Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.51

О ВЛОЖЕНИЯХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ОБОБЩЕННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. С. Романов

Аннотация: На метрическом пространстве с борелевской мерой рассматриваются классы функций, приращение которых контролируется мерой шара, содержащего соответствующие точки, и неотрицательной функцией, суммируемой в некоторой степени. Доказываются теоремы вложения для пространств рассматриваемого вида, определяемых двумя различными мерами, удовлетворяющими условию удвоения.

Ключевые слова: метрическое пространство, мера, класс Соболева, теоремы вложения.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, μ — конечная регулярная борелевская мера, т. е. $\mu(X) < \infty$.

Символом $B(a, r)$ будем обозначать открытый шар радиуса r с центром в точке a. Для произвольной пары точек $x, y \in X$ определим неотрицательную величину $M(x, y)$ равенством

$$M(x,y) = \min\{\mu(\overline{B(x, d(x,y))}), \mu(\overline{B(y, d(x,y))})\}.$$

Функцию $h : X \to [0, \infty)$ будем называть *допустимой для μ-измеримой функции* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq (M(x,y))^{1/s}(h(x) + h(y)) \tag{1}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции f обозначим через $D(f)$ и положим $D_p(f) = D(f) \cap L_p(X, \mu)$.

При $1 \leq p \leq \infty$, $1 < s < \infty$ функциональные пространства $L_{s,p}(X, d, \mu)$ и $W_{s,p}(X, d, \mu)$ определим условиями

$$L_{p,s}(X, d, \mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid D_p(f) \neq \varnothing\},$$

$$W_{p,s}(X, d, \mu) = \{f \in L_p(X, \mu) \mid f \in L_{p,s}(X, d, \mu)\}.$$

Как множества функций пространства $L_{s,p}(X, d, \mu)$ и $W_{s,p}(X, d, \mu)$ совпадают [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01009) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ–311.2003.1).

Полунорма в пространстве $L_{s,p}(X,d,\mu)$ и норма в пространстве $W_{s,p}(X,d,\mu)$ вводятся равенствами

$$\|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\| = \inf_{h\in D_p(f)} \|h \mid L_p(X,\mu)\|,$$

$$\|f \mid W_{s,p}\| = \|f \mid L_p(X,\mu)\| + \|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|$$

соответственно.

На шарах $B \subset \mathbb{R}^n$ пространство $W_{n,p}(B)$ относительно евклидовой метрики и стандартной меры Лебега совпадает с классическим пространством Соболева $W_p^1(B)$, а в случае, когда существует двусторонняя степенная оценка меры шара через его радиус ($C_1 r^s \le \mu(B(x,r)) \le C_2 r^s$), пространство $W_{s,p}(X,d,\mu)$ совпадает с пространством Соболева — Хайлаша $HW_p^1(X,d,\mu)$ [1–3].

Для пространств $W_{s,p}(X,d,\mu)$ удается доказать некоторые аналоги классических результатов, известных для соболевских классов функций в евклидовом случае, в частности, получить теоремы вложения в пространства Лебега [1].

Пространства $L_{s,p}(X,d,\mu)$ и $W_{s,p}(X,d,\mu)$ допускают довольно удобное описание в терминах соответствующих максимальных функций в случае, когда мера μ удовлетворяет условию удвоения, т. е. существует такая постоянная $1 < C_d < \infty$, что

$$\mu(B(x,2r)) \le C_d \mu(B(x,r))$$

при всех $x \in X$ и $r > 0$.

Далее мы будем всюду предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения.

Среднее значение функции f на множестве Ω обозначим символом

$$f_\Omega = \fint_\Omega f\,d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f\,d\mu.$$

Введем еще одну среднюю величину, связанную с локально интегрируемой функцией f, полагая

$$I_{s,\mu}(x,r) = (\mu(B(x,r)))^{-1/s} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\,d\mu.$$

Для локально интегрируемой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ и $s > 1$ уточненную максимальную функцию $f^{\#}_{s,\mu}$ определим равенством

$$f^{\#}_{s,\mu}(x) = \sup_{r>0} I_{s,\mu}(x,r).$$

В работе [1] показано, что при $1 < p \le \infty$ для локально интегрируемой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ следующие условия эквивалентны:

1) $f \in L_{s,p}(X,d,\mu)$;

2) существует функция $g \in L_p(\mu)$ такая, что неравенство Пуанкаре

$$I_{s,\mu}(x,r) \le \fint_{B(x,r)} g\,d\mu \tag{2}$$

выполняется для всех $x \in X$ и $r > 0$;

3) $f^{\#}_{s,\mu} \in L_p(X,\mu)$.

Далее символом g будем обозначать функцию, удовлетворяющую неравенству Пуанкаре (2) и имеющую минимальную L_p-норму. Тогда для произвольной функции $f \in W_{s,p}(X,d,\mu)$

$$\|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\| \sim \|g \mid L_p(X,\mu)\| \sim \big\|f^{\#}_{s,\mu} \mid L_p(X,\mu)\big\|,$$

$$\|f \mid W_{s,p}(X,d,\mu)\| \sim \|f \mid L_p(X,\mu)\| + \|g \mid L_p(X,\mu)\| \\ \sim \|f \mid L_p(X,\mu)\| + \big\|f^{\#}_{s,\mu} \mid L_p(X,\mu)\big\|.$$

Символами $C, C', C_1, \dots$ будем обозначать постоянные, связанные с фиксированным пространством $L_{s,p}(X,d,\mu)$ и не зависящие от выбора конкретной функции f, принадлежащей данному пространству. Чтобы не нагромождать дополнительных индексов, мы иногда будем использовать один и тот же символ для обозначения различных постоянных.

Пусть $f \in L_{s,p}(X,d,\mu)$ и носитель меры ν, удовлетворяющей условию удвоения, лежит в множестве $E \subset X$. Нас интересуют достаточные условия, при которых сужение функции f на множество E будет принадлежать пространству $L_{l,q}(E,d,\nu)$.

Естественное ограничение на выбор меры ν автоматически возникает из условия, что функция f должна быть естественным образом определена ν-почти всюду на множестве E.

Поскольку для меры μ, удовлетворяющей условию удвоения, выполняются лемма Витали о покрытии и вытекающие из этой леммы свойства, для всякой локально суммируемой функции f точками Лебега являются μ-почти все точки $x \in X$, т. е. почти всюду

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\,d\mu.$$

Для функций класса $L_{s,p}(X,d,\mu)$ этот результат допускает весьма существенное уточнение.

Положим

$$\bar f(x) = \varlimsup_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\,d\mu,$$

тогда функция $\bar f$ однозначно определена в каждой точке $x \in X$, совпадает μ-почти всюду на множестве X с функцией f и все средние значения функции $\bar f$ относительно меры μ совпадают с соответствующими средними значениями функции f.

Оценим разность средних значений функции $\bar f$ на двух концентрических шарах $B_R = B(x,R)$ и $B_\varrho = B(x,\varrho)$. Пусть $\varrho < R$, тогда по предложению 1 работы [1] существует конечная убывающая система шаров $\{B_k = B(x,r_k)\}$, $k = 0,1,\dots k_0$, такая, что $B_0 = B(x,R)$, $B_{k_0} = B(x,\varrho)$, $\mu(B_k) \le C_d^2 \mu(B_{k+1})$ и $\mu(B_k) \le C_d^{1-k}\mu(B_0)$.

Несложно оценить разность средних значений функции f на двух последовательных шарах системы через значение уточненной максимальной функции $f^{\#}_{l,\mu}$ при $l > 1$:

$$|f_{B_{k+1}} - f_{B_k}| \le \frac{1}{\mu(B_{k+1})} \int\limits_{B_{k+1}} |f - f_{B_k}|\,d\mu \le \frac{\mu(B_k)}{\mu(B_{k+1})} \fint\limits_{B_k} |f - f_{B_k}|\,d\mu \\ \le C_d^2 (\mu(B_k))^{1/l} \frac{1}{(\mu(B_k))^{1/l}} \fint\limits_{B_k} |f - f_{B_k}|\,d\mu \le C_1 (\mu(B(x,R)))^{1/l} C_d^{-k/l} f^{\#}_{l,\mu}(x).$$

Учитывая эту оценку, получаем

$$|\bar{f}_{B_R} - \bar{f}_{B_\varrho}| = |f_{B_R} - f_{B_\varrho}| \le \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_{B_{k+1}} - f_{B_k}|$$

$$\le C_1(\mu(B(x,R)))^{1/l} f^{\#}_{l,\mu}(x) \sum_{k=0}^{k_0-1} C_d^{-k/l} \le C_2(\mu(B(x,R)))^{1/l} f^{\#}_{l,\mu}(x). \quad (3)$$

Если мера точки x положительна, то x является точкой Лебега функции $\bar{f}$, поскольку таковыми являются μ-почти все точки пространства X. Если же $\mu(B(x,R)) \to 0$ при $R \to 0$, то из неравенства (3) следует, что точкой Лебега функции $\bar{f}$ является всякая такая точка x, в которой $f^{\#}_{l,\mu}(x) < \infty$ при некотором $l > 1$.

Лемма. *Пусть $p > 1$, $f \in L_{s,p}(X,d,\mu)$ и мера ν, удовлетворяющая условию удвоения на множестве E, такова, что для произвольного шара с центром в точке $x \in E$ выполняется неравенство $\nu(B(x,r)) \le C'(\mu(B(x,r)))^\gamma$, где $\max(0, 1-p/s) < \gamma \le 1$. Тогда при $0 < 1/l \le 1/s - (1-\gamma)/p$ выполняется оценка слабого типа*

$$\nu\big\{x \in E \mid f^{\#}_{l,\mu}(x) > \lambda\big\} \le C \frac{\|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|^p}{\lambda^p}.$$

Доказательство. Пусть $f^{\#}_{l,\mu}(x) > \lambda > 0$, тогда существует шар $B(x,r)$ такой, что $I_{l,\mu}(x,r) > \lambda/2$. Используя неравенство Пуанкаре (2), получаем

$$\lambda/2 < I_{l,\mu}(x,r) = (\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l} I_{s,\mu}(x,r)$$

$$\le (\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l} \fint_{B(x,r)} g\,d\mu \le (\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l-1/p} \Bigg(\int_{B(x,r)} g^p\,d\mu\Bigg)^{1/p}.$$

Таким образом,

$$(\mu(B(x,r)))^{-p/s+p/l+1} \le 2^p \lambda^{-p} \int_{B(x,r)} g^p\,d\mu.$$

Следовательно,

$$\nu(B(x,r)) \le C_1(\mu(B(x,R)))^\gamma \le C_2(\mu(B(x,r)))^{-p/s+p/l+1}$$

$$\le 2^p C_2 \lambda^{-p} \int_{B(x,r)} g^p\,d\mu. \quad (4)$$

Поскольку мера ν удовлетворяет условию удвоения, для нее верна лемма Витали о покрытии [4] и, следовательно, существует последовательность непересекающихся шаров $B_k = B(x_k, r_k)$, на каждом из которых выполняется неравенство (4), при этом

$$\nu\big\{x \in E \mid f^{\#}_{l,\mu}(x) > \lambda\big\} \le C_3 \sum_k \nu(B_k)$$

$$\le C_4 \frac{\|g \mid L_p(X,\mu)\|^p}{\lambda^p} \le C \frac{\|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|^p}{\lambda^p}.$$

Таким образом, при выполнении условий леммы оказывается, что $f^{\#}_{l,\mu}(x)$ будет конечной ν-почти всюду на множестве E и, следовательно,

$$\bar f(x) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int\limits_{B(x,r)} \bar f\,d\mu$$

для ν-почти всех точек множества E.

Из доказательства леммы 1 и теоремы 3 работы [1] следует, что для функции $f \in L_{s,p}(X,d,\mu)$ неравенство

$$|\bar f(x) - \bar f(y)| \le C(M(x,y))^{1/s}\bigl(f^{\#}_{s,\mu}(x) + f^{\#}_{s,\mu}(y)\bigr)$$

будет выполняться во всех точках Лебега функции $\bar f$, т. е. ν-почти всюду на множестве E.

Далее, говоря о сужении функции f на множество E, мы будем иметь в виду сужение функции $\bar f$.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $\max(0, 1 - p/s) < \gamma < 1$, $E \subset X$ и мера ν такова, что для произвольного шара с центром в точке $x \in E = \operatorname{supp}\nu$ выполняется оценка*

$$C^{-1}(\mu(B(x,r)))^{\gamma} \le \nu(B(x,r)) \le C(\mu(B(x,r)))^{\gamma}.$$

Тогда пространство $L_{s,p}(X,d,\mu)$ при $\frac{1}{l} < \frac{1}{s} - \frac{(1-\gamma)}{p}$ непрерывно вложено в пространство $L_{l,q}(E,d,\nu)$, где $\gamma\bigl(\frac{1}{q} - \frac{1}{l}\bigr) = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$ при $\frac{1}{s} - \frac{\gamma}{l} - \frac{1}{p} < 0$ и $q = \infty$ при $\frac{1}{s} - \frac{\gamma}{l} - \frac{1}{p} \ge 0$.

Доказательство. Согласно теореме 3 работы [1] из принадлежности функции f пространству $L_{s,p}(X,d,\mu)$ вытекает, что уточненная максимальная функция $f^{\#}_{s,\mu}$ принадлежит $L_p(X,\mu)$. Поскольку на множестве E мера ν удовлетворяет условию удвоения, для принадлежности сужения функции f на множестве E пространству $L_{l,q}(E,d,\nu)$ необходимо и достаточно, чтобы $f^{\#}_{l,\nu} \in L_q(E,\nu)$. К сожалению, не очень понятно, как непосредственно оценить значения уточненной максимальной функции относительно меры ν через значения уточненной максимальной функции относительно меры μ. Однако в данном случае это и не обязательно.

Из леммы 1 работы [1] следует, что в точках Лебега функции f, а таковыми являются ν-почти все точки множества E, выполняется неравенство

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le C_1(M(x,y))^{\gamma/l}\bigl(f^{\#}_{l/\gamma,\mu}(x) + f^{\#}_{l/\gamma,\mu}(y)\bigr)\\ &\le C_2(V(x,y))^{1/l}\bigl(f^{\#}_{l/\gamma,\mu}(x) + f^{\#}_{l/\gamma,\mu}(y)\bigr),\end{aligned}$$

где $V(x,y) = \min\{\nu(\overline{B(x,d(x,y))}), \nu(\overline{B(y,d(x,y))})\}$. Поэтому достаточно показать, что $f^{\#}_{l/\gamma,\mu} \in L_q(E,\nu)$.

Положим $l_1 = l/\gamma$ и $E_\lambda = \bigl\{x \in E \mid f^{\#}_{l_1,\mu} \ge \lambda.\bigr\}$ Рассмотрим точку $x \in E_\lambda$ и выберем такой шар $B(x,r)$, что $\lambda \le 2I_{l_1,\mu}(x,r)$. Используя неравенство Пуанкаре (2) и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}\lambda &\le 2I_{l_1,\mu}(x,r) \le 2(\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l_1} I_{s,\mu}(x,r)\\ &\le 2(\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l_1} \fint\limits_{B(x,r)} g\,d\mu \le 2(\mu(B(x,r))^{1/s-1/l_1-1/p}\|g \mid L_p(X,\mu)\|. \qquad (5)\end{aligned}$$

При $1/s - 1/l_1 - 1/p \geq 0$ сразу выводим, что $f^{\#}_{l/\gamma,\mu} \in L_\infty(E,\nu)$.

Пусть $1/s - 1/l_1 - 1/p < 0$ и $\alpha(1/p + 1/l_1 - 1/s) = 1/s - 1/l_1$. Поскольку $1/s - 1/l_1 > 1/s - 1/l > (1-\gamma)/p > 0$, имеем $\alpha > 0$.

Тогда из неравенства (5) вытекает, что

$$\frac{1}{2}\lambda(\mu(B(x,r)))^{1/p+1/l_1-1/s}\|g \mid L_p(X,\mu)\|^{-1} \leq 1.$$

Возводя неравенство в степень α и умножая на $\frac{\lambda}{2}$, получаем

$$\frac{1}{2^{1+\alpha}}\lambda^{1+\alpha}(\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l_1}\|g \mid L_p(X,\mu)\|^{-\alpha} \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Обозначим $\tau = 2^{-\alpha-2}\|g \mid L_p(X,\mu)\|^{-\alpha}\lambda^{1+\alpha}$ и определим функцию g_1, полагая $g_1(x) = g(x)$ при $g(x) \geq \tau$ и $g_1(x) = 0$ при $g(x) < \tau$. Тогда

$$\lambda \leq 2(\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l_1} \fint\limits_{B(x,r)} g\,d\mu \leq 2(\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l_1} \fint\limits_{B(x,r)} g_1\,d\mu + \frac{\lambda}{2}$$

или

$$\lambda \leq 4(\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l_1} \fint\limits_{B(x,r)} g_1\,d\mu. \tag{6}$$

Выберем значение ω так, что $\frac{1}{s} - \frac{1}{l_1} - \frac{1-\gamma}{\omega} = 0$. Применяя к оценке (6) неравенство Гёльдера, приходим к неравенствам

$$\lambda \leq 4(\mu(B(x,r)))^{1/s-1/l_1-1/\omega}\Bigg(\int\limits_{B(x,r)} g_1^\omega\,d\mu\Bigg)^{1/\omega}$$

или

$$(\mu(B(x,r)))^\gamma \leq C\lambda^{-\omega} \int\limits_{B(x,r)} g_1^\omega\,d\mu. \tag{7}$$

Поскольку мера ν удовлетворяет условию удвоения, для нее выполняется лемма Витали о покрытии. Поэтому из покрытия множества E_λ шарами, на которых выполняется неравенство (7), можно извлечь такую конечную или счетную систему непересекающихся шаров $\{B_k\}$, что

$$\nu(E_\lambda) \leq C_3\sum_k \nu(B_k) \leq C_3'\sum_k (\mu(B_k))^\gamma \leq C_4\lambda^{-\omega}\int\limits_X g_1^\omega\,d\mu = C_4\lambda^{-\omega}\int\limits_{g\geq\tau} g^\omega\,d\mu. \tag{8}$$

Аналогично стандартному доказательству ограниченности максимального оператора [5], интегрируя по множествам уровня и учитывая оценку (8), получаем

$$\big\|f^{\#}_{l/\gamma,\mu} \mid L_q(E,\nu)\big\|^q = q\int\limits_0^\infty \lambda^{q-1}\nu(E_\lambda)\,d\lambda \leq C_5\int\limits_0^\infty \lambda^{q-\omega-1}\nu(E_\lambda)\,d\lambda \int\limits_{g\geq\tau} g^\omega\,d\mu.$$

Делая замену переменной $\tau = 2^{-\alpha-2}\|g \mid L_p(X,\mu)\|^{-\alpha}\lambda^{1+\alpha}$ и меняя порядок интегрирования, приходим к оценке

$$\big\|f^{\#}_{l/\gamma,\mu} \mid L_q(E,\nu)\big\|^q \leq C_0\|g \mid L_p(X,\mu)\|^{\frac{\alpha(q-\omega)}{1+\alpha}} \int\limits_X g^\omega g^{\frac{q-\omega}{1+\alpha}}\,d\mu. \tag{9}$$

Учитывая равенства

$$\frac{\gamma}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{l_1}-\frac{1}{s},\quad \frac{\alpha}{1+\alpha}=p\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{l_1}\right),\quad 1+\alpha=\frac{q}{p\gamma},\quad \omega=(1-\gamma)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{l_1}\right)^{-1},$$

несложно пересчитать степени, появившиеся в неравенстве (9). Получаем

$$\frac{\alpha(q-\omega)}{1+\alpha}=p\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{l_1}\right)q-p\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{l_1}\right)\omega=pq\left(\frac{1}{p}-\frac{\gamma}{q}\right)-p(1-\gamma)$$
$$=q-p\gamma-p+p\gamma=q-p$$

и

$$\omega+\frac{q-\omega}{1+\alpha}=\frac{\alpha\omega+q}{1+\alpha}=\frac{\alpha\omega}{1+\alpha}+\frac{q}{1+\alpha}=p(1-\gamma)+p\gamma=p.$$

Таким образом, из неравенства (9) следует оценка

$$\left\|f^{\#}_{l/\gamma,\mu}\mid L_q(E,\nu)\right\|^q\le C_0\|g\mid L_p(X,\mu)\|^{q-p}\int\limits_X g^p\,d\mu=C_0\|g\mid L_p(X,\mu)\|^q,$$

завершающая доказательство теоремы.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *уточненная максимальная функция* $f^{\#}_{l,\nu}$ *относительно меры* ν *принадлежит соответствующему пространству* $L_q(E,\nu)$.

Это следует из вложения $L_{s,p}(X,d,\mu)$ в $L_{l,q}(E,d,\nu)$ и теоремы 3 работы [1], в которой получено описание рассматриваемых нами пространств в терминах уточненных максимальных функций для случая мер, удовлетворяющих условию удвоения.

Следствие 2. *Пусть* $1<p<\infty$, $f\in L_{s,p}(X,d,\mu)$, $\max(0,1-p/s)<\gamma\le 1$, $E\subset X$ *и мера* ν *такова, что для произвольного шара с центром в точке* $x\in E=\operatorname{supp}\nu$ *выполняется оценка* $C^{-1}(\mu(B(x,r)))^\gamma\le\nu(B(x,r))\le C(\mu(B(x,r)))^\gamma$.

1. *Если* $p<s$, *то* $f\in L_q(E,\nu)$, где $\frac{\gamma}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{s}$, *и*

$$\|f-f_E\mid L_q(E,\nu)\|\le C_0\|f\mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|.$$

2. *Если* $p=s$, *то существуют постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что*

$$\int\limits_X\exp\left(C_1\frac{|f-f_{E,\nu}|}{\|f\mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|}\right)d\nu\le C_2.$$

3. *Если* $p>s$, *то*

$$\|f-f_E\mid L_\infty(E,\nu)\|\le C_3\|f\mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|.$$

Результат получается последовательным применением теоремы 1 данной работы и теоремы 2 работы [1].

Отметим, что в случае мер, удовлетворяющих условию удвоения, вложения в пространства Лебега можно получить более простым методом, чем это сделано в теореме 2 работы [1] для случая произвольных мер.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$ и $f \in L_{s,p}(X,d,\mu)$.*

1. *Если $p < s$, то $f \in L_q(\mu)$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$, и*

$$\|f - f_X \mid L_q(X,\mu)\| \le C_0 \|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|.$$

2. *Если $p = s$, то $f \in BMO(X,d,\mu)$.*
3. *Если $p > s$, то*

$$\|f - f_X \mid L_\infty(X,\mu)\| \le C_1 \|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|.$$

Доказательство. Применяя к неравенству Пуанкаре (2) неравенство Гёльдера, получаем

$$\fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\, d\mu \le (\mu(B(x,r)))^{1/s} \fint_{B(x,r)} g\, d\mu$$
$$\le (\mu(B(x,r)))^{1/s-1/p} \|g \mid L_p(X,\mu)\| = (\mu(B(x,r)))^{-1/q} \|g \mid L_p(X,\mu)\|. \quad (10)$$

Если $x \in X$ — точка Лебега функции f, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие шары $B(x,\varrho)$ и $B(x,R)$, что $|f(x) - f_{B(x,\varrho)}| < \varepsilon$, $|f_X - f_{B(x,R)}| < \varepsilon$ и $\mu(X) \le 2\mu(B(x,R))$. Согласно предложению 1 работы [1] существует конечная убывающая система шаров $\{B_k = B(x,r_k)\}$, $k = 0,1,\dots k_0$, такая, что $B_0 = B(x,R), B_{k_0} = B(x,\varrho)$, $\mu(B_k) \le C_d^2 \mu(B_{k+1})$ и $\mu(B_k) \le C_d^{1-k}\mu(B_0)$.

Оценим отклонение значения функции f от среднего значения функции на всем пространстве X:

$$|f(x) - f_X| \le 2\varepsilon + \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_{B_k} - f_{B_{k+1}}| \le 2\varepsilon + \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{\mu(B_k)}{\mu(B_{k+1})} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\, d\mu$$
$$\le 2\varepsilon + C_d^2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\, d\mu. \quad (11)$$

1. Пусть $p < s$. Рассмотрим множество

$$E = \left\{x \in X \mid f^{\#}_{s,\mu}(x) \le \|g \mid L_p(X,\mu)\|\right\}$$

и положим $\varepsilon < \|g \mid L_p(\mu)\|$. Тогда из неравенства (11) получаем

$$|f(x) - f_X| \le 2\|g \mid L_p(\mu)\| + \sum_{k=0}^{k_0-1} (\mu(B_k))^{1/s} \left(\mu(B_k)^{-1/s} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\, d\mu\right)$$
$$\le 2\|g \mid L_p(X,\mu)\| + C_2 f^{\#}_{s,\mu}(x) \mu(X)^{1/s} \sum_{k=0}^{k_0-1} C_d^{-k/s} \le C_3 \|g \mid L_p(X,\mu)\|.$$

Следовательно,

$$\int_E |f(x) - f_X|^q\, d\mu \le C_4 \|g \mid L_p(X,\mu)\|^q.$$

Пусть $\lambda = f^{\#}_{s,\mu}(x) > \|g \mid L_p(X,\mu)\|$. Положим $\varepsilon < \lambda^{p/q} \|g \mid L_p(X,\mu)\|^{1-p/q}$ и выберем номер $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C_d^m \le \lambda^p \|g \mid L_p(X,\mu)\|^{-p} \le C_d^{m+1}.$$

Разобьем сумму в неравенстве (11) на две части и оценим каждую из них.

Учитывая неравенство (10), получаем

$$\sum_{k=0}^{m} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\,d\mu \le \sum_{k=0}^{m} (\mu(B_k))^{-1/q} \|g \mid L_p(X,\mu)\|$$
$$\le C_5(\mu(X))^{-1/q}\|g \mid L_p(X,\mu)\| \sum_{k=0}^{m} C_d^{k/q} \le C_6 \|g \mid L_p(X,\mu)\| C_d^{m/q}$$
$$\le C_6 \lambda^{p/q} \|g \mid L_p(X,\mu)\|^{1-p/q}.$$

Вторую сумму оценим иным способом:

$$\sum_{k=m+1}^{k_0} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\,d\mu \le \sum_{k=m+1}^{k_0} (\mu(B_k))^{1/s} \Bigg(\mu(B_k)^{-1/s} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\,d\mu \Bigg)$$
$$\le C_7 \lambda \mu(X)^{1/s} \sum_{k=m+1}^{k_0} C_d^{-k/s} \le C\lambda C_d^{-m/s} \le C_8 \lambda^{1-p/s} \|g \mid L_p(X,\mu)\|^{p/s}$$
$$= C_9 \lambda^{p/q} \|g \mid L_p(X,\mu)\|^{1-p/q}.$$

Таким образом, при $x \in X \setminus E$ выполняется оценка

$$|f(x) - f_X|^q \le C' \|g \mid L_p(X,\mu)\|^{p-q} \big(f^{\#}_{s,\mu}(x)\big)^p,$$

следовательно,

$$\int_{X\setminus E} |f(x) - f_X|^q\,d\mu \le C_0' \|g \mid L_p(\mu)\|^q,$$

и окончательно

$$\|f - f_X \mid L_q(X,\mu)\| \le C_0 \|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|.$$

2. При $p = s$ из неравенства (10) непосредственно следует, что

$$\fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\,d\mu \le \|g \mid L_p(X,\mu)\|.$$

3. При $p > s$, обозначая $\alpha = \frac{1}{s} - \frac{1}{p} > 0$ и выбирая $\varepsilon < \|g \mid L_p(X,\mu)\|$, из неравенств (10) и (11) получаем

$$|f(x) - f_X| \le 2\varepsilon + C_d^2 \sum_{k=0}^{k_0-1} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\,d\mu \le 2\varepsilon + \sum_{k=0}^{k_0} (\mu(B_k))^{1/s-1/p} \|g \mid L_p(X,\mu)\|$$

$$\le 2\|g \mid L_p(X,\mu)\| + C''(\mu(X))^{\alpha} \|g \mid L_p(X,\mu)\| \sum_{k=0}^{\infty} C_d^{-\alpha k} \le C_1 \|f \mid L_{s,p}(X,d,\mu)\|,$$

что и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов А. С.* Теоремы вложения для одного класса функций соболевского типа на метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 452–465.
2. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
3. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincare // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. N 688. P. 1–101.
4. *Strömberg J.-O., Torchinsky A.* Weighted Hardy spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1989. (Lecture Notes in Math.; 1381).
5. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 30 октября 2003 г.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru