Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.518.85

ОБ ОЦЕНКЕ n–Й МИНИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ В ЛИНЕЙНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. П. Сидоров

Аннотация: Находится оценка n-й минимальной погрешности линейных алгоритмов для некоторой задачи, определенной в конечномерном пространстве, со значениями в произвольном линейном нормированном пространстве.

Ключевые слова: минимальная погрешность линейных алгоритмов; линейный n-поперечник по Колмогорову; многочлен, наименее уклоняющийся от нуля.

§ 1. Введение

Пусть Z — множество в линейном пространстве Y над полем действительных чисел. Рассмотрим линейный или нелинейный оператор

$$S : Z \to X,$$

где X — нормированное линейное пространство над полем вещественных или комплексных чисел с нормой $\|\cdot\|$. Следуя [1], будем называть S *оператором решения.* Пусть

$$I : A \to B$$

— информационный оператор, $Z \subset A \subset Y$, B — некоторое заданное пространство. Элемент If назовем *информацией об* f.

Для $f \in Z$ обозначим

$$V(f) = \{\tilde{f} : I\tilde{f} = If,\ \tilde{f} \in Z\}, \quad U(f) = \{S\tilde{f} : \tilde{f} \in V(f)\}.$$

Диаметром информации I для задачи (S, Z) называется величина $d(I, S, Z)$, задаваемая формулой

$$d(I, S, Z) = \sup_{f \in Z} \sup_{\tilde{f} \in V(f)} \|S\tilde{f} - Sf\|,$$

радиусом информации I для задачи (S, Z) — величина $r(I, S, Z)$, задаваемая формулой

$$r(I, S, Z) = \sup_{f \in Z} \inf_{a \in X} \sup_{\tilde{f} \in V(f)} \|a - S\tilde{f}\|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00060), гранта «Ведущие научные школы РФ» (код проекта НШ–1295.2003.1), программы «Университеты России» (код проекта УР 04.01.374).

Под алгоритмом мы понимаем всякий оператор

$$\varphi : I(Z) \to X.$$

Погрешностью алгоритма φ называется величина

$$e(\varphi) = \sup_{f \in Z} \|\varphi(If) - Sf\|.$$

В дальнейшем предполагаем, что S — линейный оператор.

Пусть $\Phi(n)$ — класс линейных алгоритмов, использующих линейный информационный оператор кардинальности не выше n, т. е. $\varphi \in \Phi(n)$ означает существование такого линейного информационного оператора

$$I = [L_1, L_2, \dots, L_n],$$

что $\varphi(If) = \sum_{i=1}^{n} (L_i f) \cdot g_i$ для некоторых элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$ из X.

Величина

$$\lambda(n, S, Z) = \inf_{\varphi \in \Phi(n)} e(\varphi) \tag{1.1}$$

называется n-й *минимальной погрешностью* линейных алгоритмов из класса $\Phi(n)$.

В работе [2], обобщая результат [3], было показано, что оценка n-й минимальной погрешности линейных алгоритмов для одной задачи аппроксимации (оператор решения S является тождественным) в произвольном линейном нормированном пространстве сводится к решению в этом пространстве чебышевской задачи о нахождении многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, со старшим коэффициентом, равным единице.

В настоящей статье показывается, что подобный результат справедлив и в том случае, когда оператор решения S не является тождественным.

Для $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ положим $|a| = \max_i |a_i|$. Обозначим

$$P = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : |a| \le 1\}.$$

Пусть $S : \mathbb{R}^{n+1} \to X$ — линейный оператор. В настоящей заметке оценивается n-я минимальная погрешность линейных алгоритмов для задачи (S, P). С учетом этой оценки находятся значения некоторых линейных n-поперечников по Колмогорову и n-поперечников по Гельфанду.

§ 2. Основной результат

Для $0 \le k \le n$ обозначим

$$\mathbb{R}_k^{n+1} = \{c = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ c_k = 1\}.$$

Теорема 1. *Пусть X — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $S : \mathbb{R}^{n+1} \to X$ — некоторый линейный оператор, $P = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : |a| \le 1\}$. Тогда n-я минимальная погрешность линейных алгоритмов для задачи (S, P) будет равна*

$$\lambda(n, S, P) = \min_{0 \le k \le n} \inf_{c \in \mathbb{R}_k^{n+1}} \|Sc\|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Отметим, что если размерность пространства образов линейного оператора S меньше или равна n, то для такой задачи будет $\lambda(n) =$

0. Исключим этот случай из дальнейшего рассмотрения, т. е. будем полагать $\dim\{S(P)\} \geq n+1$.

Возьмем некоторый произвольный информационный линейный оператор I кардинальности n:

$$I = [L_1, \dots, L_n],$$

где $L_1, \dots, L_n$ — линейно независимые функционалы в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Как следует из [1, лемма 3.2, с. 43],

$$r(I, S, P) = \sup_{a \in \Omega} \|Sa\|, \tag{2.2}$$

где $\Omega = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : L_j a = 0,\ j = 1, \dots, n,\ |a| \leq 1\}$.

Для $0 \leq k \leq n$ обозначим $P_k = \{a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |a_k| \leq 1\}$ и рассмотрим задачу (S, P_k).

Пусть $\Omega_k = \{a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : L_j a = 0,\ j = 1, \dots, n,\ |a_k| \leq 1\}$.

Как видно из [1, лемма 3.2, с. 43], радиус информации I для задачи (S, P_k) будет равен

$$r(I, S, P_k) = \sup_{a \in \Omega_k} \|Sa\|. \tag{2.3}$$

Поскольку $\Omega \subset \Omega_k$, то $r(I, S, P) \leq r(I, S, P_k)$. Следовательно,

$$\lambda(n, S, P) \leq \lambda(n, S, P_k). \tag{2.4}$$

Так как $L_1, \dots, L_n$ — линейно независимые функционалы в множестве P_k, система уравнений

$$\begin{cases} L_j a = 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ a_k = \theta \end{cases} \tag{2.5}$$

для некоторого фиксированного $-1 \leq \theta \leq 1$ имеет единственное решение.

Обозначим через $a^{[\theta]}$ решение системы (2.5).

Из (2.3) имеем

$$r(I, S, P_k) = \sup_{-1 \leq \theta \leq 1} \|Sa^{[\theta]}\| \geq \inf_{c \in \mathbb{R}_k^{n+1}} \|Sc\|. \tag{2.6}$$

Известно [1, с. 22], что для любого алгоритма $\varphi \in \Phi(I, S, P_k)$ будет

$$e(\varphi) \geq r(I, S, P_k), \tag{2.7}$$

где $\Phi(I, S, P_k)$ — класс всех алгоритмов, использующих информацию I.

Из (1.1), (2.6) и (2.7) получаем неравенство

$$\lambda(n, S, P_k) \geq \inf_{c \in \mathbb{R}_k^{n+1}} \|Sc\|. \tag{2.8}$$

Покажем, что в (2.8) имеет место равенство.

Определим линейные функционалы F_j, $j = 0, \dots, n$, соотношениями $F_j \alpha = \alpha_j$, где $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Обозначим через $c^{[k]}$ один из элементов множества P_k, для которого

$$\|Sc^{[k]}\| = \inf_{c \in \mathbb{R}_k^{n+1}} \|Sc\|.$$

Отметим, что $\|S(\cdot)\|$ обладает всеми свойствами нормы, поэтому элемент, доставляющий инфимум, существует, хотя, возможно, и не является единственным (см. [4, с. 17]). Тогда $F_j c^{[k]} = c_j^{[k]}$.

Определим функционалы L_p^*, $p = 1, \dots, n$, следующим образом:

$$L_p^* = \sum_{j=0}^{n} \beta_{jp} F_j, \quad p = 1, \dots, n,$$

где числа β_{jp} выбраны так, что функционалы L_p^*, $p = 1, \dots, n$, линейно независимы и выполняются соотношения

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{jp} c_j^{[k]} = 0, \quad p = 1, \dots, n.$$

Тогда $L_p^* c^{[k]} = 0$, $p = 1, \dots, n$, и для алгоритма φ_k^* с информацией $I_k^* = \left[L_1^*, \dots, L_n^*\right]$ будет

$$e\bigl(\varphi_k^*\bigr) = \sup_{a \in \ker I \cap P_k} \|Sa\| = \|Sc^{[k]}\|.$$

Итак, обратное неравенство в (2.8) установлено.

Обозначим

$$d_k = \inf_{c \in \mathbb{R}_k^{n+1}} \|Sc\|. \tag{2.9}$$

Пусть номер l таков, что

$$d_l = \min_k d_k. \tag{2.10}$$

Покажем, что $c^{[l]} \in P$, т. е.

$$|c^{[l]}| \le 1. \tag{2.11}$$

Действительно, для произвольного $k \ne l$ имеем

$$d_l = \|Sc^{[l]}\| = \bigl|c_k^{[l]}\bigr| \, \bigl\|S\bigl(c^{[l]}/c_k^{[l]}\bigr)\bigr\| \ge \bigl|c_k^{[l]}\bigr| \inf_{c \in \mathbb{R}_k^{n+1}} \|Sc\| = \bigl|c_k^{[l]}\bigr| \, \|Sc^{[k]}\| = \bigl|c_k^{[l]}\bigr| d_k.$$

С учетом (2.10) получим (2.11).

Пусть алгоритм φ_l^* с информацией $I^* = \left[L_1^*, \dots, L_n^*\right]$ таков, что

$$e\bigl(\varphi_l^*\bigr) = \lambda(n, S, P_l).$$

Рассмотрим

$$\Omega_l^* = \bigl\{a \in \mathbb{R}^{n+1} : L_j^* a = 0,\ j = 1, \dots, n,\ |a_l| \le 1\bigr\},$$
$$\Omega^* = \bigl\{a \in \mathbb{R}^{n+1} : L_j^* a = 0,\ j = 1, \dots, n,\ |a| \le 1\bigr\}.$$

Тогда $\lambda(n, S, P_l) = r(I^*, S, P_l) = \sup\limits_{a \in \Omega_l^*} \|Sa\| \le \sup\limits_{a \in \Omega^*} \|Sa\| = r(I^*, S, P) = \lambda(n, S, P)$.

Тем самым из (2.4) следует (2.1). $\square$

§ 3. Следствия

Напомним [5], что *линейным n-поперечником по Колмогорову* уравновешенного множества Y в линейном нормированном пространстве X с нормой $\|\cdot\|$ называется величина

$$\lambda_n(Y, X) := \inf_{A_n} \inf_{L : L(Y) \subset A_n} \sup_{x \in Y} \|x - Lx\|, \tag{3.1}$$

где L — линейный оператор с множеством значений $L(Y)$ в линейном подпространстве A_n (пространства X) размерности не больше n.

Хорошо известна связь между некоторыми понятиями теории приближений и теории оптимальных алгоритмов [1]. Так, n-я минимальная погрешность линейных алгоритмов для задачи аппроксимации отличается от соответствующего линейного n-поперечника по Колмогорову лишь множителем.

Положим $q = q(S, P) = \inf\limits_{f \in P} \sup\limits_{cf_2 \in P} c$, $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \ker S$, $f_2 \in \ker S^{\perp}$.

Как вытекает из [1, теорема 5.1, с. 82], для любого $n \ge 1$ имеет место

Следствие 1. *Пусть X — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $S:\mathbb{R}^{n+1}\to X$ — некоторый линейный оператор, $P=\{a\in\mathbb{R}^{n+1}:|a|\le 1\}$. Если $q=q(S,P)\le 1$, то имеет место следующая оценка линейного n-поперечника по Колмогорову:*

$$\lambda_n(S(P),X)=\theta\min_{0\le k\le n}\inf_{c\in\mathbb{R}^{n+1}_k}\|Sc\|,$$

где $\theta\in[1,1/q]$.

Обозначим через $\mathbb{K}^{n+1}$ пространство $(n+1)$-мерных вещественных векторов с нормой $|a|=\max\limits_i|a_i|$, $a=(a_0,\dots,a_n)$. Так как для тождественного оператора S будет $q=q(S,P)=1$, имеет место равенство $\lambda_n(P,\mathbb{K}^{n+1})=1$.

Следствие 2. *Справедливо равенство*

$$\lambda_n(P_n,\mathbb{C}[-1,1])=\frac{1}{2^{n-1}},$$

где P_n обозначает множество алгебраических полиномов вида $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ степени не выше n таких, что $|a_i|\le 1$, $i=0,\dots,n$, $\mathbb{C}[-1,1]$ — пространство всех непрерывных на $[-1,1]$ функций с нормой $\|f\|=\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $S:\mathbb{R}^{n+1}\to P_n$ такой, что для $a=(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ будет $Sa=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$. Пусть $P=\{a\in\mathbb{R}^{n+1}:|a|\le 1\}$. Имеем $q=q(S,P)=1$. Из следствия 1 получаем, что

$$\begin{aligned}\lambda_n(P_n,\mathbb{C}[-1,1])&=\min_{0\le k\le n}\inf_{c_i,i\ne k}\sup_{x\in[-1,1]}\left|x^k-\sum_{i=0,i\ne k}^{n}c_ix^i\right|\\&=\inf_{c_0,\dots,c_{n-1}}\sup_{x\in[-1,1]}\left|x^n-\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i\right|=\|T_n\|=\frac{1}{2^{n-1}},\end{aligned}\tag{3.2}$$

где $T_n(x)=\cos n\arccos x$ есть многочлен Чебышева степени n. $\square$

Пусть Y — уравновешенное множество в линейном нормированном пространстве X с нормой $\|\cdot\|$. Напомним, что величина

$$d^n(Y,X)=\inf_{A^n}\sup_{x\in Y\bigcap A^n}\|x\|,$$

где A^n — подпространство в X с $\operatorname{codim}(A^n)\le n$, называется *$n$-поперечником по Гельфанду.*

Непосредственно из [1, теорема 6.1, с. 57] получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $S:\mathbb{R}^{n+1}\to X$ — некоторый линейный оператор, $P=\{a\in\mathbb{R}^{n+1}:|a|\le 1\}$. Если $q=q(S,P)\le 1$, то имеет место следующая оценка n-поперечника по Гельфанду:*

$$d^n(S(P),X)=\theta\min_{0\le k\le n}\inf_{c\in\mathbb{R}^{n+1}_k}\|Sc\|,$$

где $\theta\in[1,1/q]$.

В частности, если S — тождественный оператор, то получаем равенство $d^n(P,\mathbb{K}^{n+1})=1$.

Следствие 4. *Пусть X — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $P = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : |a| \le 1\}$, $S : \mathbb{R}^{n+1} \to X$ — некоторый линейный оператор такой, что $\|S\| \le 1$. Тогда*

$$\lambda(n, S, P) \le \lambda(n, S_I, P),$$

где S_I — тождественный оператор.

Доказательство. Из утверждения теоремы 1 следует, что

$$\lambda(n, S, P) = \min_{0 \le k \le n} \inf_{c \in \mathbb{R}_k^{n+1}} \|Sc\|. \tag{3.3}$$

При доказательстве теоремы 1 установлено (соотношение (2.11)), что экстремальные значения k и $c^{[k]}$, доставляющие соответственно минимум и инфимум в (3.3), таковы, что $|c^{[k]}| \le 1$. Значит,

$$\lambda(n, S, P) \le \sup_{|c| \le 1} \|Sc\| = \|S\| \le 1.$$

С другой стороны, для тождественного оператора S_I будет $\lambda(n, S_I, P) = 1$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трауб Д., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
2. *Сидоров С. П.* Оценка n-й минимальной погрешности линейных алгоритмов для одной задачи аппроксимации // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44, № 6. С. 997–1001.
3. *Sidorov S. P.* On some extremal properties of Lagrange interpolatory polynomials // J. Approx. Theory. 2002. V. 118, N 1. P. 188–201.
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
5. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.

Статья поступила 11 июня 2004 г.

Сидоров Сергей Петрович
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра математической экономики,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410012
SidorovSP@info.sgu.ru