвольного гиперболически выпуклого кругового многоугольника с нулевыми углами выполняется равенство [3]

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(e^{i\theta})| \log(1 + |f'(e^{i\theta})|)\, d\theta = +\infty.$$

Доказательство теоремы 3. Полагая

$$I(r) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})| \log^p(1 + |f'(re^{i\theta})|)\, d\theta$$

и дифференцируя по r, получаем

$$I'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})| \operatorname{Re}\left[e^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right] \times \left(\log^p(1 + |f'(re^{i\theta})|) + p\frac{|f'(re^{i\theta})| \log^{p-1}(1 + |f'(re^{i\theta})|)}{1 + |f'(re^{i\theta})|}\right) d\theta.$$

Применяя оценку (3), имеем

$$I'(r) \le \frac{C_1 \log^{-2+p} \frac{1}{1-r}}{1-r} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\operatorname{Re}\left[e^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right]\right| d\theta \le \frac{C_2 \log^{-2+p} \frac{1}{1-r}}{1-r},$$

где C_2 — константа, не зависящая от r. Интегрируя последнее равенство по r от $1/2$ до 1, заключаем, что $I(1) < \infty$, что и требовалось доказать.

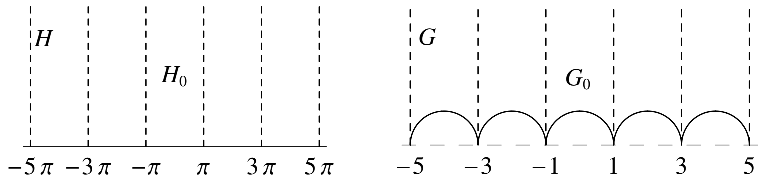

Рис. 1. Верхняя полуплоскость H и область G.

Хотя границы гиперболически выпуклых областей являются спрямляемыми, к сожалению, они не обязаны иметь ограниченное вращение. Разберем типичный пример гиперболически выпуклой области с неограниченным граничным вращением. Пусть G — область, получающаяся из верхней полуплоскости вспомогательной плоскости ω выбрасыванием полукругов $\{\omega=\varphi+i\psi : |\omega-2n|\leq 1,\ \psi>0\}$ (рис. 1). Отметим, что границы этих полукругов ортогональны вещественной оси. С помощью отображения $w=(\omega-i)/(1-i\omega)$ отобразим эту область на изображенную на рис. 2 область $\Omega\subset D=\{|w|<1\}$. Нетрудно показать, что полученная область Ω будет гиперболически выпуклой.

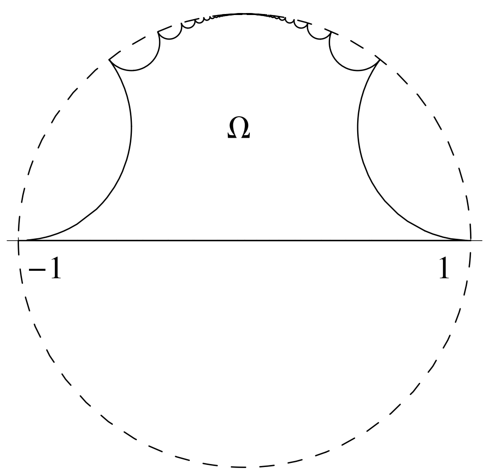

Рис. 2. Гиперболически выпуклая область Ω.

Чтобы найти конформное отображение единичного круга D на область Ω, сначала отобразим верхнюю полуплоскость H вспомогательной плоскости ζ на область G. Для этого построим отображение полуполосы

$$H_0=\{\zeta=\xi+i\eta : \eta>0,\ -\pi<\xi<\pi\}$$

на область

$$G_0=\{\omega=\varphi+i\psi : \psi>\sqrt{1-\varphi^2},\ -1<\varphi<1\}.$$

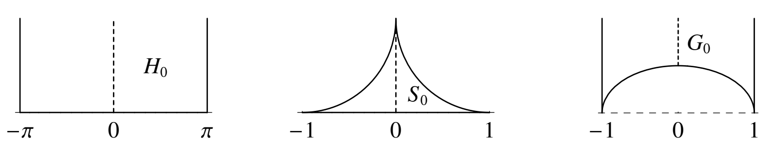

Рис. 3. Полуполоса H_0 последовательно отображается
на криволинейный треугольник S_0 и затем на область G_0.

Искомое отображение может быть найдено путем последовательного отображения полуполосы H_0 на верхнюю полуплоскость. Затем полуплоскость стандартным образом [7, с. 243] отображается на треугольник $S_0 = \{\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 : 0 < \eta_1 < 1 - \sqrt{|\xi_1|(2-|\xi_1|)}, -1 < \xi_1 < 1\}$ (рис. 3). Наконец, треугольник S_0 с помощью дробно-линейного преобразования $\omega = (\zeta_1 + i)/(1 + i\zeta_1)$ отображается на G_0.

Построенное таким образом отображение, переводящее симметричные половины H_0, G_0 друг на друга, обозначим через $g(\zeta)$. Ясно, что в силу принципа симметрии функция $g(\zeta)$ удовлетворяет тождеству $\overline{g(-\bar{\zeta})} \equiv -g(\zeta)$ и, являясь квазипериодической ($g(\zeta + 2k\pi) \equiv g(\zeta) + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$), отображает полуплоскость H на G. Следуя указанной схеме, требуемое отображение получим в виде

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) + i}{1 + if(\zeta)},$$

где

$$f(\zeta) = 2\sin\frac{\zeta}{2}\frac{\Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)}\frac{F\left(3/4, 3/4; 3/2; \sin^2\frac{\zeta}{2}\right)}{F\left(1/4, 1/4; 1/2; \sin^2\frac{\zeta}{2}\right)}. \tag{8}$$

Здесь $F(a, b; c; z)$ — стандартная гипергеометрическая функция. Отображение круга D на интересующую нас гиперболическую область Ω запишется в виде

$$f(z) = 2\frac{\Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z}\right)\frac{F\left(3/4, 3/4; 3/2; -\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z}\right)\right)}{F\left(1/4, 1/4; 1/2; -\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z}\right)\right)},$$

так как

$$f(z) = \frac{g\left(i\frac{1+z}{1-z}\right) - i}{1 - ig\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)}. \tag{9}$$

Покажем справедливость неравенства (7) для функции (9). Имеем

$$f'(z) = \frac{4i}{(1-z)^2}\frac{g'\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)}{\left(1 - ig\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)\right)^2}. \tag{10}$$

В силу (10) найдется абсолютная константа C, не зависящая от θ, такая, что

$$|f'(e^{i\theta})| \le C|g'(\operatorname{ctg}\theta/2)|.$$

Действительно, так как $\operatorname{Im} g > 0$, достаточно доказать последнее неравенство при $e^{i\theta}$, близких к 1. Ввиду квазипериодичности функции g модуль $|g[\operatorname{ctg}(\theta/2)]|$ ведет себя при $\theta \to 0$ как $|\frac{1}{\pi}\operatorname{ctg}(\theta/2)|$, а $|1 - e^{i\theta}| \approx |\operatorname{tg}(\theta/2)|/2$. Итак,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(e^{i\theta})|\log^p(1 + |f'(e^{i\theta})|)\,d\theta = 2\int\limits_{0}^{\pi} |f'(e^{i\theta})|\log^p(1 + |f'(e^{i\theta})|)\,d\theta$$

$$\le 2C\int\limits_{0}^{\pi} |g'(\operatorname{ctg}\theta/2)|\log^p[1 + C|g'(\operatorname{ctg}\theta/2)|]\,d\theta$$

$$= 4C\int\limits_{0}^{\infty} |g'(t)|\log^p(1 + C|g'(t)|)\frac{dt}{1+t^2} \le 4C\int\limits_{-\pi}^{\infty} |g'(t)|\log^p(1 + C|g'(t)|)\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= 4C\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |g'(t)|\log^p(1 + C|g'(t)|)\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\leq 4C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+(2k-1)^2}\int\limits_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}|g'(t)|\log^p(1+C|g'(t)|)\,dt$$

$$= 4C\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g'(t)|\log^p(1+C|g'(t)|)\,dt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+(2k-1)^2}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались периодичностью $g'(\zeta)$. В силу симметричности $g(\zeta)$ остается доказать, что

$$\int\limits_{0}^{\pi}|g'(t)|\log^p(1+|g'(t)|)\,dt < +\infty.$$

Для этого достаточно убедиться, что подынтегральное выражение имеет в точке π интегрируемую особенность. Функция $g(\zeta)$ отображает окрестность точки π в области H_0 на окрестность точки 1 в области G_0. При этом прямолинейные участки границы окрестности точки π переходят в касающиеся в точке $\omega = 1$ отрезок прямой и дугу окружности. Отсюда несложно получить, что главная часть отображения $g(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = \pi$ имеет вид

$$g(\zeta) \approx 1 - \frac{i\pi}{\log[i(\pi-\zeta)]}.$$

Значит,

$$|g'(\zeta)| \approx \frac{\pi}{|(\pi-\zeta)\log(\pi-\zeta)|^2},$$

откуда и следует наше утверждение. Заметим, что к такому же представлению можно прийти, оценивая поведение функции (8) в окрестности точки $\zeta = \pi$, поскольку g связана с f дробно-линейным соотношением (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ma W., Minda D.* Hyperbolically convex functions // Ann. Polon. Math. 1994. V. 40, N 1. P. 81–100.
2. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
3. *Mejía D., Pommerenke Ch.* Sobre aplicationes conformes hiperbólicamente convexas // Rev. Colomb. Mat. 1998. V. 32, N 1. P. 29–43.
4. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А.* Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 25. С. 3–121. (Итоги науки и техники).
5. *Mejía D., Pommerenke Ch.* On the derivative of hyperbolically convex functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2002. V. 27, N 1. P. 47–56.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
7. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

Статья поступила 16 апреля 2004 г., окончательный вариант — 24 июня 2005 г.

Каюмов Ильгиз Рифатович, *Обносов Юрий Викторович*
Научно-исследовательский ин-т математики и механики им. Н. Г. Чеботарева при Казанском гос. университете,
ул. Университетская, 17, Казань 420008
ikayumov@ksu.ru