Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.54

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ОБЫКНОВЕННОГО И ОБОБЩЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЮАМЕЛЯ

М. Т. Караев

Аннотация: Пусть $C_A^{(n)}(D)$ — совокупность n раз непрерывно дифференцируемых функций на замыкании круга D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, голоморфных в D. Доказано, что $C_A^{(n)}(D)$ является банаховой алгеброй относительно произведения Дюамеля, и описано пространство ее максимальных идеалов. С использованием произведения Дюамеля доказано, что обобщенным спектром оператора интегрирования $\mathscr{J}$ в $C_A^{(n)}(D)$ является множество $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Произведение Дюамеля использовано для вычисления кратности спектра прямой суммы вида $\mathscr{J} \oplus A$. Рассмотрено обобщение произведения Дюамеля и описаны все инвариантные подпространства некоторых операторов взвешенного сдвига.

Ключевые слова: произведение Дюамеля, банахова алгебра, максимальный идеал, коммутант, обобщенное собственное значение, обобщенный собственный вектор.

1. Введение

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости и f, g — аналитические в D функции. *Произведением Дюамеля* функций f и g называют следующее выражение (см. [1]):

$$(f \circledast g)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)\,dt = \int_0^z f'(z-t)g(t)\,dt + f(0)g(z), \tag{1}$$

где интеграл берется по отрезку с концами 0 и z. Произведение Дюамеля имеет много приложений в различных областях анализа таких, как граничные задачи для уравнений математической физики, задача наклонного берега [2], теория обыкновенных дифференциальных уравнений [3], операционное исчисление Микусинского [4]. В [5] произведение Дюамеля используется для вычисления кратности спектра прямых сумм операторов. Другие приложения произведения Дюамеля можно найти в [5] (см. также библиографию там), [6–8].

Уигли показал в [1], что для $p \geq 1$ пространство Харди $H^p(D)$ может быть снабжено структурой банаховой алгебры относительно произведения Дюамеля $\circledast$ (более общие результаты можно найти в [9]).

В данной работе мы дадим более прямое доказательство основного результата статьи [10], описывающего пространство максимальных идеалов алгебры $\left(C_A^{(n)}(D), \circledast\right)$ (см. теорему 1 в разд. 2). Кроме того, в разд. 3 мы охарактеризуем обобщенные собственные значения и обобщенные собственные векторы оператора интегрирования $\mathscr{J}$.

Заметим, что интерес к изучению максимальных идеалов $\big(C_A^{(n)}(D), \circledast\big)$ возник в основном при изучении теории взвешенной аппроксимации в банаховых алгебрах. А именно, тот факт, что постоянная функция 1 является циклической для $M_{\circledast,z}$ $(= \mathscr{J})$, эквивалентен тому, что полиномы плотны в пространстве $C_A^{(n)}(D)$. Для произвольной функции $f \in C_A^{(n)}(D)$, как мы увидим в разд. 3, равенство

$$\operatorname{clos}\{p \circledast f : p \in \mathscr{P}\} = C_A^{(n)}(D)$$

(где $\mathscr{P}$ — множество всех полиномов на D) имеет место тогда и только тогда, когда f не принадлежит максимальному идеалу $\big\{g \in C_A^{(n)}(D) : g(0) = 0\big\}$.

Мы также используем произведение Дюамеля при вычислении кратности спектра прямой суммы $\mathscr{J} \oplus A$, где $\mathscr{J}$ — оператор интегрирования, действующий в пространстве Харди $H^2(D)$, и A — подходящий оператор на банаховом пространстве (см. разд. 4). В разд. 5 мы рассмотрим обобщенное произведение Дюамеля для доказательства одноклеточности некоторых операторов взвешенного сдвига.

2. Максимальные идеалы в $\big(\boldsymbol{C_A^{(n)}(D)}, \circledast\big)$

Пусть $C_A^{(n)}(D)$, $n \geq 1$, — алгебра всех n-кратно непрерывно дифференцируемых функций на $\overline{D}$, голоморфных в D. Это банахово пространство с нормой

$$\|f\|_n = \max\{\max_{z\in\overline{D}} |f(z)|, \max_{z\in\overline{D}} |f'(z)|, \dots, \max_{z\in\overline{D}} |f^{(n)}(z)|\}. \tag{2}$$

В этом разделе докажем, что $C_A^{(n)}(D)$ — банахова алгебра относительно произведения Дюамеля, и опишем пространство ее максимальных идеалов.

Теорема 1. (a) *$C_A^{(n)}(D)$ — коммутативная унитальная банахова алгебра относительно произведения Дюамеля.*

(b) *Если $f \in C_A^{(n)}(D)$, то f $\circledast$-обратима тогда и только тогда, когда $f(0) \neq 0$.*

(c) *Пространство максимальных идеалов в $\big(C_A^{(n)}(D), \circledast\big)$ состоит из одного гомоморфизма, а именно функционала значения в нуле $h(f) = f(0)$.*

Доказательство. (a) Используя (1), легко проверить, что

$$(f \circledast g)^{(k)}(z) = \int_0^z f^{(k)}(z-t)g'(t)\,dt + \sum_{m=0}^{k-1} f^{(m)}(0)g^{(k-m)}(z) + g(0)f^{(k)}(z) \tag{3}$$

для любых $f, g \in C_A^{(n)}(D)$ и $1 \leq k \leq n$. Отсюда $f \circledast g$, как определено в (1), также принадлежит $C_A^{(n)}(D)$, так что $C_A^{(n)}(D)$ становится алгеброй относительно произведения $\circledast$. Применяя результаты операционного исчисления из [11], можно показать, что $\big(C_A^{(n)}(D), \circledast\big)$ коммутативна и ассоциативна (на самом деле из (1) ясно, что $f(z) \equiv 1$ — единица в $C_A^{(n)}(D)$, и простая замена переменных приводит к коммутативности). Теперь надо доказать, что

$$\|f \circledast g\|_n \leq c\|f\|_n \|g\|_n \tag{4}$$

для всех $f, g \in C_A^{(n)}(D)$ и для некоторого числа $c > 0$, не зависящего от f и g. Из (1)–(3) имеем

$$|(f \circledast g)(z)| \leq \max|f'| \max|g| + \max|f| \max|g|$$

и

$$|(f \circledast g)^{(k)}(z)| \le \max|f^{(k)}| \max|g'| + \sum_{m=0}^{k-1} \max|f^{(m)}| \max|g^{(k-m)}| + \max|f^{(k)}| \max|g|$$
$$\le \|f\|_n\|g\|_n + k\|f\|_n\|g\|_n + \|f\|_n\|g\|_n = (k+2)\|f\|_n\|g\|_n \le (n+2)\|f\|_n\|g\|_n$$

для всех $k, 1 \le k \le n$. Тем самым

$$\|f \circledast g\|_n \le (n+2)\|f\|_n\|g\|_n, \tag{5}$$

и, полагая $c = n+2$ в (5), получим требуемое неравенство (4), чем завершаем доказательство п. (a).

Следует отметить, что большинство доказательств критерия цикличности для оператора интегрирования $\mathscr{J}$ проводятся с использованием теоремы Титчмарша о свертке (см. [5, 12] и библиографию там). В доказательстве п. (b) мы будем использовать квазинильпотентный оператор вместо упомянутой теоремы Титчмарша.

(b) Если f $\circledast$-обратима, то существует $g \in C_A^{(n)}(D)$ такая, что $f \circledast g = 1$, откуда

$$(f \circledast g)(z) = \int_0^z f'(z-t)g(t)\,dt + f(0)g(z) = 1.$$

Следовательно, $(f \circledast g)(0) = f(0)g(0) = 1$, так что $f(0) \ne 0$.

Обратно, предположим, что $f(0) \ne 0$. Покажем, что в таком случае f $\circledast$-обратима. Достаточно доказать, что «оператор Дюамеля» $\mathscr{D}_f, \mathscr{D}_f g \overset{\text{def}}{=} f \circledast g$, обратим на пространстве $C_A^{(n)}(D)$. С этой целью положим $F = f - f(0)$. Тогда, очевидно, $F(0) = 0$, $f(z) = F(z) + f(0)$ и $\mathscr{D}_f = f(0)I + \mathscr{D}_F$. Для доказательства обратимости $\mathscr{D}_f$ достаточно показать, что оператор $\mathscr{D}_F$ квазинильпотентен, т. е. $\sigma(\mathscr{D}_F) = \{0\}$. Действительно, по формуле Гельфанда для спектрального радиуса (см. [13])

$$r(\mathscr{D}_F) = \lim_{k\to\infty} \left\|\mathscr{D}_F^k\right\|^{\frac{1}{k}},$$

так что оценим $\left\|\mathscr{D}_F^k\right\|^{\frac{1}{k}}$. Имеем

$$(\mathscr{D}_F g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z F(z-t)g(t)\,dt = \int_0^z F'(z-t)g(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} (F' * g)(z) \overset{\text{def}}{=} (\mathscr{K}_{F'}g)(z)$$

для любой $g \in C_A^{(n)}(D)$. Отсюда

$$|(\mathscr{K}_{F'}g)(z)| = \left|\int_0^z F'(z-t)g(t)\,dt\right| \le \int_0^z |F'(z-t)|\,|g(t)|\,|dt| \le \|F\|_n\|g\|_n|z|,$$

$$\left|(\mathscr{K}_{F'}^2 g)(z)\right| = |[\mathscr{K}_{F'}(\mathscr{K}_{F'}g)](z)| = \left|\int_0^z F'(z-t)(\mathscr{K}_{F'}g)(t)\,dt\right|$$
$$= \left|\int_0^z F'(z-t)\left(\int_0^t F'(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)dt\right|$$

$$\le \int\limits_0^z |F'(z-t)| \left(\left| \int\limits_0^t F'(t-\tau) g(\tau) d\tau \right| \right) |\, dt| \le \|F\|_n^2 \|g\|_n \frac{|z|^2}{2!}.$$

По индукции получаем

$$\big| \big(\mathscr{K}_{F'}^k g\big)(z)\big| \le \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{|z|^k}{k!} \tag{6}$$

для любого целого $k \ge 0$. С другой стороны,

$$|(\mathscr{K}_{F'} g)'(z)| = \left| \left(\int\limits_0^z F'(z-t) g(t)\, dt \right)' \right| = \left| \int\limits_0^z F'(z-t) g'(t)\, dt + F'(z) g(0) \right|$$

$$\le \int\limits_0^z |F'(z-t)|\, |g'(t)|\, |dt| + |F'(z)|\, |g(0)| \le \|F\|_n \|g\|_n (|z|+1),$$

$$\big| \big(\mathscr{K}_{F'}^2 g\big)'(z)\big| = \left| \left(\int\limits_0^z F'(z-t) \left(\int\limits_0^t F'(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) dt \right)' \right|$$

$$= \left| \int\limits_0^z F'(z-t) \left(\int\limits_0^t F'(t-\tau) g'(\tau) d\tau + F'(t) g(0) \right) dt \right|$$

$$\le \int\limits_0^z |F'(z-t)| \left(\int\limits_0^t |F'(t-\tau)|\, |g'(\tau)| |d\tau| \right) |dt| + \int\limits_0^z |F'(z-t)|\, |F'(t)|\, |g(0)|\, |dt|$$

$$\le \|F\|_n^2 \|g\|_n \left(\frac{|z|^2}{2} + |z| \right) \le \|F\|_n^2 \|g\|_n \frac{(|z|+1)^2}{2!},$$

$$\big| \big(\mathscr{K}_{F'}^3 g\big)'(z)\big| = \left| \left(\int\limits_0^z F'(z-t) \left(\int\limits_0^t F'(t-\tau) \left(\int\limits_0^\tau F'(\tau-\eta) g(\eta) d\eta \right) d\tau \right) dt \right)' \right|$$

$$= \left| \int\limits_0^z F'(z-t) \left(\int\limits_0^t F'(t-\tau) \left(\int\limits_0^\tau F'(\tau-\eta) g'(\eta) d\eta + F'(\tau) g(0) \right) d\tau \right) dt \right|$$

$$\le \int\limits_0^z |F'(z-t)| \left(\int\limits_0^t |F'(t-\tau)| \left(\int\limits_0^\tau |F'(\tau-\eta)|\, |g'(\eta)| |d\eta| + |F'(\tau)|\, |g(0)| \right) |d\tau| \right) |\, dt|$$

$$\le \|F\|_n^3 \|g\|_n \left(\frac{|z|^3}{6} + \frac{|z|^2}{2} \right) \le \|F\|_n^3 \|g\|_n \frac{(|z|+1)^3}{3!}.$$

По индукции легко доказать, что

$$\big| \big(\mathscr{K}_{F'}^k g\big)'(z)\big| \le \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{(|z|+1)^k}{k!} \tag{7}$$

для любых $z \in \overline{D}$ и $k \ge 0$. С другой стороны, также по индукции можно установить, что

$$\big| \big(\mathscr{K}_{F'}^k g\big)^{(s)}(z)\big| \le \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{(|z|+s)^k}{k!} \tag{8}$$

для всех $z \in \overline{D}$, $s \in \{2, 3, \dots, n\}$ и $k \geq 0$. Из (6)–(8) вытекает, что

$$\left\| \mathscr{K}_{F'}^k g \right\|_n \leq \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{(1+n)^k}{k!},$$

откуда

$$\left\| \mathscr{K}_{F'}^k \right\|_n \leq \|F\|_n^k \frac{(1+n)^k}{k!}$$

и тем самым

$$\left\| \mathscr{K}_{F'}^k \right\|_n^{\frac{1}{k}} \leq \|F\|_n \frac{1+n}{[k!]^{1/k}} \to 0$$

при $k \to \infty$, т. е. $r(\mathscr{K}_{F'}) = 0$. Отсюда $\mathscr{K}_{F'}$ квазинильпотентен, так что $\mathscr{D}_F$ — квазинильпотентный оператор, что завершает доказательство п. (b).

(c) Из (b) следует, что $\sigma(f) = \{f(0)\}$, т. е. спектр произвольного элемента $f \in C_A^{(n)}(D)$ состоит из одной точки $f(0)$. Функции, обращающиеся в нуль в начале координат, образуют максимальный идеал. Любой другой собственный идеал не может иметь элемента, не обращающегося в нуль в начале. Тем самым максимальный идеал только один. Пространство максимальных идеалов в $C_A^{(n)}(D)$ состоит из одного гомоморфизма, а именно из функционала значения в нуле, и преобразование Гельфанда тривиально. Эти рассуждения вместе с пп. (a), (b) дают обоснование п. (c). Теорема доказана.

3. Об обобщенных собственных значениях и обобщенных собственных векторах оператора интегрирования

В качестве приложения метода произведения Дюамеля в этом разделе мы опишем обобщенные собственные значения и соответствующие обобщенные собственные векторы оператора интегрирования

$$\mathscr{J} f(z) = \int_0^z f(t)\,dt,$$

действующего в пространстве $C_A^{(n)}(D)$.

Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство. Обозначим через $L(\mathscr{B})$ банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов на $\mathscr{B}$. Если A — оператор в $L(\mathscr{B})$ и λ — комплексное число, можно задать вопрос: существует ли ненулевой оператор X в $L(\mathscr{B})$ такой, что $AX = \lambda XA$? В случае существования мы, следуя [14], будем говорить, что λ — *обобщенное собственное значение* A и что X — *обобщенный собственный вектор, соответствующий* λ. Более подробную информацию об «обобщенной» спектральной теории можно найти в [14].

Так как $\ker \mathscr{J} = \{0\}$, то $\lambda = 0$ не является обобщенным собственным значением $\mathscr{J}$. В следующем утверждении показано, что $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ — обобщенный спектр для оператора интегрирования $\dot{\mathscr{J}}$.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $X \in L\big(C_A^{(n)}(D)\big)$ *— ненулевой оператор и* $\mathscr{J}$ *— вольтерровский оператор интегрирования на* $C_A^{(n)}(D)$.

(i) *Если* $|\lambda| \leq 1$, *то* $\mathscr{J} X = \lambda X \mathscr{J}$ *тогда и только тогда, когда* X *имеет вид* $XC_\lambda = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}}$, *где* $\mathscr{D}_{X\mathbf{1}}$ *— оператор Дюамеля в* $C_A^{(n)}(D)$ *и* $(C_\lambda f)(z) \overset{\mathrm{def}}{=} f(\lambda z)$ *— оператор композиции в* $C_A^{(n)}(D)$.

(ii) *Если* $|\lambda| > 1$, *то* $\mathscr{J} X = \lambda X \mathscr{J}$ *тогда и только тогда, когда* $X = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda}$, *т. е.*

$$(Xf)(z) = \frac{d}{dz} \int\limits_0^z (X\mathbf{1})(z-t) f\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt, \quad f \in C_A^{(n)}(D).$$

Доказательство. (i) Будем использовать следующую формулу:

$$\mathscr{J}^n f = \frac{z^n}{n!} \circledast f, \quad f \in C_A^{(n)}(D), \tag{9}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $\mathscr{J} X = \lambda X \mathscr{J}$. Тогда $\lambda^n X \mathscr{J}^n = \mathscr{J}^n X$ для каждого n, так что $\lambda^n X \mathscr{J}^n f = \mathscr{J}^n X f$ для всех $f \in C_A^{(n)}(D)$. В частности, $\lambda^n X \mathscr{J}^n \mathbf{1} = \mathscr{J}^n X\mathbf{1}$, и согласно (9)

$$X\left(\frac{(\lambda z)^n}{n!} \circledast \mathbf{1}\right) = \left(\frac{z^n}{n!} \circledast X\mathbf{1}\right),$$

или

$$X(\lambda z)^n = z^n \circledast X\mathbf{1}, \quad n \geq 0.$$

Ввиду плотности полиномов в $C_A^{(n)}(D)$ получаем

$$(Xf)(\lambda z) = X\mathbf{1} \circledast f(z)$$

для всех $f \in C_A^{(n)}(D)$. Отсюда $XC_\lambda f = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} f$, тем самым $XC_\lambda = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}}$.

С другой стороны, если $XC_\lambda = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}}$, то для любого полинома p получим

$$\begin{aligned}\mathscr{J} Xp(z) &= \mathscr{J} XC_{1/\lambda} p(\lambda^{-1} z) \mathscr{J} \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} p(\lambda^{-1} z) = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} \mathscr{J} p(\lambda^{-1} z) \\ &= XC_\lambda \mathscr{J} p(\lambda^{-1} z) = XC_\lambda (z \circledast p(\lambda^{-1} z)) = \lambda XC_{1/\lambda}(\lambda^{-1} z \circledast p(\lambda^{-1} z)) \\ &= \lambda XC_\lambda (\mathscr{J} p)(\lambda^{-1} z) = \lambda X \mathscr{J} p(z),\end{aligned}$$

что завершает доказательство п. (i) на основании плотности множества полиномов в $C_A^{(n)}(D)$.

(ii) Пусть $\lambda X \mathscr{J} = \mathscr{J} X$. Тогда $\frac{1}{\lambda} \mathscr{J} X = X \mathscr{J}$ и поэтому $\frac{1}{\lambda^n} \mathscr{J}^n X = X \mathscr{J}^n$ для любого $n \geq 0$. Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве п. (i), можно показать, что

$$Xf(z) = X\mathbf{1} \circledast f(z/\lambda), \quad f \in C_A^{(n)}(D),$$

а это означает, что $X = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda}$, т. е.

$$(Xf)(z) = \frac{d}{dz} \int\limits_0^z (X\mathbf{1})(z-t) f\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt.$$

Покажем теперь, что каждый оператор вида $X = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda}$ удовлетворяет уравнению $\lambda X \mathscr{J} = \mathscr{J} X$. В самом деле, для любой $f \in C_A^{(n)}(D)$ имеем

$$\begin{aligned}(X \mathscr{J} f)(z) &= (\mathscr{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} \mathscr{J} f)(z) = \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} (\mathscr{J} f)(z/\lambda) = X\mathbf{1} \circledast (\mathscr{J} f)(z/\lambda) \\ &= X\mathbf{1} \circledast (z/\lambda \circledast f(z/\lambda)) = z/\lambda \circledast (X\mathbf{1} \circledast f(z/\lambda)) = z/\lambda \circledast \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} f(z) \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathscr{J} \mathscr{D}_{X\mathbf{1}} C_{1/\lambda} f(z) = \frac{1}{\lambda} \mathscr{J} X f(z),\end{aligned}$$

и доказательство п. (ii) закончено.

Теорема 2 доказана.

4. Спектральная кратность оператора $\mathscr{J} \oplus \boldsymbol{A}$

Пусть $H^2(D)$ — пространство Харди всех функций $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \in \mathscr{H}ol(D)$ таких, что $\|f\|^2_{H^2(D)} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < +\infty$. Напомним, что если X — сепарабельное банахово пространство и A — ограниченный линейный оператор, действующий в X, т. е. $A \in L(X)$, то $E \subset X$ — циклическое подпространство для A, если $\operatorname{span}\{A^k E : k \geq 0\} = X$; вектор $x \in X$ называют *циклическим вектором* ($x \in \operatorname{Cyc}(A)$) для A, если $\operatorname{span}\{A^k x : k \geq 0\} = X$, где span — символ замкнутой линейной оболочки множества в X. *Спектральная кратность* (кратность спектра) $\mu(A)$ оператора $A \in L(X)$ — это следующее число (или символ ∞):

$$\mu(A) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\dim E : \operatorname{span}\{A^n E : n \geq 0\} = X\}.$$

Оператор A циклический, если $\mu(A) = 1$.

Пусть $A \oplus B$ — прямая сумма линейных ограниченных операторов A и B, действующих в банаховых пространствах X и Y соответственно,

$$(A \oplus B)(x \oplus y) = Ax \oplus By, \quad x \oplus y \in X \oplus Y.$$

Известно, что

$$\max\{\mu(A), \mu(B)\} \leq \mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B). \tag{10}$$

В следующей теореме вычисляется кратность спектра оператора вида $\mathscr{J} \oplus A$ с использованием произведения Дюамеля.

Теорема 3. *Пусть* $\mathscr{J}$, $\mathscr{J} f(z) = \int\limits_0^z f(t)\,dt$, *— оператор интегрирования на пространстве Харди* $H^2(D)$, *и пусть* $A \in L(X)$ *— оператор такой, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n! \|A^n x\|)^2 \overset{\text{def}}{=} c_x < +\infty$$

для любого $x \in X$. *Тогда* $\mu(\mathscr{J} \oplus A) = 1 + \mu(A)$.

Доказательство. Из неравенства (10) вытекает, что в случае $\mu(A) = +\infty$ доказательство очевидно, поэтому будем считать, что $\mu(A) = n < +\infty$.

Пусть $\mu(\mathscr{J} \oplus A) = \mu(A) = n$. Пусть $\{f_i \oplus x_i\}_{i=1}^n$ — циклическое множество векторов оператора $\mathscr{J} \oplus A$. Тогда $\{f_i\} \in \operatorname{Cyc}(\mathscr{J})$. Значит, существует $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое, что $f_{i_0}(0) \neq 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $i_0 = 1$, т. е. $f_1(0) \neq 0$. Так как в этом случае f_1 обратим в банаховой алгебре $(H^2(D), \circledast)$ (см. [3, теорема 1]), существует функция $F_1 \in H^2(D)$ такая, что $(F_1 \circledast f_1)(z) \equiv 1$, и тем самым $F_1(0) \neq 0$. Рассмотрим матрицу

$$M(z) = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -f_2 \circledast F_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -f_3 \circledast F_1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -f_n \circledast F_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathscr{B}$ — преобразование Бореля из $\mathscr{H}ol(D)$ на пространство формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\mathbf{Z}]]$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, определенное равенством

$$\mathscr{B}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n! \hat{f}(n) \mathbf{Z}^n.$$

Обратное преобразование Бореля $\mathscr{B}^{-1}$ действует по формуле

$$\mathscr{B}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{Z}^n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Известно (см. [5, лемма 1]), что если $f, g \in \mathscr{H}ol(D)$ и $\mathscr{J}$ — оператор интегрирования, действующий в $\mathscr{H}ol(D)$, то

$$f \circledast g = (\mathscr{B}f)(\mathscr{J})g = (\mathscr{B}g)(\mathscr{J})f, \tag{11}$$

где $(\mathscr{B}f)(\mathscr{J})g \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\hat{f}(n)(\mathscr{J}^n g)(z)$. Полагая теперь

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

и рассматривая (11), получим

$$(\mathscr{B}M)(\mathscr{J})\vec{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (\mathscr{B}F_1)(\mathscr{J}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (\mathscr{B}(-f_2 \circledast F_1))(\mathscr{J}) & I & 0 & \dots & 0 \\ (\mathscr{B}(-f_3 \circledast F_1))(\mathscr{J}) & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathscr{B}(-f_n \circledast F_1))(\mathscr{J}) & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathscr{B}F_1)(\mathscr{J})f_1 \\ (\mathscr{B}(-f_2 \circledast F_1))(\mathscr{J})f_1 + f_2 \\ (\mathscr{B}(-f_3 \circledast F_1))(\mathscr{J})f_1 + f_3 \\ \vdots \\ (\mathscr{B}(-f_n \circledast F_1))(\mathscr{J})f_1 + f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \circledast f_1 \\ (-f_2 \circledast F_1) \circledast f_1 + f_2 \\ (-f_3 \circledast F_1) \circledast f_1 + f_3 \\ \vdots \\ (-f_n \circledast F_1) \circledast f_1 + f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\circledast$-$\det(\mathscr{B}M)(0) = (\mathscr{B}F_1)(0) \neq 0$, ясно, что $(\mathscr{B}F)(\mathscr{J})$ и $(\mathscr{B}F)(A)$ суть обратимые операторы в $(H^2(D))^n \stackrel{\text{def}}{=} H^2(D) \times \dots \times H^2(D)$ и $X^n \stackrel{\text{def}}{=} X \times \dots \times X$ соответственно. Нетрудно увидеть, (см. [5, теорема 3] и библиографию в [5]), что

$$\{((\mathscr{B}M)(\mathscr{J})\vec{f})_i \oplus ((\mathscr{B}M)(A)x)_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

является циклическим множеством оператора $\mathscr{J} \oplus A$. Таким образом, мы получаем новое циклическое множество $\{1 \oplus y_1, 0 \oplus y_2, \dots, 0 \oplus y_n\}$. Тем самым для любого $x \in X$ существует семейство полиномов $\{P_{m,i}\}_{i=1}^n$ такое, что

$$\lim_{m\to\infty} P_{m,1}(\mathscr{J})1 = 0 \quad \text{в } H^2(D), \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^n P_{m,i}(A)y_i = x \quad \text{в } X.$$

Отсюда, используя (11), получаем

$$\lim_{m\to\infty} q_{m,1}(z) = 0 \quad \text{в } H^2(D),$$

где

$$q_{m,1}(z) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathscr{B}^{-1}P_{m,1})(z) = \sum_{k\ge 0} \frac{1}{k!}\widehat{P}_{m,1}(k)z^k,$$

$\mathscr{B}^{-1}$ — обратное преобразование Бореля. Согласно условиям теоремы имеем

$$\|P_{m,1}(A)y_1\| = \Big\|\sum_{k\ge 0}\widehat{P}_{m,1}(k)A^k y_1\Big\| \le \sum_{k\ge 0}|\widehat{P}_{m,1}(k)|\,\|A^k y_1\|$$

$$= \sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!}|\widehat{P}_{m,1}(k)|k!\|A^k y_1\| \le \bigg(\sum_{k\ge 0}\Big(\frac{1}{k!}|\widehat{P}_{m,1}(k)|\Big)^2\bigg)^{1/2}\Big(\sum_{k\ge 0}(k!\|A^k y_1\|)^2\Big)^{1/2}$$

$$= c_{y_1}^{1/2}\Big(\sum_{k\ge 0}|\hat{q}_{m,1}(k)|^2\Big)^{1/2} = c_{y_1}^{1/2}\|q_{m,1}\|_{H^2(D)} \to 0, \quad m\to\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=2}^{n}P_{m,i}(A)y_i = x.$$

Так как вектор x произволен, это означает, что $\{y_i\}_{i=2}^n$ — циклическое множество оператора A, откуда $\mu(A)\le n-1$. Но это противоречит тому, что $\mu(A)=n$. Теорема 3 доказана.

5. Инвариантные подпространства операторов взвешенного сдвига на алгебре Винера $W(D)$

Пусть $W(D)$ — диск-алгебра Винера, состоящая из всех функций

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n \in \mathscr{H}ol(D),$$

удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{W(D)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)| < +\infty.$$

В следующей теореме, применяя дискретный аналог произведения Дюамеля

$$(f\circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)\,dt,$$

опишем решетку всех инвариантных подпространств некоторых операторов взвешенного сдвига.

Теорема 4. *Пусть T, $Tz^n = \lambda_n z^{n+1}$, $\lambda_n \ne 0$, $n\ge 0$, — оператор взвешенного сдвига, действующий непрерывно в алгебре Винера $W(D)$. Положим $E_i \overset{\text{def}}{=} \operatorname{span}\{z^k : k\ge i\}$, $i=1,2,\dots$, и $w_n \overset{\text{def}}{=} \lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}$, $w_0 \overset{\text{def}}{=} 1$. Допустим, что для любого целого $i\ge 0$ существует номер $N \overset{\text{def}}{=} N_i \ge i$ такой, что*

$$\sum_{n,m\ge N}\left|\frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\right| < \infty. \tag{12}$$

Тогда $\operatorname{Lat} T = \{E_i : i=1,2,\dots\}$, т. е. T — одноклеточный оператор в $W(D)$.

Доказательство. Для любых функций

$$f(z) = \sum_{n\ge i}\hat{f}(n)z^n, \quad g(z) = \sum_{n\ge i}\hat{g}(n)z^n$$

из подпространства E_i ($i \geq 0$) определим следующий дискретный аналог произведения Дюамеля $\circledast$:

$$(f \underset{i}{\widetilde{\circledast}} g)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n,m \geq i} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m} \hat{f}(n)\hat{g}(m) z^{n+m-i} \tag{13}$$

(из (13) ясно, что обычное произведение Дюамеля соответствует случаю $w_n = \frac{1}{n!}$ и $i = 0$). Согласно условию (12) определение (13) корректно. Обозначим

$$r_n(f) = \sum_{k \geq n} \hat{f}(k) z^k.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(f \underset{i}{\widetilde{\circledast}} g)(z) &= \sum_{n,m \geq i} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m} \hat{f}(n)\hat{g}(m) z^{n+m-i} = \sum_{n \geq i} \frac{\hat{f}(n)}{w_n} \sum_{m \geq i} \frac{w_{n+m-i}}{w_m} \hat{g}(m) z^{n+m-i} \\
&= \frac{\hat{f}(i)}{w_i} \sum_{m \geq i} \hat{g}(m) z^m + \frac{\hat{f}(i+1)}{w_{i+1}} \sum_{m \geq i} \frac{w_{m+1}}{w_m} \hat{g}(m) z^{m+1} + \frac{\hat{f}(i+2)}{w_{i+2}} \sum_{m \geq i} \frac{w_{m+2}}{w_m} \hat{g}(m) z^{m+2} + \\
&\cdots + \frac{\hat{f}(i+N-1)}{w_{i+N-1}} \sum_{m \geq i} \frac{w_{m+N-1}}{w_m} \hat{g}(m) z^{m+N-1} + \sum_{n \geq N} \frac{\hat{f}(n)}{w_n} \sum_{m \geq i} \frac{w_{n+m-i}}{w_m} \hat{g}(m) z^{n+m-i} \\
&= \frac{\hat{f}(i)}{w_i} g + \frac{\hat{f}(i+1)}{w_{i+1}} Tg + \cdots + \frac{\hat{f}(i+N-1)}{w_{i+N-1}} T^{N-1} g + \frac{\hat{g}(i)}{w_i} r_N(f) + \frac{\hat{g}(i+1)}{w_{i+1}} r_N(Tf) + \\
&\qquad \cdots + \frac{\hat{g}(i+N-1)}{w_{i+N-1}} r_N(T^{N-1} f) + \sum_{n \geq N} \sum_{m \geq N} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m} \hat{f}(n)\hat{g}(m) z^{n+m-i}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\|f \underset{i}{\widetilde{\circledast}} g\| \leq{}& \left|\frac{\hat{f}(i)}{w_i}\right| \|g\| + \left|\frac{\hat{f}(i+1)}{w_{i+1}}\right| \|Tg\| + \cdots + \left|\frac{\hat{f}(i+N-1)}{w_{i+N-1}}\right| \|T^{N-1} g\| \\
&+ \left|\frac{\hat{g}(i)}{w_i}\right| \|r_N(f)\| + \left|\frac{\hat{g}(i+1)}{w_{i+1}}\right| \|r_N(Tf)\| + \cdots + \left|\frac{\hat{g}(i+N-1)}{w_{i+N-1}}\right| \|r_N(T^{N-1} f)\| \\
&+ \sum_{n \geq N} \sum_{m \geq N} \left|\frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\right| |\hat{f}(n)|\, |\hat{g}(m)|\, \|z^{n+m-i}\| \\
&\leq c_i \|f\|\, \|g\| + \sum_{n \geq N} \sum_{m \geq N} \left|\frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\right| \|f\|\, \|g\| \leq C_i \|f\|\, \|g\|.
\end{aligned}$$

Тем самым

$$||f \underset{i}{\widetilde{\circledast}} g|| \leq C_i \|f\|_{E_i} \|g\|_{E_i} \tag{14}$$

для любых $f, g \in E_i$ ($i \geq 0$), так что E_i — банахова алгебра относительно $\underset{i}{\widetilde{\circledast}}$ с единицей $w_i z^i$. Теперь ввиду (14) каждая функция $f \in E_i$ определяет ограниченный оператор

$$D_{f,i} \stackrel{\text{def}}{=} f \underset{i}{\widetilde{\circledast}} g \quad (g \in E_i).$$

Отсюда и из (13) вытекает, что $T^n g = w_{i+n} z^{i+n} \underset{i}{\widetilde{\circledast}} g$ для всех $g \in E_i$ и $n \geq 0$, поэтому

$$T^n g = D_{g,i}(w_{i+n} z^{i+n}) \tag{15}$$

для всех $g \in E_i$ $(i \geq 0)$ и $n \geq 0$. Действительно, для любых $g \in E_i$ и $n \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} T^n g = T^n\Big(\sum_{m\geq i}\hat g(m)z^m\Big) &= \sum_{m\geq i}\hat g(m)T^n z^m = \sum_{m\geq i}\hat g(m)\lambda_m\lambda_{m+1}\dots\lambda_{m+n-1}z^{m+n}\\ &= \sum_{m\geq i}\hat g(m)\frac{w_{m+n}}{w_m}z^{m+n} = \sum_{m\geq i} w_{i+n}\hat g(m)\frac{w_{i+n+m-i}}{w_{i+n}w_m}z^{i+n+m-i}\\ &= \sum_{m\geq i} w_{i+n}\hat g(m)(z^{i+n}\underset{i}{\widetilde{\circledast}}z^m) = w_{i+n}z^{i+n}\underset{i}{\widetilde{\circledast}}\sum_{m\geq i}\hat g(m)z^m\\ &= w_{i+n}z^{i+n}\underset{i}{\widetilde{\circledast}}g = D_{g,i}(w_{i+n}z^{i+n}). \end{aligned}$$

Очевидно, что все подпространства E_i, $i = 0, 1, \dots,$ инвариантны для оператора T. Поскольку замкнутая линейная оболочка системы векторов

$$f, Tf, T^2 f, \dots, \quad f \in W(D), \tag{16}$$

является инвариантным подпространством для T, оператор T одноклеточен в пространстве $W(D)$ тогда и только тогда, когда для любой $f \neq 0$ система (16) полна в некотором подпространстве E_i, $i = 0, 1, \dots,$ $i = i(f)$. Докажем, что полнота системы (16) в E_i эквивалентна условию $\hat f(i) \neq 0$. Действительно, согласно (15) имеем

$$\operatorname{span}\{T^n f : n \geq 0\} = \operatorname{clos} D_{f,i}\operatorname{span}\{w_{i+n}z^{i+n} : n \geq 0\} = \operatorname{clos} D_{f,i}E_i,$$

и поэтому

$$\operatorname{span}\{T^n f : n \geq 0\} = E_i \Leftrightarrow \operatorname{clos} D_{f,i}E_i = E_i.$$

Остается показать, что

$$\operatorname{clos} D_{f,i}E_i = E_i \Leftrightarrow \hat f(i) \neq 0.$$

В самом деле, $\operatorname{clos} D_{f,i}E_i = E_i$, так что существует последовательность функций $\{f_n\} \subset E_i$ такая, что $f\underset{i}{\widetilde{\circledast}}f_n \to w_i z^i$ при $n \to \infty$, или $\frac{1}{w_i}\hat f(i)\hat f_n(i) \to w_i \neq 0$ при $n \to \infty$, откуда вытекает, что $\hat f(i) \neq 0$.

Обратно, если $\hat f(i) \neq 0$, то докажем, что $D_{f,i}$ — обратимый в E_i оператор, откуда сможем заключить, что $\operatorname{clos} D_{f,i}E_i = E_i$, т. е. получить требуемое.

Действительно, так как $w_i z^i\underset{i}{\widetilde{\circledast}}g = g$ для всех $g \in E_i$, запишем оператор $D_{f,i}$ в виде

$$D_{f,i} = \frac{\hat f(i)}{w_i}I + D_{f-\hat f(i)z^i,i}.$$

Поэтому для доказательства обратимости оператора $D_{f,i}$ достаточно показать, что какая-либо степень оператора $D_{f-\hat f(i)z^i,i}$ компактна и $\ker D_{f,i} = \{0\}$, откуда по теореме С. М. Никольского (см. [15]) получим обратимость оператора $D_{f,i}$. Для этого положим $f_1 \overset{\text{def}}{=} f - \hat f(i)z^i$ и $F \overset{\text{def}}{=} [f_1]^{\underset{i}{\widetilde{\circledast}}N+1} = \overbrace{f_1\underset{i}{\widetilde{\circledast}}\dots\underset{i}{\widetilde{\circledast}}f_1}^{N+1}$. Простые вычисления показывают, что

$$\widehat F(i) = \widehat F(i+1) = \dots = \widehat F(i+N) = 0.$$

Тем самым для любого $g \in E_i$ имеем

$$D_{f_1,i}^{N+1}g = [f_1]^{\underset{i}{\widetilde{\circledast}}N+1}\underset{i}{\widetilde{\circledast}}g = F\underset{i}{\widetilde{\circledast}}g = \sum_{n\geq i}\frac{\widehat F(n)}{w_n}\sum_{m\geq i}\frac{w_{n+m-i}}{w_m}\hat g(m)z^{n+m-i}$$

$$= \sum_{n\ge i+N+1} \frac{\widehat{F}(n)}{w_n} \sum_{m\ge i} \frac{w_{n+m-i}}{w_m}\hat{g}(m)z^{n+m-i}$$

$$= \frac{\hat{g}(i)}{w_i} \sum_{n\ge i+N+1} \widehat{F}(n)z^n + \frac{\hat{g}(i+1)}{w_{i+1}} r_{i+N+1}(TF) + \dots$$

$$+ \frac{\hat{g}(i+N)}{w_{i+N}} r_{i+N+1}(T^N F) + \sum_{n\ge i+N+1} \sum_{m\ge i+N+1} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\widehat{F}(n)\hat{g}(m)z^{n+m-i}$$

$$= \sum_{j=1}^{i+N} \frac{\hat{g}(j)}{w_j} r_{i+N+1}(T^{j-1}F) + \sum_{n\ge i+N+1} \sum_{m\ge i+N+1} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\widehat{F}(n)\hat{g}(m)z^{n+m-i}$$

$$= \sum_{j=1}^{i+N} \frac{\hat{g}(j)}{w_j} r_{i+N+1}(T^{j-1}F) + \sum_{n=i+N+1}^{M} \sum_{m=i+N+1}^{M} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\widehat{F}(n)\hat{g}(m)z^{n+m-i}$$

$$+ \sum_{n=i+N+1}^{M} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\widehat{F}(n)\hat{g}(m)z^{n+m-i}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \sum_{m=i+N+1}^{M} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\widehat{F}(n)\hat{g}(m)z^{n+m-i}.$$

Рассмотрим следующий конечномерный оператор:

$$\mathscr{K}_M^{(i)} g \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{i+N} \frac{\hat{g}(j)}{w_j} r_{i+N+1}(T^{j-1}F) + \sum_{n=i+N+1}^{M} \sum_{m=i+N+1}^{M} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\widehat{F}(n)\hat{g}(m)z^{n+m-i}.$$

Исходя из условия (12) теоремы, получим

$$\left\|D_{f_1,i}^{N+1} - \mathscr{K}_M^{(i)}\right\|_{L(E_i)} = \sup_{\|g\|\le 1} \left\|D_{f_1,i}^{N+1} g - \mathscr{K}_M^{(i)} g\right\|_{E_i}$$

$$= \sup_{\|g\|\le 1} \Bigg\| \sum_{n=i+N+1}^{M} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\widehat{F}(n)\hat{g}(m)z^{n+m-i}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \sum_{m=i+N+1}^{\infty} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\widehat{F}(n)\hat{g}(m)z^{n+m-i} \Bigg\|_{E_i}$$

$$\le C_i \left(\sum_{n=i+N+1}^{M} \sum_{m=M+1}^{\infty} \left|\frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\right| + \sum_{n=M+1}^{\infty} \sum_{m=i+N+1}^{\infty} \left|\frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\right| \right) \to 0$$

при $M \to +\infty$. Отсюда $D_{f_1,i}^{N+1}$ — компактный в E_i оператор.

Покажем теперь, что $\ker D_{f,i} = \{0\}$. Действительно, если $g \in E_i$, $g \in \ker D_{f,i}$, т. е. $f \underset{i}{\widetilde{\circledast}} g = 0$, то простые вычисления показывают, что

$$\frac{\hat{f}(i)}{w_i}\hat{g}(i) = 0,$$

$$\frac{\hat{f}(i)}{w_i}\hat{g}(i+1) + \frac{\hat{f}(i+1)}{w_i}\hat{g}(i) = 0,$$

$$\frac{\hat{f}(i)}{w_i}\hat{g}(i+2) + \frac{w_{i+2}}{w_{i+1}^2}\hat{f}(i+1)\hat{g}(i+1) + \frac{\hat{f}(i+2)}{w_i}\hat{g}(i) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Так как $\hat{f}(i) \neq 0$, из этой бесконечной системы получаем, что

$$0 = \hat{g}(i) = \hat{g}(i+1) = \hat{g}(i+2) = \dots,$$

так что $g = 0$. По теореме С. М. Никольского выводим, что оператор $D_{f,i}$ обратим в E_i. Теорема доказана.

В завершение укажем некоторые применения формулы (15).

Предложение 5. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4. *Тогда*

(a) $\{T \mid E_i\}' = \{D_{f,i} : f \in E_i\}$, $i \geq 0$, *т. е. коммутант оператора* $T \mid E_i$ *состоит из «операторов Дюамеля»* $D_{f,i}$, $f \in E_i$;

(b) *если* $|w_i| = 1$, *то*

$$\|p(T \mid E_i)\|_{L(E_i)} = \|q\|_{E_i}$$

для всех полиномов $p = \sum\limits_{n \geq i} \hat{p}(n) z^n$, где $q \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n \geq i} w_n \hat{p}(n) z^n$.

Доказательство. (a) В силу формулы

$$Tf = D_{f,i}(w_{i+1} z^{i+1}) = f \underset{i}{\widetilde{\circledast}} w_{i+1} z^{i+1}, \quad f \in E_i,$$

а также коммутативности и ассоциативности «произведения Дюамеля» $\underset{i}{\widetilde{\circledast}}$ ($i \geq 0$) включение $\{D_{f,i} : f \in E_i\} \subset \{T \mid E_i\}'$ очевидно. Пусть теперь $A \in \{T \mid E_i\}'$ — произвольный оператор. Тогда

$$(T \mid E_i)^k A w_i z^i = A (T \mid E_i)^k w_i z^i$$

для всех $k \geq 0$, так что по формуле (15)

$$w_{i+k} z^{i+k} \underset{i}{\widetilde{\circledast}} A w_i z^i = A(w_{i+k} z^{i+k} \underset{i}{\widetilde{\circledast}} w_i z^i) = A w_{i+k} z^{i+k}.$$

Отсюда

$$A z^{i+k} = A w_i z^i \underset{i}{\widetilde{\circledast}} z^{i+k} \quad (k \geq 0),$$

следовательно, $Ap = A w_i z^i \underset{i}{\widetilde{\circledast}} p$ для всех полиномов $p = \sum\limits_{n \geq i} \hat{p}(n) z^n \in E_i$. Так как E_i — банахова алгебра относительно $\underset{i}{\widetilde{\circledast}}$ (см. (14)), из последнего равенства вытекает, что $Af = A w_i z^i \underset{i}{\widetilde{\circledast}} f$ для каждого $f \in E_i$. Обозначая $g \stackrel{\text{def}}{=} A w_i z^i$, получим $A = D_{g,i}$, где $g \in E_i$. В частности, если $i = 0$, то $A = D_{A1}$. Доказательство п. (a) завершено.

(b) Из формулы

$$T^k f = w_{i+k} z^{i+k} \underset{i}{\widetilde{\circledast}} f, \quad f \in E_i,\ k \geq 0,$$

очевидно, что $p(T \mid E_i) f = q \underset{i}{\widetilde{\circledast}} f$ для всех полиномов $p = \sum\limits_{n \geq i} \hat{p}(n) z^n \in E_i$, где q — полином вида $q = \sum\limits_{n \geq i} w_n \hat{p}(n) z^n$. Отсюда

$$\|p(T \mid E_i) f\| \leq \|q\| \|f\|,$$

так что

$$\|p(T \mid E_i)\| \leq \|q\|$$

и, поскольку $q \underset{i}{\widetilde{\circledast}} w_i z^i = q$, имеем $p(T \mid E_i) w_i z^i = q$. Тем самым, учитывая, что $\|w_i z^i\| = 1$, получаем $\|p(T \mid E_i)\|_{L(E_i)} = \|q\|_{E_i}$, что доказывает п. (b).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wigley N. M.* A Banach algebra structure for H^p // Canad. Math. Bull. 1975. V. 18, N 4. P. 597–603.
2. *Wigley N. M.* The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J. 1974. V. 41, N 1. P. 211–217.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
4. *Mikusinski J.* Operational calculus. Warszawa: PWN, 1956.
5. *Караев М. Т.* Некоторые применения произведения Дюамеля // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН. 2003. Т. 303. С. 145–160.
6. *Dimovski I.* Convolutional calculus. Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1982.
7. *Bozhinov N.* Convolutional representations of commutants and multipliers. Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1988.
8. *Фаге М. К., Нигнибида Н. И.* Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Новосибирск: Наука, 1987.
9. *Караев М. Т.* Использование произведения Дюхамеля в описании инвариантных подпространств // Тр. ИММ АН Азербайджана. 1995. С. 137–146.
10. *Karaev M. T., Tuna H.* Description of maximal ideal space of some Banach algebra with multiplication as Duhamel product // Complex Variables: Theory and Applications. 2004. V. 49, N 6. P. 449–457.
11. *Krabbe G.* Operational calculus. New York: Springer-Verl., 1970.
12. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 199–412. (Итоги науки и техники).
13. *Dunford N., Schwartz L.* Linear operators. P. I: General theory. New York: Springer-Verl., 1958.
14. *Biswas A., Lambert A., Petrovic S.* Extended eigenvalues and the Volterra operator // Glasgow Math. J. 2002. V. 44. P. 521–534.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 19 июля 2004 г., окончательный вариант — 15 ноября 2004 г.

Karaev Mubariz (Караев Мубариз Тапдыг оглы)
Suleyman Demirel University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Mathematics
32260 Isparta, TURKEY
garayev@fef.sdu.edu.tr