*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5*

*УДК 510.53+515.1*

# О ГОМЕОМОРФИЗМАХ ЭФФЕКТИВНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

**А. С. Морозов**

**Аннотация:** Изучаются эффективные представления и гомеоморфизмы эффективных топологических пространств. С помощью построения функтора из категории вычислимых моделей в категорию эффективных топологических пространств, в частности, показано, что существуют гомеоморфные эффективные топологические пространства, между которыми не существует гиперарифметического гомеоморфизма; существуют эффективные топологические пространства с группой автогомеоморфизмов мощности континуум, среди которых только тривиальный автогомеоморфизм является гиперарифметическим. Показано также, что если группа автогомеоморфизмов гиперарифметического топологического пространства имеет мощность менее $2^{\omega}$, то эта группа гиперарифметическая.

Введено понятие сильного вычислимого гомеоморфизма и решена проблема числа эффективных представлений $T_0$-пространств с эффективной базой открыто-замкнутых множеств относительно сильных гомеоморфизмов.

**Ключевые слова:** эффективное топологическое пространство, эффективная топология, гомеоморфизм, автогомеоморфизм, вычислимая модель, конструктивная модель.

## 1. Введение

В работе изучаются проблема числа эффективных представлений эффективных топологических пространств и их гомеоморфизмы и автогомеоморфизмы.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями топологии и теории вычислимости. Для понимания п. 4 и некоторых результатов п. 5 требуются знания о допустимых множествах и гиперарифметических множествах (см. [1]).

В работе существенно используются результаты об автоморфизмах вычислимых моделей. При этом может создаться впечатление, что рассмотрение таких пространств не дает ничего нового по сравнению с вычислимыми моделями. Однако это не так. Одна из причин состоит в том, что у гомеоморфизмов топологических пространств имеется одно свойство, которое существенно отличает их от автоморфизмов моделей. А именно, заметим, что если $\varphi$ — перестановка на основном множестве модели $\mathfrak{M}$, каждая конечная часть которой содержится в некотором ее автоморфизме, то и сама она является автоморфизмом. В топологических пространствах это не так. Достаточно рассмотреть топологическое пространство $\omega+1+\omega$ с интервальной топологией и перестановку, переставляющую между собой элементы первого и второго сегментов $\omega$ и оставляющую

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ — DFG (код проекта 01–01–04003), INTAS (грант 00–499) и Фонда содействия отечественной науке.

средний элемент 1 на месте. Любая ее конечная часть содержится в некотором автогомеоморфизме этого пространства, но сама она не является автогомеоморфизмом, поскольку не сохраняет пределы.

Мы обозначаем гомеоморфность топологических пространств $A$ и $B$ через $A \cong B$. Множество изолированных точек топологического пространства $\mathfrak{X}$ обозначается через $\mathrm{Is}(\mathfrak{X})$, а множество его предельных точек — через $\mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$. Если $\mathfrak{X}$ — топологическое пространство, то $\mathfrak{X} = \mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cup \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cap \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}) = \varnothing$. Если $A$ — открытое подмножество в $\mathfrak{X}$, то мы обозначаем этот факт так: $A \Subset \mathfrak{X}$. Мощность множества $X$ обозначается символом $|X|$. Симметрическая разность $A$ и $B$, равная $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, обозначается через $A \triangle B$. Если множество $A \triangle B$ конечно, то пишем $A \approx B$. Отношение $\approx$ является отношением эквивалентности на любом семействе множеств. Произвольное непустое подмножество $T \subseteq 2^{<\omega}$ называется *бинарным деревом,* если с каждым своим элементом оно содержит все свои начальные сегменты. Если $T_0$ и $T_1$ — бинарные деревья и $T_0 \subseteq T_1$, то мы говорим, что $T_0$ — *поддерево* $T_1$. Если $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in 2^{<\omega}$ и $\varepsilon_0$ — начальный сегмент $\varepsilon_1$, мы обозначаем это так: $\varepsilon_0 \sqsubseteq \varepsilon_1$. Пустая последовательность обозначается через $\Lambda$. Обозначим для $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ и $m \in \omega$ через $\varepsilon \upharpoonright m$ последовательность, полученную из $\varepsilon$ отбрасыванием всех элементов начиная с $m+1$-го.

Зафиксируем некоторое вычислимое взаимно-однозначное отображение $c(x,y)$ из $\omega \times \omega$ на $\omega$. Вычислимые функции $c^k(x_1,\dots,x_k)$, устанавливающие взаимно-однозначное соответствие между $\omega^k$, $k = 2,3,\dots$, и $\omega$, определяются по индукции как обычно:

$$c^2(x,y) = c(x,y), \quad c^{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = c(c^n(x_1,\dots,x_n),x_{n+1}).$$

Зафиксируем также некоторые вычислимые функции $r$ и $\ell$, обладающие свойствами $\ell c(x,y) = x$ и $rc(x,y) = y$, предназначенные для раскодировки пар натуральных чисел. Для $A, B \subseteq \omega$ положим

$$A \oplus B = \{c(x,0) \mid x \in A\} \cup \{c(x,1) \mid x \in B\}.$$

Под *индексом* конечного множества $S = \{a_0 < \dots < a_{m-1}\}$ понимается натуральное число $\sum\limits_{i=0}^{m} 2^{a_i}$ (отсюда следует, что индекс пустого множества равен 0). Конечное множество с индексом $m$ обозначается через $D_m$. Тьюрингова сводимость обозначается знаком $\leq_T$. Эквивалентость по Тьюрингу обозначается через $\equiv_T$. Символом $\mathrm{Aut}_c(\mathfrak{M})$ обозначим группу всех вычислимых автоморфизмов вычислимой модели $\mathfrak{M}$.

Изучению эффективности в топологических пространствах, понимаемой в различных смыслах, посвящено немало работ (см., например, [2–8]; этот список ни в коем случае не претендует на полноту).

Здесь мы будем пользоваться довольно-таки сильным определением эффективных топологических пространств, под которое, впрочем, подпадает значительная часть естественных примеров.

Определение 1. *Эффективное топологическое пространство* — это упорядоченная пара $\mathfrak{S} = \langle S, B \rangle$, где $S$ — начальный сегмент $\omega$ и $B = (B_i)_{i\in\omega}$ — семейство подмножеств $S$ такое, что

(1) отношение $\{c(x,i) \mid x \in B_i\}$ вычислимо;

(2) отношение $B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_s}$ вычислимо по индексам $i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_s$;

(3) семейство $B$ образует базу топологии на $S$, т. е. множества $B_i$ удовлетворяют следующему условию:

для любых $i, j \in \omega$ существует подмножество $I \subseteq \omega$ такое, что

$$B_i \cap B_j = \bigcup_{k \in I} B_k.$$

Обозначим топологию, определенную этой базой $B = (B_i)_{i\in\omega}$, через $\tau_B$. Семейство $B = (B_i)_{i\in\omega}$ называется *эффективной базой* $\mathfrak{S}$.

Определение гиперарифметических топологических пространств получается из определения эффективных топологических пространств заменой слова «вычислимый» словом «гиперарифметический».

Приведем пример эффективного топологического пространства. Зафиксируем нумерацию $\nu : \omega \to \mathbb{Q}$ множества рациональных чисел, в которой по любому номеру $i \in \omega$ можно эффективно выписать дробь $\frac{m}{n} = \nu(i)$, а также по любой записи дроби $\frac{m}{n}$ можно вычислить ее $\nu$-номер, т. е. такое натуральное число $i$, что $\frac{m}{n} = \nu(i)$. Основным множеством этого пространства будет множество всех натуральных чисел $\omega$, а база открыто-замкнутых множеств этого пространства состоит из множеств

$$U_i = \{x \in \omega \mid \sqrt{2} \cdot \nu(\ell(i)) < \nu(x) < \sqrt{2} \cdot \nu(r(i))\}, \quad i \in \omega.$$

Если $\mathfrak{X}$ — эффективное топологическое пространство и $(U_i)_{i<\omega}$ — его эффективная база, то существует алгоритм, позволяющий отвечать на все вопросы следующих типов: «$t(U_1, \dots, U_n) = \varnothing$?» и «$t(U_1, \dots, U_n) = q(U_1, \dots, U_n)$?», где $t$ и $q$ — булевы выражения. В самом деле, второй тип вопросов сводится к первому, поскольку $t = q$ эквивалентно $(t \cap \bar{q}) \cup (q \cap \bar{t}) = \varnothing$. Для того чтобы отвечать на вопросы первого типа, преобразуем выражение $t$ к объединению выражений вида $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n} \cap \overline{U}_{j_1} \cap \dots \cap \overline{U}_{j_m}$. Условие $t = \varnothing$ эквивалентно, таким образом, конъюнкции условий $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n} \cap \overline{U}_{j_1} \cap \dots \cap \overline{U}_{j_m} = \varnothing$. Последнее, в свою очередь, эквивалентно $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n} \subseteq U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}$, что уже является вычислимым по условию.

## 2. Основные категории и функторы

Здесь определяются основные категории и функторы, которые будут служить инструментом для переноса некоторых результатов из теории вычислимых моделей на эффективные топологические пространства.

Все, что нам нужно в данной работе, — это функтор из категории вычислимых моделей в категорию эффективных топологических пространств, сохраняющий ряд свойств морфизмов между объектами. Для облегчения доказательства определим этот функтор как композицию двух функторов. Идеи конструкций, описанных в этом параграфе, известны как фольклор. Тем не менее мы вынуждены детально описать эти конструкции, поскольку нам понадобится тщательная проверка их свойств в ходе доказательства.

Нам предстоит определить три категории: $\mathscr{M}$ (категорию вычислимых моделей), $\mathscr{O}$ (категорию упорядоченных множеств), $\mathscr{T}$ (категорию моделей, тесно связанных с топологическими пространствами), и функторы $\mathbf{F} : \mathscr{M} \to \mathscr{O}$, $\mathbf{G} : \mathscr{O} \to \mathscr{T}$. Функтор, нужный нам, является композицией $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$.

Определим эти категории.

**Категория** $\mathscr{M}$. *Объекты* категории $\mathscr{M}$ — это модели счетных предикатных сигнатур $\langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots \rangle$ ($n_i$ — число аргументов соответствующего предикатного символа), основные множества которых являются подмножествами множества всех натуральных чисел $\omega$. Для любых объектов $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ этой категории класс всех *морфизмов* из $\mathfrak{M}_0$ в $\mathfrak{M}_1$ состоит в точности из всех изоморфизмов из $\mathfrak{M}_0$ на $\mathfrak{M}_1$.

**Категория** $\mathscr{O}$. *Объекты* категории $\mathscr{O}$ суть частично упорядоченные подмножества $\omega$. Для любых объектов $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ этой категории класс всех *морфизмов* из $\mathfrak{S}_0$ в $\mathfrak{S}_1$ состоит из всех изоморфизмов из $\mathfrak{S}_0$ на $\mathfrak{S}_1$.

**Категория** $\mathscr{T}$. *Объекты* категории $\mathscr{T}$ — упорядоченные пары $\langle S, \mathrm{B}\rangle$, первые компоненты которых — непустые подмножества $S \subseteq \omega$, а вторые компоненты — семейства $\mathrm{B} = (B_i)_{i\in S} \in (\mathscr{P}(S))^S$ такие, что $\{B_i \mid i \in S\}$ образует базу топологии.

Для каждой пары $\langle S, B\rangle$, $\langle T, V\rangle$ объектов этой категории класс всех морфизмов из $\langle S, B\rangle$ в $\langle T, V\rangle$ состоит из всех гомеоморфизмов из топологического пространства $\langle S, \tau_B\rangle$ на $\langle T, \tau_V\rangle$.

Для объекта $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle \in \mathscr{T}$ обозначим через $\mathrm{Top}(\mathfrak{A})$ его топологическое пространство $\langle A, \tau_B\rangle$.

Замечание 1. Поскольку каждая операция $g : M^n \to M$ модели $\mathfrak{M}$ может быть представлена своим графом

$$\Gamma(g) = \{\langle x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)\rangle \mid x_1, \dots, x_n \in M\},$$

для каждой модели $\mathfrak{M}$ определено ее предикатное представление $\mathfrak{M}^P$, в котором все операции $g$ заменены их графами $\Gamma(g)$. Легко проверить, что группы автоморфизмов моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^P$, рассматриваемые как семейства перестановок на $M$, совпадают. Более того, если $\mathfrak{M}$ — вычислимая модель, то такова и $\mathfrak{M}^P$. Если сигнатура модели $\mathfrak{M}$ конечна, то для наших целей мы можем рассматривать ее как модель бесконечной сигнатуры, добавив $\omega$ символов, интерпретируемых как равенство. После этих изменений группа автоморфизмов модели и ее категорные свойства не изменятся. Таким образом, ограничение на сигнатуру, содержащееся в определении категории $\mathscr{M}$, не означает потерю общности в наших рассмотрениях.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель счетной предикатной сигнатуры $\left\langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots\right\rangle$ и ее основное множество $M$ является подмножеством $\omega$. Определим ее *диаграмму* $\mathrm{D}(\mathfrak{M})$ следующим образом:

$$\mathrm{D}(\mathfrak{M}) = M \oplus \big(\{c^3(i, 1, c^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})) \mid \mathfrak{M} \models P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})\} \\ \cup \{c^3(i, 0, c^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})) \mid \mathfrak{M} \models \neg P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})\}\big).$$

Первый функтор $\mathbf{F}$ определяется в доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 2.1.** *Существует функтор* $\mathbf{F}$ *из категории* $\mathscr{M}$ *в категорию* $\mathscr{O}$, *обладающий следующими свойствами:*

(1) $\mathbf{F}(\mathfrak{M}) = \mathbf{F}(\mathfrak{N})$ *влечет* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ *для всех объектов* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{M}$;

(2) $\mathrm{D}(\mathfrak{M}) \equiv_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ *для всех объектов* $\mathfrak{M} \in \mathscr{M}$;

(3) *для всех* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{M}$ $\mathbf{F}$ — *взаимно-однозначное соответствие между классами* $\mathrm{Mor}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *и* $\mathrm{Mor}(F(\mathfrak{M}), F(\mathfrak{N}))$;

(4) *для всех морфизмов* $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)$ *выполнены условия* $f \leq_T \mathbf{F}(f)$ *и* $\mathbf{F}(f) \leq_T f \oplus \mathrm{D}(\mathfrak{M}_0) \oplus \mathrm{D}(\mathfrak{M}_1)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \left\langle M; P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots\right\rangle$ — объект категории $\mathscr{M}$. Идея конструкции состоит в том, что вначале мы берем множество $\{2x \mid x \in M\}$

и затем для каждого истинного утверждения $\mathfrak{M} \models P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})$ добавляем в построение новые *нечетные* элементы $b_1$, $b_2$, $b_3$, … ; $c_1$, … ; $d_1$, $d_{2i+1}$, $e$, $f$, $g$ и упорядочиваем их, как показано на рис. 1.

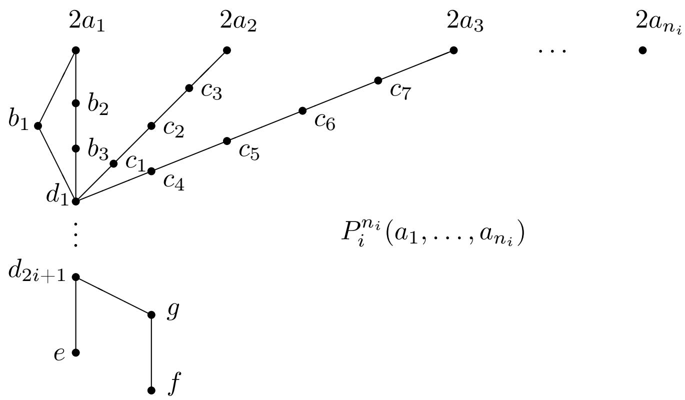


Рис. 1.

В дополнение для каждого истинного в $\mathfrak{M}$ утверждения $\neg P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})$ мы добавляем в нашу модель новые различные нечетные элементы $b_1$, $b_2$, $b_3$ … ; $c_1$, … ; $d_1$, $d_{2i+2}$, $e, f, g$ и упорядочиваем их почти так же, как и в предыдущем случае, с единственным исключением, что берем $2i + 2$ элементов $d$ с индексами вместо $2i + 1$ в предыдущем случае.

Построим эту модель равномерно по диаграмме модели $\mathfrak{M}$. Более точно, перечисляем эту диаграмму в порядке возрастания, и каждый раз, когда в этом перечислении встретим номер, сообщающий, что верно $P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})$ или $\neg P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})$, просто берем *последовательные* новые нечетные элементы $b_1 < b_2 < b_3 < c_1 < \dots < d_1 < d_2 < \dots < e < f < g$, где $b_1$ — первый нечетный элемент, еще не использованный в данный момент времени, и добавим их к построению, как описано выше.

Таким образом, модель $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$ полностью определена. Обозначим порядок на модели $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$ через $\lhd$.

Назовем *компанией* каждое множество элементов вида

$$\{b_1, b_2, b_3, c_1, \dots, d_1, d_2, \dots, e, f, g\},$$

добавленное на некотором шаге.

Определим теперь функтор $\mathbf{F}$ на морфизмах. Для каждого отображения $f \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)$ пусть $\mathbf{F}(f)$ будет единственным расширением отображения $f' = \{\langle 2x, 2y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f\}$ до изоморфизма между $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$. Докажем существование такого расширения. Для его построения достаточно для каждого кортежа $2a_1, \dots, 2a_{n_i}$ отобразить нечетные элементы, образующие фигуру, подобную изображенной на рис. 1, и находящиеся под этим кортежем, в элементы, образующие изоморфную ей фигуру и находящиеся под кортежем $f'(2a_1), \dots, f'(2a_{n_i})$. Это возможно, поскольку $f$ является изоморфизмом. Ясно, что $\mathbf{F}$ — функтор.

Докажем теперь свойства (1)–(4) для функтора $\mathbf{F}$.

(1) Покажем, как восстановить $\mathfrak{M}$ по $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$.

Сначала заметим, что основное множество модели $\mathfrak{M}$ полностью определено основным множеством объекта $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$, так как это множество совпадает с

$$\{x/2 \mid x \text{ — четный элемент носителя } \mathbf{F}(\mathfrak{M})\}.$$

Затем заметим, что функция $i \mapsto n_i$ полностью определена упорядочением $\lhd$. В самом деле, достаточно описать способ перечисления всех пар вида $\langle i, n_i\rangle$ относительно диаграммы объекта $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$. Мы перечисляем все конечные наборы последовательно расположенных нечетных чисел вида $b_1$, $b_2$, $b_3 \dots$; $c_1, \dots$; $d_1, d_{2i+1}, e, f, g$, упорядоченные, как показано на рис. 1, и по количествам элементов вида $d_j$ и $c_j$ определяем одновременно некоторые $i$ и $n_i$. Этим способом все пары вида $\langle i, n_i\rangle$ будут перечислены.

Чтобы определить, удовлетворяет ли кортеж $a_1, \dots, a_{n_i}$ предикату $P_i^{n_i}$, надо просто рассмотреть элементы $2a_1, \dots, 2a_{n_i}$ и искать конечную структуру, образованную элементами, находящимися под $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{n_i}$, как на рис. 1, которая подтвердит (если число элементов типа $d$ нечетно) или опровергнет это (в противном случае). Ниже мы покажем, что это можно осуществить эффективно.

(2) Сводимость $\mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M})) \leq_T \mathrm{D}(\mathfrak{M})$ достаточно очевидна, поскольку носитель $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$ равен $M \oplus A$, где $A$ — начальный сегмент $\omega$. Оставшаяся часть доказательства очевидна.

Докажем, что $\mathrm{D}(\mathfrak{M}) \leq_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$. Сначала заметим, что имеет место сводимость $M \leq_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$, поскольку $x \in M \Leftrightarrow c(2x, 0) \in \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$.

Алгоритм, который по данному $i \in \omega$ вычисляет $n_i$ относительно диаграммы $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$, уже описан в доказательстве п. 1.

Следующий наш шаг состоит в том, чтобы научиться использовать оракул $\mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ для ответов на вопросы «$c(m, 1) \in \mathrm{D}(\mathfrak{M})$?», что будет достаточно для доказательства п. 2.

Уже умея вычислять $n_i$, восстановим по $m$ кортеж $a_1, \dots, a_n$ такой, что $m = c^3(i, 1, c^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i}))$. Если все элементы этого кортежа лежат в $M$, то продолжим выполнение процедуры; в противном случае выдадим отрицательный ответ. Ищем под элементами $2a_1, \dots, 2a_{n_i}$ фигуру типа изображенной на рис. 1, образованную последовательно расположенными нечетными числами $b_1 < b_2 < b_3 < c_1 < \dots < d_1 < d_2 < \dots < e < f < g$. Если число элементов вида $d_i$ нечетно, то ответ положительный, в противном случае — отрицательный.

(3) Это свойство легко следует из того, что $\mathbf{F}(f)$ — единственное расширение множества $\{\langle 2x, 2y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f\}$, и из фактически установленного выше свойства, что каждый изоморфизм $f$ между моделями $\mathbf{F}(\mathfrak{M}_0)$ и $\mathbf{F}(\mathfrak{M}_1)$ определяет изоморфизм

$$g = \{\langle x/2, y/2\rangle \mid f(x) = y \ \& \ x, y \text{ четные}\}$$

между $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ со свойством $\mathbf{F}(g) = f$.

(4) Поскольку $f = \{\langle x, y\rangle \mid \langle 2x, 2y\rangle \in \mathbf{F}(f)\}$, имеем $f \leq_T \mathbf{F}(f)$. Докажем оставшуюся часть $\mathbf{F}(f) \leq_T f \oplus \mathrm{D}(\mathfrak{M}_0) \oplus \mathrm{D}(\mathfrak{M}_1)$. Надо показать, что по данному изоморфизму $f$ из $\mathfrak{M}_0$ на $\mathfrak{M}_1$ и диаграммам $\mathrm{D}(\mathfrak{M}_0)$ и $\mathrm{D}(\mathfrak{M}_1)$ можно эффективно вычислить $\mathbf{F}(f)$. Легко видно, как делать это относительно $f$ на четных числах. На нечетных числах делаем следующее. Используем оракул для $\mathrm{D}(\mathfrak{M}_0)(\equiv_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_0)))$ для перечисления всех элементов вида $d_1$ и элементов из компании, в которую входит $d_1$. Для каждого такого $d_1$ используем тот

же самый оракул для вычисления соответствующих элементов $2a_1, \dots, 2a_{n_i}$, находящихся выше их. Затем используем оракул $f$ для вычисления их образов $2f(a_1), \dots, 2f(a_{n_i})$ и оракул $\mathrm{D}(\mathfrak{M}_1)(\equiv_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_1)))$ для нахождения элементов единственной компании под $2f(a_1), \dots, 2f(a_{n_i})$, которая изоморфна фигуре, содержащей $d_1$. Расширим изоморфизм, определенный к этому моменту, добавив к нему изоморфизм между этими компаниями. $\square$

Для объекта $\mathfrak{R} = \langle R, (B_i)_{i\in R}\rangle \in \mathscr{T}$ определим *диаграмму* $\mathrm{D}(\mathfrak{R})$ как диаграмму модели $\langle R, \overline{B}\rangle$, где $\overline{B}(x,i) \overset{df}{\Longleftrightarrow} x \in B_i$.

Второй функтор $\mathbf{G}$ определяется в доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 2.2.** *Существует функтор* $\mathbf{G}$ *из категории* $\mathscr{O}$ *в категорию* $\mathscr{T}$, *обладающий следующими свойствами:*

(1) $\mathbf{G}(\mathfrak{M}) = \mathbf{G}(\mathfrak{N})$ *влечет* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ *для всех объектов* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{O}$;

(2) $\mathrm{D}(\mathfrak{M}) \equiv_T \mathrm{D}(\mathbf{G}(\mathfrak{M}))$ *для всех объектов* $\mathfrak{M} \in \mathscr{O}$;

(3) *для всех* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{O}$ $\mathbf{G}$ — *взаимно-однозначное соответствие между классами* $\mathrm{Mor}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *и* $\mathrm{Mor}(\mathbf{G}(\mathfrak{M}), \mathbf{G}(\mathfrak{N}))$;

(4) *для всех морфизмов* $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)$ *из* $\mathscr{O}$ *выполнено* $f \equiv_T \mathbf{G}(f)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R} = \langle R, \lhd\rangle$ — объект из $\mathscr{O}$. Пусть также $\mathbf{G}(\mathfrak{R}) = \langle R, (\check{x})_{x\in R}\rangle$, где $\check{x} = \{y \in R \mid x \trianglelefteq y\}$. Очевидно, что $\mathbf{G}(\mathfrak{R}) \in \mathscr{T}$. Если $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{O}$, то положим $\mathbf{G}(f) = f$. Рутинная проверка показывает, что $\mathbf{G}(\mathfrak{R})$ — функтор.

Теперь докажем утверждение теоремы.

(1) В случае частично упорядоченных множеств объект $\mathfrak{R} = \langle R, \lhd\rangle$ может быть однозначно восстановлен по $\mathbf{G}(\mathfrak{R}) = \langle R, B\rangle$ с использованием следующего свойства:

$$\forall x, y \in R\, (x \trianglelefteq y \Leftrightarrow \forall i \in R (x \in B_i \Rightarrow y \in B_i)).$$

(2) Тривиально.

(3) Заметим, что каждый гомеоморфизм $f : \langle R, \tau_B\rangle \to \langle R', \tau'_B\rangle$ отображает открытые множества в открытые. По этому свойству и по эквивалентности

$$\forall x, y \in R\, (x \trianglelefteq y \Leftrightarrow \forall Q \in \tau_B (x \in Q \Rightarrow y \in Q))$$

каждый такой гомеоморфизм изоморфно отображает исходное упорядочение $\trianglelefteq$ на $R$ на упорядочение на $R'$ и, таким образом, этот гомеоморфизм, рассматриваемый как множество, является морфизмом категории $\mathscr{O}$.

(4) Тривиально. $\square$

## 3. Перенос результатов с вычислимых моделей на топологические пространства

В этом разделе мы используем свойства функтора $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ для переноса результатов об автоморфизмах и изоморфизмах вычислимых моделей на эффективные топологические пространства.

Замечание 2. Заметим, что если $\mathfrak{M}$ — вычислимая модель с основным множеством $\omega$, то $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ — эффективное топологическое пространство. В самом деле, по каждому $i \in \omega$ можно эффективно определить индекс конечного множества $B_i$ в $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$, откуда следует свойство (3) из определения 1 эффективных топологических пространств.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень и $\mathfrak{M}$ — модель, у которой носитель — начальный сегмент $\omega$ и $\mathfrak{S}$ — топологическое пространство со счетной базой $(U_i)_{i<\omega}$, носителем которого является начальный сегмент $\omega$. Обозначим группу всех $\mathbf{d}$-вычислимых автоморфизмов $\mathfrak{M}$ (группу всех $\mathbf{d}$-вычислимых автогомеоморфизмов $\mathfrak{S}$) через $\mathrm{Aut}^{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ (соответственно через $\mathrm{AHom}^{\mathbf{d}}(\mathfrak{S})$).

**Следствие 3.1.** *Для каждой вычислимой модели $\mathfrak{M}$ существуют эффективное топологическое пространство $S$ и изоморфизм $\psi : \mathrm{Aut}\,\mathfrak{M} \to \mathrm{AHom}\,S$ такие, что для каждой тьюринговой степени $\mathbf{d}$ справедливо равенство*

$$\psi(\mathrm{Aut}^{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})) = \mathrm{AHom}^{\mathbf{d}}(S).$$

Доказательство. Пусть $S = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$. Изоморфизм $\psi : \mathrm{Aut}\,\mathfrak{M} \to \mathrm{AHom}\,S$ можно выбрать как $\psi(f) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(f))$. Требуемые свойства следуют из замечания 2 и теорем 2.1 и 2.2. $\square$

**Следствие 3.2.** (1) *Существует эффективное топологическое пространство, имеющее $2^\omega$ автогомеоморфизмов, но не имеющее нетривиальных гиперарифметических автогомеоморфизмов. Более того, каждое гиперарифметическое представление этого пространства не обладает нетривиальными гиперарифметическими автогомеоморфизмами.*

(2) *Существуют эффективное топологическое пространство $\mathfrak{X}$ и два его элемента $a$ и $b$, которые гомеоморфны, но каждый автогомеоморфизм, переводящий $a$ в $b$, не является гиперарифметическим. Более того, таким же свойством обладает каждое гиперарифметическое пространство, гомеоморфное $\mathfrak{X}$ вместе с образами элементов $a$ и $b$ относительно этого гомеоморфизма.*

Доказательство. В [9] доказано, что существует вычислимая модель $\mathfrak{M}$ такая, что

(1) $|\mathrm{Aut}\,\mathfrak{M}| = 2^\omega$;

(2) Каждая гиперарифметическая модель $\mathfrak{M}'$, изоморфная $\mathfrak{M}$, не имеет нетривиальных гиперарифметических автоморфизмов.

Топологическое пространство $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ годится для доказательства пп. 1 и 2.

В части, где речь не идет о различных гиперарифметических представлениях пространства, это непосредственно следует из теорем 2.1, 2.2 и замечания 2.

Докажем оставшуюся часть. Рассмотрим некоторое гиперарифметическое представление $\mathfrak{X}'$ этого пространства (возможно, с совсем другой базой топологии). Как и в доказательстве теоремы 2.2, по этой базе можно однозначно восстановить исходный гиперарифметический порядок $\lhd$, а по нему и некоторое гиперарифметическое представление исходной модели. Из свойств функторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ следует, что топологическое пространство $\mathfrak{X}'$ гомеоморфно гиперарифметическому топологическому пространству $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$, не имеющему нетривиальных гиперарифметических автогомеоморфизмов, причем в качестве гомеоморфизма между этими пространствами может быть выбрано тождественное отображение. Отсюда следует, что у $\mathfrak{X}'$ нет нетривиальных гиперарифметических автогомеоморфизмов. $\square$

**Следствие 3.3.** *Для каждой гиперарифметической группы $G$ существует эффективное топологическое пространство, у которого группа всех автогомеоморфизмов изоморфна $G$.*

Доказательство. В [10] доказано, что для каждой гиперарифметической группы существует вычислимая модель $\mathfrak{M}$, у которой группа всех автоморфизмов изоморфна этой группе. По теоремам 2.1, 2.2 и замечанию 2 топологическое пространство $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ годится для доказательства нашего утверждения. $\square$

**Следствие 3.4.** *Существуют два гомеоморфные эффективные топологические пространства, для которых не существует гиперарифметических гомеоморфизмов из одного на другое.*

Доказательство. Рассмотрим две изоморфные не гиперарифметически изоморфные вычислимые модели $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ из работы [9]. По замечанию 2 и теоремам 2.1, 2.2 эффективные топологические пространства $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_0))$ и $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_1))$ удовлетворяют следствию. $\square$

Семейство $(\mathfrak{X}_i)_{i<\omega}$ эффективных топологических пространств назовем *вычислимым,* если существует эффективная процедура, которая по данному $i<\omega$ выдает алгоритмы, участвующие в определении эффективных топологических пространств, т. е. алгоритм для перечисления основного множества, алгоритм для распознавания отношения $x \in B_j$ и алгоритм для распознавания истинности утверждений вида $B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_s}$ для данных $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_s$.

**Следствие 3.5.**

(1) *Существует вычислимое семейство $(S_i)_{i<\omega}$ эффективных топологических пространств такое, что множество $\{c(i,j) \mid S_i \cong S_j\}$ является $\Sigma^1_1$-полным.*

(2) *Существует вычислимое семейство $(S_i)_{i<\omega}$ эффективных топологических пространств такое, что множество $\{i \mid S_i \cong S_0\}$ является $\Sigma^1_1$-полным.*

Доказательство. Заметим, что если $(\mathfrak{M}_i)_{i<\omega}$ — вычислимое семейство моделей, то семейство $(\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_i)))_{i<\omega}$ — вычислимое семейство эффективных топологических пространств.

Чтобы доказать п. 1, достаточно взять вычислимое семейство $(\mathfrak{M}_i)_{i<\omega}$ моделей из [9], для которого множество $\{c(i,j) \mid S_i \cong S_j\}$ $\Sigma^1_1$-полно, и применить замечание 2 вместе с теоремами 2.1 и 2.2.

П. 2 получается точно так же из существования вычислимого семейства $(\mathfrak{M}_i)_{i<\omega}$ моделей, для которого множество $\{i \mid S_i \cong S_0\}$ $\Sigma^1_1$-полно (см. [9]). $\square$

**Следствие 3.6.** *Существует эффективное топологическое пространство $S$ такое, что для любой вычислимой модели $\mathfrak{M}$ найдется его эффективное представление $S'$ такое, что* $\mathrm{AHom}\, S' \cong \mathrm{Aut}_c(\mathfrak{M})$.

Доказательство. В [11] построена вычислимая модель $\mathfrak{M}$ такая, что для любой вычислимой модели $\mathfrak{N}$ существует вычислимая изоморфная копия $\mathfrak{M}'$, для которой $\mathrm{Aut}_c \mathfrak{M} \cong \mathrm{Aut}_c \mathfrak{M}'$. Теперь мы можем положить $S = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ и применить замечание 2 вместе с теоремами 2.1 и 2.2. $\square$

**Теорема 3.7.** *Для каждого $n \geq 1$, $n \leq \omega$, существует эффективное топологическое пространство $\mathfrak{S}$, для которого существуют эффективные топологические пространства $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ такие, что*

(1) *для каждого эффективного топологического пространства $\mathfrak{W}$ если $\mathfrak{W}$ гомеоморфно $\mathfrak{S}$, то оно вычислимо изоморфно одному из пространств $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$;*

(2) *пространства $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ попарно вычислимо не гомеоморфны.*

Доказательство. В [12] С. С. Гончаровым доказано, что для любого $n \geq 1$, $n \leq \omega$, существует вычислимая модель с $n$ вычислимыми вычислимо неизоморфными представлениями. Остается применить теоремы 2.1 и 2.2. $\square$

## 4. Эффективные топологические пространства со счетными группами автогомеоморфизмов

**Теорема 4.1.** *Пусть группа автогомеоморфизмов гиперарифметического топологического пространства имеет мощность менее* $2^\omega$. *Тогда эта группа изоморфна некоторой гиперарифметической группе.*

Доказательство использует допустимые множества [1]. Пусть $\langle S, U\rangle$ — гиперарифметическое топологическое пространство, удовлетворяющее посылке теоремы. Сначала запишем формулу $\varphi(F)$ в языке арифметики, расширенном предикатными символами для $U$ и $F$, которые говорят, что $F$ — автогомеоморфизм $\langle S, U\rangle$. Эта формула будет конъюнкцией следующих трех формул:

• формула, утверждающая, что $F$ — перестановка;

• формула, утверждающая, что $F$ переводит открытые множества в открытые:

$$\forall x\,\forall i\,(x \in U_i \to \exists\, j\,(F(x) \in U_j \subseteq F(U_i)));$$

• формула, утверждающая, что $F^{-1}$ переводит открытые множества в открытые (записывается аналогично).

Поскольку отношение $x \in U_i$ гиперарифметическое, т. е. имеет род $\Delta^1_1$, эта формула эквивалентна некоторой $\Sigma^1_1$-формуле $\varphi'(F)$ такой, что ей удовлетворяют менее чем $2^\omega$ функций $F$. По теореме о совершенном множестве [1, теорема 4.4, с. 128] все такие $F$ гиперарифметические.

Теперь покажем, что множество всех таких $F$ является элементом допустимого множества $\mathbb{HYP}_{\langle\omega;+,\cdot,0\rangle}$. По $\Delta_0$-выделению для этого достаточно показать, что существует элемент $b \in \mathbb{HYP}_{\langle\omega;+,\cdot,0\rangle}$, содержащий все такие $F$. Если такого $b$ не существует, построим $\Sigma$-семейство $\Omega$ предложений из допустимого фрагмента $L_{\mathbb{HYP}_{\langle\omega;+,\cdot,0\rangle}}$, которые говорят, что $F$ — не гиперарифметическая перестановка, удовлетворяющая $\varphi(F)$. Это семейство $\Omega$ состоит из следующих предложений в сигнатуре $\sigma = \langle +, \cdot, s, 0\rangle$, где $s$ обозначает функцию взятия следующего натурального числа:

• $\forall x \bigvee\limits_{n\in\omega} (x = s^n(0))$;

• все бескванторные предложения сигнатуры $\sigma$, истинные в гиперарифметической модели $\langle\omega; +, \cdot, U, 0\rangle$;

• формула, утверждающая, что $F$ — автогомеоморфизм $\langle S, U\rangle$; такая формула может быть получена из $\varphi(F)$, описанной выше, заменой формул вида $x \in U_i$ на $\bigvee\limits_{m\in U_n} (x = s^m(0) \;\&\; i = s^n(0))$;

• семейство, утверждающее, что $F$ — не гиперарифметическая перестановка на $\omega$, а именно семейство, состоящее из предложений

$$\bigvee_{n\in\omega} (F(s^n(0)) \neq s^{g(n)}(0))$$

для всех гиперарифметических перестановок $g$ на натуральных числах.

Каждая $\mathbb{HYP}_{\langle\omega;+,\cdot,0\rangle}$-конечная часть семейства $\Omega$ имеет модель. По теореме компактности Барвайса [1] это семейство имеет модель. Эта модель изоморфна модели $\langle\omega; +, \cdot, U, 0\rangle$ с добавленным предикатом $F$, являющимся негиперарифметическим автоморфизмом $\langle S, U\rangle$, что противоречит сказанному ранее.

Итак, семейство автогомеоморфизмов $\langle S, U\rangle$ есть элемент из $\mathbb{HYP}_\omega$. Поэтому группа всех автогомеоморфизмов пространства $\langle S, U\rangle$ является элементом

$\mathbb{HYP}_\omega$. Поскольку существует $\Sigma$-вложение множества $\mathbb{HYP}_\omega$ в $\omega$ (см. [1, следствие 5.5, с. 171]), эта группа изоморфна подходящей гиперарифметической группе. $\square$

**Следствие 4.2.** *Пусть группа всех автогомеоморфизмов гиперарифметического топологического пространства имеет мощность менее чем $2^\omega$. Тогда эта группа изоморфна группе всех автоморфизмов подходящей вычислимой модели.*

Доказательство. По теореме 4.1 эта группа изоморфна гиперарифметической группе. В [10] доказано, что каждая гиперарифметическая группа изоморфна группе всех автоморфизмов подходящей вычислимой модели. $\square$

## 5. О числе эффективных представлений пространств

В предыдущих разделах мы рассматривали топологические пространства со слабыми свойствами отделимости. Здесь рассмотрим $T_0$-пространства с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств и опишем зависимость числа эффективных гомеоморфных представлений от числа изолированных точек. Следует заметить, что любое $T_0$-пространство с базой, состоящей из открыто-замкнутых множеств, является $T_2$-пространством.

Будем говорить, что эффективные топологические пространства $\mathfrak{X}_0 = \langle X_0, (U_i)_{i<\omega}\rangle$ и $\mathfrak{X} = \langle X_1, (V_i)_{i<\omega}\rangle$ *сильно вычислимо гомеоморфны*, если существуют вычислимое отображение $\varphi$ из $X_0$ на $X_1$, являющееся гомеоморфизмом из $\mathfrak{X}_0$ на $\mathfrak{X}_1$ и вычислимые функции $h_0$ и $h_1$ такие, что для каждого $i \in \omega$ выполнены следующие два равенства:

$$\varphi(U_i) = \bigcup_{j\in W_{h_0(i)}} V_j, \quad \varphi^{-1}(V_i) = \bigcup_{j\in W_{h_1(i)}} U_j.$$

Если $\mathfrak{X}_0$ и $\mathfrak{X}_1$ сильно вычислимо гомеоморфны, то будем обозначать этот факт как $\mathfrak{X}_0 \cong_s \mathfrak{X}_1$. Легко убедиться, что отношение сильного вычислимого гомеоморфизма является отношением эквивалентности на эффективных топологических пространствах.

Нам понадобится ряд технических утверждений. Сначала докажем

**Предложение 5.1.** *Пусть $\mathfrak{X} = \langle X, (U_i)_{i\in\omega}\rangle$ — счетное топологическое $T_0$-пространство со счетной базой из открыто-замкнутых подмножеств и бесконечным множеством изолированных точек.*

*Пусть семейство $(F_a)_{a\in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})}$ конечных множеств обладает следующим свойством:*

$$\forall a, b \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})\,(a \neq b \to F_a \cap F_b = \varnothing) \;\&\; \forall a \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})(F_a \cap X) = \varnothing.$$

*Пусть топологическое пространство $\mathfrak{X}^*$ получается из $\mathfrak{X}$ следующим образом: его основное множество равно*

$$X^* = X \cup \bigcup_{a\in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})} F_a,$$

*а база $\mathfrak{X}^*$ образована множествами вида*

$$U \cup \bigcup_{a\in \mathrm{Is}(X)\cap U} F_a,$$

*$U \Subset \mathfrak{X}$, и множествами $\{x\}$ такими, что $x \in \{a\} \cup F_a$, $a \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$.*

*Тогда $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{X}^*$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $h : X^* \to X$, определенное следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in X, \\ a, & \text{если } x \in F_a. \end{cases}$$

В ходе доказательства нам потребуется ряд свойств $\mathfrak{X}^*$ и $h$.

**Лемма 5.2.** (1) *Отображение $h$ непрерывно; для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$ его прообраз $h^{-1}(x)$ — конечное множество, состоящее из изолированных точек; для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*)$ справедливо $h(x) \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$;*

(2) *$\mathrm{Lim}(\mathfrak{X}) = \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$;*

(3) *для каждого $B \Subset \mathfrak{X}^*$ выполнено $h(B) \Subset \mathfrak{X}$;*

(4) *для каждого $A \subseteq X$*

$$|\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cap A| = \omega \text{ тогда и только тогда, когда } |\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*) \cap h^{-1}(A)| = \omega;$$

(5) *для каждого $B \subseteq X^*$*

$$|\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*) \cap B| = \omega \text{ тогда и только тогда, когда } |\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cap h(B)| = \omega;$$

(6) *если $S$ — конечное множество изолированных точек из $\mathfrak{X}$, то $h^{-1}(S)$ — конечное множество изолированных точек из $\mathfrak{X}^*$;*

(7) *если $S$ — конечное множество изолированных точек из $\mathfrak{X}^*$, то $h(S)$ — конечное множество изолированных точек из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство леммы. П. (1) непосредственно следует из определения топологии на $\mathfrak{X}^*$.

Докажем (2). Сначала докажем включение $\mathrm{Lim}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$. Пусть $a \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$, но $a \notin \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$. Тогда точка $a$ изолирована в $\mathfrak{X}^*$, т. е. $\{a\} \Subset \mathfrak{X}^*$. Из определения $\mathfrak{X}^*$ следует, что единственно возможный случай — это $a \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$, что противоречит $a \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$.

Докажем другое включение $\mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*) \subseteq \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$. Пусть $a \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$, но $a \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$. Тогда по определению $h$ и по п. 1 $h^{-1}(a)$ — конечное открытое множество, содержащее $a$. Следовательно, $\{a\} \Subset \mathfrak{X}^*$, что противоречит $a \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$.

Докажем (3). Согласно определению открытые подмножества $\mathfrak{X}^*$ являются объединениями семейств множеств вида $U \cup \bigcup\limits_{a \in \mathrm{Is}(X) \cap U} F_a$, $U \Subset X$, и некоторого множества изолированных точек из $\mathfrak{X}$. По п. 1 настоящей леммы образ этого множества относительно $h$ есть объединение соответствующих открытых подмножеств в $U$ и некоторого семейства изолированных точек $X$, тоже открытого.

Пп. (4)–(7) легко следуют из определения отображения $h$ и из (1). □

Открыто-замкнутые множества $A \subseteq X$ и $B \subseteq X^*$ будем называть *эквивалентными,* если выполнены следующие два условия:

(1) $|\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cap A| = |\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*) \cap B|$;

(2) $h(B) \triangle A$ — конечное подмножество $\mathrm{Is}(\mathfrak{X})$, т. е. $h(B)$ отличается от $A$ только на конечном множестве изолированных точек.

**Лемма 5.3.** *Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X^*$ эквивалентны. Тогда*

(1) *для каждого открыто-замкнутого в $\mathfrak{X}$ множества $U \subseteq A$ существует открыто-замкнутое в $\mathfrak{X}^*$ множество $U^* \subseteq B$ такое, что $A \cap U$ и $B \cap U^*$ эквивалентны и $A \setminus U$ и $B \setminus U^*$ тоже эквивалентны.*

(2) *для каждого открыто-замкнутого в* $\mathfrak{X}$ *множества* $U^* \subseteq B$ *существует открыто-замкнутое в* $\mathfrak{X}$ *множество* $U \subseteq A$ *такое, что* $A \cap U$ *и* $B \cap U^*$ *эквивалентны и* $A \setminus U$ *и* $B \setminus U^*$ *тоже эквивалентны.*

Доказательство леммы. Докажем (1). Пусть $U$ — конечное открыто-замкнутое подмножество в $A$. Поскольку наша топология обладает свойством $T_2$, оно состоит из изолированных точек из $X^*$. Выберем $U^* \subseteq \mathrm{Is}(X^*)$ как множество, состоящее из $|U|$ изолированных точек из $B$. Очевидно, что это множество открыто-замкнуто. Такой выбор возможен, ибо $A$ и $B$ эквивалентны и, следовательно, содержат одинаковое число изолированных точек. По тем же причинам количества изолированных точек в $A \setminus U$ и $B \setminus U^*$ совпадают. Далее, $U$ и $h(U^*)$ отличаются на конечном множестве изолированных точек, поскольку сами являются конечными. Множества $A \setminus U$ и $h(B \setminus U^*)$ отличаются на конечное множество изолированных точек, так как

$$A \setminus U \approx A \approx h(B) \approx h(B \setminus U^*).$$

Таким образом, множество $U^*$ подходящее.

Случай, когда $A \setminus U$ конечно, рассматривается аналогично.

Пусть теперь $U$ и $A \setminus U$ бесконечны. Обозначим

$$U_0 = h(B) \cap U, \quad U_1 = h(B) \setminus U.$$

По п. (3) леммы 5.2 эти множества открыты. Рассмотрим следующие открытые подмножества $X^*$:

$$U_0^* = h^{-1}(U_0) \cup h^{-1}(h(B) \setminus A), \quad U_1^* = h^{-1}(U_1).$$

Если множества изолированных точек в $U$ и $A \setminus U$ бесконечны, то по п. (4) леммы 5.2 множества изолированных точек из $h^{-1}(U_0)$ и $h^{-1}(U_1)$ тоже бесконечны; в таком случае мы можем взять $U^* = U_0^*$. Если одно из этих множеств, скажем множество изолированных точек из $U$, конечно, то множество изолированных точек из $h^{-1}(U_0)$ также конечно вместе с множеством изолированных точек из $U_0^*$ и оно отличается от него на конечное подмножество множества $h^{-1}(h(B) \setminus A)$. Ввиду того, что количество изолированных точек в $A$ и в $B$ одно и то же, можно добавить или убрать конечное множество изолированных точек из $U_0^*$ так, чтобы его мощность была равна числу изолированных точек из $U$, получив в результате требуемое множество $U^*$. Непосредственная проверка показывает, что так построенное множество $U^*$ удовлетворяет лемме.

Докажем (2). Фактически доказательство использует те же идеи, что и для п. (1). Мы дадим его набросок. Пусть

$$U_0^* = U^*, \quad U_1^* = B \setminus U^*, \quad U_i = h(U_i^*) \cap A, \quad i = 0, 1.$$

По п. (3) леммы 5.2 множества $U_i$, $i = 0, 1$ открыты. По пп. 4, 5 леммы 5.2 множества изолированных точек из $U_i$ бесконечны тогда и только тогда, когда множество изолированных точек из в $U_i^*$ бесконечно. Поскольку мощность множеств изолированных точек в $A$ и $B$ совпадают, можно добавить или убрать из $U_0$ конечное множество изолированных точек так, чтобы количества изолированных точек в $U_0$ и в $U_1^*$ а также в $A \setminus U_0$ и $U_1^*$ попарно совпали, получив тем самым новое открыто-замкнутое множество $U_0'$. Положим $U = U_0'$. Проверка оставшейся части условия эквивалентности очевидна. □

Теперь можно построить гомеоморфизм $g$ из $X$ на $X^*$ следующим образом. Пусть $(U_i)_{i<\omega}$ — счетная база из открыто-замкнутых множеств для пространства $X$, и пусть $(U_i^*)_{i<\omega}$ — счетная база из открыто-замкнутых множеств для пространства $X^*$.

Определим семейства $(A_\varepsilon)_{\varepsilon\in 2^{<\omega}}$ и $(B_\varepsilon)_{\varepsilon\in 2^{<\omega}}$, состоящие из открыто-замкнутых множеств, по шагам следующим образом.

Шаг 0. $A_\varnothing = X$, $B_\varnothing = X^*$. Заметим, что $A_\varnothing$ и $B_\varnothing$ эквивалентны, поскольку оба содержат бесконечно много изолированных точек, и $h(A_\varnothing) = B_\varnothing$.

Шаг $n > 0$. Предположим, что $A_\varepsilon$ и $B_\varepsilon$ уже определены для всех $\varepsilon$ таких, что $|\varepsilon| < n$, и каждое $A_\varepsilon$ эквивалентно $B_\varepsilon$ для всех $\varepsilon$ таких, что $\mathrm{length}(\varepsilon) < n$.

Чтобы определить $A_{\varepsilon 0}$, $A_{\varepsilon 1}$, $B_{\varepsilon 0}$, $B_{\varepsilon 1}$, где $\mathrm{length}(\varepsilon) = n$, рассмотрим два случая.

Случай 1. $n = 2t+1$. Положим $A_{\varepsilon 0} = A_\varepsilon \cap U_t$, $A_{\varepsilon 1} = A_\varepsilon \setminus U_t$ для всех $\varepsilon \in 2^n$. По лемме 5.3 находим открыто-замкнутое множество $S \subseteq B_\varepsilon$ в $\mathfrak{X}^*$ такое, что $A_{\varepsilon 0}$ эквивалентно $S$ и $A_{\varepsilon 1}$ эквивалентно $B_\varepsilon \setminus S$. Положим $B_{\varepsilon 0} = S$ и $B_{\varepsilon 1} = B_\varepsilon \setminus S$.

Случай 2. $n = 2t + 2$. Положим $B_{\varepsilon 0} = B_\varepsilon \cap U_t^*$, $B_{\varepsilon 1} = B_\varepsilon \setminus U_t^*$ для всех $\varepsilon \in 2^n$. По лемме 5.3 находим открыто-замкнутое множество $S \subseteq A_\varepsilon$ в $\mathfrak{X}$ такое, что $B_{\varepsilon 0}$ эквивалентно $S$ и $B_{\varepsilon 1}$ эквивалентно $A_\varepsilon \setminus S$. Положим $A_{\varepsilon 0} = S$ и $A_{\varepsilon 1} = A_\varepsilon \setminus S$.

Заметим, что для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$ найдется $U_i$ такое, что $U_i = \{x\}$, и для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*)$ найдется $U_i^*$ такое, что $U_i^* = \{x\}$. Следовательно, для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$ существует $A_\varepsilon$ такое, что $A_\varepsilon = \{x\}$, и для каждой точки $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*)$ существует $B_\varepsilon$ такое, что $B_\varepsilon = \{x\}$. Более того, для каждого $x \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$

$$x \in A_\varepsilon \text{ тогда и только тогда, когда } x \in B_\varepsilon \text{ для всех } \varepsilon \in 2^{<\omega}.$$

Заметим, что каждое $A_\varepsilon$, $\varepsilon \in 2^{<\omega}$, содержит только один элемент тогда и только тогда, когда $B_\varepsilon$ содержит только один элемент.

Определим отображение $g$ из $X$ на $X^*$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} x, \quad \text{если } x \notin \mathrm{Is}(X); \\ \text{единственное } y \in B_\varepsilon, \text{ если } A_\varepsilon = \{x\}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что это отображение взаимно-однозначно. Докажем, что $g$ и $g^{-1}$ непрерывны. Это следует из следующих свойств:

(1) для всех $x \in X$ и всех $A \Subset \mathfrak{X}$ таких, что $x \in A$, существует элемент $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ такой, что $x \in A_\varepsilon \subseteq A$;

(2) для всех $x \in X^*$ и всех $A \Subset X^*$ таких, что $x \in A$, существует $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ такой, что $x \in B_\varepsilon^* \subseteq A$;

(3) $g(A_\varepsilon) = B_\varepsilon^*$.

Таким образом, $g$ является гомеоморфизмом. Предложение доказано.

Теперь опишем *представление в виде дерева* эффективных топологических $T_0$-пространств с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств. Пусть $\mathfrak{X}$ — такое пространство с основным множеством $X$, и пусть $(U_i)_{i<\omega}$ — его вычислимая база из открыто-замкнутых множеств.

Мы будем использовать следующую запись: $U^0 = U$, $U^1 = X \setminus U$.

По пространству $\mathfrak{X}$ построим по шагам бинарное дерево $T(\mathfrak{X}) \subseteq 2^{<\omega}$ и семейство открыто-замкнутых множеств $V_\varepsilon$, $\varepsilon \in T(\mathfrak{X})$, как описано ниже.

Шаг 0. Положим $T_0 = \{\Lambda\}$, $V_\Lambda = X$, $a_\Lambda$ — наименьший элемент $X$.

Шаг $n+1$. Предположим, что $T_n$ — конечное дерево, построенное к данному моменту. Для каждой концевой вершины $\varepsilon$ этого дерева проделываем следующее: если $A_0 = V_\varepsilon \cap U_n^0 \neq \varnothing$ и $A_1 = V_\varepsilon \cap U_n^1 \neq \varnothing$, то добавим к дереву элементы $\varepsilon 0$ и $\varepsilon 1$, единственное из множеств $A_0$, $A_1$, которое содержит $a_\varepsilon$, объявим $V_{\varepsilon 0}$, а оставшееся из этих множеств объявим $V_{\varepsilon 1}$. Положим $a_{\varepsilon 0} = a_\varepsilon$, а элемент $a_{\varepsilon 1}$ определим как минимальный элемент из $V_{\varepsilon 1}$. Переходим к следующему шагу.

Положим $T(\mathfrak{X}) = \bigcup\limits_{n\in\omega} T_n$.

Заметим, что дерево $T(\mathfrak{X})$ перечисляется равномерно по индексам алгоритмов, задающих пространство $\mathfrak{X}$.

Заметим, что элементы $a_\varepsilon$, $\varepsilon \in T(\mathfrak{X})$, находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с элементами дерева $T(\mathfrak{X})$, не оканчивающимися на 0. Кроме того, $X = \{a_\varepsilon \mid \varepsilon \in T(\mathfrak{X})\}$.

Опишем теперь и обратную конструкцию, выдающую по бинарному дереву $T$ эффективное топологическое пространство с эффективной базой из открыто-замкнутых множеств. Пусть задано некоторое перечисление бинарного дерева $T$. По этому перечислению следующим естественным образом строится эффективное топологическое пространство. Точками его являются элементы дерева, не оканчивающиеся на 0. Множество всех этих точек обозначим через $X(T)$. В ходе построения дерева возникает естественное эффективное перечисление элементов дерева $T$: $T = \{\alpha_i \mid i \in \omega\}$ такое, что по данному $i$ эффективно выписывается $\alpha_i$. Теперь определим базовые окрестности как $U_i = \{\varepsilon \in X(T) \mid \exists m\, (\alpha_i \sqsubseteq \varepsilon 0^m)\}$. Тем самым полностью определено эффективное топологическое пространство, которое мы обозначим через $\mathfrak{X}(T)$. Нетрудно убедиться, что если $T$ — перечислимое дерево, рассматриваемое со своим перечислением, построенное, как выше, по топологическому пространству $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}(T) \cong_s \mathfrak{X}$.

Замечание 3. Если мы возьмем дерево $T$ и последовательно подвесим к некоторым (не обязательно концевым) вершинам из $T$ поддеревья вида  (это эквивалентно последовательному добавлению к дереву для некоторых вершин $\alpha$ элементов $\alpha 0$ и $\alpha 1$) так, что под каждой концевой вершиной окажется лишь конечное число новых элементов, то по предложению 5.1 так полученное дерево $T^*$ будет определять топологическое пространство, гомеоморфное $\mathfrak{X}(T)$, $\mathfrak{X}(T) \cong \mathfrak{X}(T^*)$.

В дальнейшем мы применим это древесное представление и сделанное замечание для получения дерева, для которого соответствующее топологическое пространство будет гомеоморфно, но не сильно изоморфно исходному пространству $\mathfrak{X}$.

Будем говорить, что класс $K$ эффективных топологических пространств является *сильно эффективно бесконечным,* если существует эффективный метод, который по любому алгоритму, задающему вычислимое семейство $(\mathfrak{X}_i)_{i<\omega}$ элементов из $K$, выдает индексы для некоторого пространства $\mathfrak{X} \in K$ такого, что $\mathfrak{X} \not\cong_s \mathfrak{X}_i$, для каждого $i < \omega$.

**Теорема 5.4.** *Класс всех эффективных топологических пространств с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств и бесконечным числом изолированных точек является эффективно бесконечным.*

Доказательство. Поскольку дерево для таких пространств строится равномерно по индексу пространства, будем считать, что у нас имеется вычислимая последовательность бинарных деревьев $(T_i)_{i\in\omega}$, $T_i \subseteq 2^{<\omega}$, такая, что для всех $i \in \omega$ выполнено $\mathfrak{X}_i \cong_s \mathfrak{X}(T_i)$.

Зафиксируем одновременное перечисление деревьев $T_i$:

$$T_i^0 \subseteq T_i^1 \subseteq \cdots \subseteq T_i^k \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{i\in\omega} T_i^t = T_i$$

такое, что по данным $i$ и $k$ эффективно вычисляется индекс конечного множества $T_i^k$.

Для доказательства теоремы достаточно по шагам построить новое дерево $T_*$ так, чтобы $\mathfrak{X}(T_*) \cong \mathfrak{X}(T_0)$ и чтобы одновременно удовлетворялись следующие требования.

$\mathbf{R}_{i,n}$ $(i, n \in \omega)$: функция $\varkappa_n$ не может играть роль функции $h_0$ в определении сильного гомеоморфизма из пространства $\mathfrak{X}(T_i)$ на $\mathfrak{X}(T_*)$.

В конце каждого шага $t$ мы будем иметь некоторое семейство элементов, перечисленных к этому моменту, образующих конечное дерево $T_*^t \supseteq T_0^t$. Назовем *$t$-рангом* элемента $\varepsilon \in T_*^t$ максимальное натуральное $m$ такое, что $\varepsilon \restriction m \in T_0^t$. Очевидно, что функция $t$-ранга нестрого возрастает по $t$.

Определим $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ множества $V_\varepsilon = \{\gamma \mid \exists m\, (\varepsilon \sqsubseteq \gamma 0^m)\}$.

Опишем построение. Зафиксируем некоторое вычислимое отображение $p : \omega \to \omega \times \omega$, удовлетворяющее следующему свойству: для любых $i, n \in \omega$ существует бесконечно много $j$ таких, что $p(j) = \langle i, n\rangle$.

Шаг 0. Положим $T_*^0 = T_0^0$.

Шаг $t > 0$. На этом шаге мы будем пытаться удовлетворить требование $\mathbf{R}_{i,n}$, где $p(t) = \langle i, n\rangle$.

Сначала снимем все метки, стоящие на вершинах дерева $T_i^{t-1}$, не являющихся концевыми.

Если метка $\langle i, n\rangle$ в настоящий момент где-нибудь поставлена, то перейдем к следующему шагу. В противном случае ищем концевую вершину $\alpha$ дерева $T_i^t$ с наименьшим номером такую, что выполнены следующие условия:

(1) для всех $\varepsilon$, лексикографически не превосходящих $\alpha$, значения $\varkappa_n^t(\varepsilon)$ определены и $W^t_{\varkappa_n(\varepsilon)} \neq \varnothing$;

(2) существуют $\gamma \in W^t_{\varkappa^t(\alpha)}$ и элемент $\beta \sqsupseteq \gamma$ такой, что $t$-ранг $\beta$ больше, чем $c(i, n)$;

(3) $\Big(\bigcup\limits_{\gamma\in W^t_{\varkappa_n(\varepsilon)}} V_\gamma\Big) \cap \Big(\bigcup\limits_{\gamma\in W^t_{\varkappa_n(\varepsilon')}} V_\gamma\Big) = \varnothing$ для всех пар $\varepsilon, \varepsilon' \in T_i^t$ элементов, несравнимых относительно отношения $\sqsubseteq$.

Берем наименьшее такое $\beta$ и в качестве $T_*^t$ наименьшее бинарное дерево, содержащее $T_0^t$ и элементы $\beta 0$ и $\beta 1$. Поставим на элемент $\alpha$ метку $\langle i, n\rangle$.

Описание построения закончено.

Докажем следующие свойства этого построения.

**Лемма 5.5.** *Каждая метка ставится конечное число раз. Все требования $R_{i,n}$ удовлетворяются.*

Доказательство леммы. Заметим, что каждая метка может быть поставлена на некоторый элемент дерева $T_i$ не более одного раза, и если однажды эта метка ставится на концевую вершину дерева $T_i$, то она уже никогда не снимается.

Зафиксируем натуральные числа $i$ и $n$ и покажем, что метка $\langle i,n\rangle$ ставится лишь конечное число раз. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Для некоторого $\alpha \in T_i$ значение $\varkappa_n(\alpha)$ не определено. Тогда лемма следует из описания построения и замечания, сделанного в начале доказательства.

Следующие два случая рассматриваются аналогично.

Случай 2. Для некоторого $\alpha \in T_i$ выполнено $W_{\varkappa_n(\alpha)} = \varnothing$.

Случай 3. Для некоторых $\varepsilon, \varepsilon' \in T_i$, несравнимых по отношению $\sqsubseteq$, выполнено $\Big(\bigcup\limits_{\gamma\in W^t_{\varkappa_n(\varepsilon)}} V_\gamma\Big) \cap \Big(\bigcup\limits_{W^t_{\varkappa_n(\varepsilon')}} V_\gamma\Big) \neq \varnothing$.

Очевидно, что в любом из этих трех случаев требование $R_{i,n}$ выполняется.

Случай 4. Не выполнен ни один из предыдущих случаев.

Нетрудно убедиться, что в этом случае метка $\langle i,n\rangle$ будет в итоге поставлена на некоторую концевую вершину $\alpha$ дерева $T_i$ и поэтому никогда уже не будет снята. Тогда множество $V_\alpha$ будет содержать один элемент, а множество $\bigcup\limits_{W^t_{\varkappa_n(\alpha)}} V_\gamma$ — как минимум два элемента, т. е. требование $R_{i,n}$ выполняется.

**Лемма 5.6.** $\mathfrak{X}(T_0) \cong \mathfrak{X}(T_*)$.

Доказательство леммы. Сначала отметим, что при построении дерева $T_*$ под каждую концевую вершину $\alpha$ дерева $T_0$ будет добавлено лишь конечное семейство новых элементов. Действительно, начиная с некоторого шага $t$, $t$-ранг концевой вершины $\alpha$ уже не будет изменяться. Обозначим его через $m$. Все элементы, добавленные под $\alpha$, будут иметь ранг $m$. Новые элементы под $\alpha$ будут добавляться только при постановке меток $\langle i,n\rangle$, для которых $c(i,n) < m$, что произойдет лишь конечное число раз.

Лемма теперь следует из предложения 5.1 и замечания 3. $\square$

Замечание 4. Требование существования вычислимого отображения $\varphi$ в определении сильного гомеоморфизма нигде не использовано в доказательстве.

**Теорема 5.7.** *Любые два эффективные топологические $T_0$-пространства без изолированных точек, обладающие эффективными базами открыто-замкнутых множеств, сильно вычислимо гомеоморфны.*

Доказательство следует из того, что каждое такое пространство имеет древесное представление, в котором это дерево является полным бинарным деревом. $\square$

**Теорема 5.8.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — эффективное топологическое $T_0$-пространство с эффективной базой из открыто-замкнутых множеств. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{X}$ допускает как минимум два не сильно вычислимо изоморфных вычислимых представления с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств;*

(2) *$\mathfrak{X}$ допускает бесконечно много попарно не сильно вычислимо изоморфных вычислимых представлений с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств;*

(3) *класс всех эффективных представлений $\mathfrak{X}$ с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств эффективно бесконечен;*

(4) $\mathfrak{X}$ *содержит бесконечно много изолированных точек.*

Доказательство следует из вышеприведенных результатов.

Результаты настоящей работы получены во время визита автора в Университет г. Зигена (Германия). Автор благодарит профессора Дитера Шпреена за приглашение, знакомство с эффективной топологией и полезные обсуждения. Автор также благодарит анонимного рецензента за исправление некоторых неточностей в изложении.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl, 1975.
**2.** *Ногина Е. Ю.* Соотношения между некоторыми классами эффективных топологических пространств // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 4. С. 483–495.
**3.** *Ногина Е. Ю., Вайнберг Ю. Р.* Исследования по формализованным языкам и классическим логикам // Категории эффективных топологических пространств. М.: Наука, 1974. С. 253–273.
**4.** *Ногина Е. Ю.* Об эффективных топологических пространствах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 28–31.
**5.** *Nogina E. Yu.* Enumerable topological spaces // Z. Math. Logik und Grundlagen der Math. 1978. Bd 24, N 2. S. 141–176.
**6.** *Spreen D.* A characterization of effective topological spaces // Recursion theory week (Oberwolfach, 1989). Berlin etc.: Springer-Verl., 1990. P. 363–387. (Lecture Notes in Math.; 1432).
**7.** *Spreen D.* On effective topological spaces // J. Symbolic Logic. 1998. V. 63, N 1. P. 185–221.
**8.** *Kalantari I.* A bibliography of recursive algebra and recursive model theory // Handbook of Recursive Mathematics. V. 1. Recursive Model Theory. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. P. 515–581. (Studies in Logic and Foundations of Mathematics).
**9.** *Морозов А. С.* Функциональные деревья и автоморфизмы моделей // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 1. С. 19–39.
**10.** *Morozov A. S.* Hyperarithmetical functions and algebraicity // Recursion Theory and Complexity. Proc. Kazan-97. Workshop, july 14–19. Berlin; New York: Walter de Gruyter publ., 1999. P. 115–130. (de Gruyter Series in Logic and its Applications ).
**11.** *Морозов А. С.* О группах автоморфизмов разрешимых моделей // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 4. С. 437–447.
**12.** *Гончаров С. С.* О проблеме числа конструктивизаций // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 6. С. 621–639.

*Статья поступила 25 апреля 2003 г.*

*Морозов Андрей Сергеевич*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
*пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090*
morozov@math.nsc.ru