Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.54

СОБОЛЕВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

Ю. Г. Решетняк

Аннотация: Доказывается эквивалентность определений классов Соболева отображений области арифметического n-мерного пространства в метрическое пространство, данных в работах [1] и [2].

Ключевые слова: соболевские классы функций, обобщенные производные, функционал энергии, функции, удовлетворяющие условию Липшица, сепарабельные полные метрические пространства, функции со значениями в метрических пространствах.

Предлагаемая вниманию читателя статья является продолжением работы автора [1], в которой было предложено новое определение класса W_p^1 отображений области пространства $\mathbb{R}^n$ в метрическое пространство. Ранее этот вопрос изучался Н. Кореваароми Р. Шоэном в работе [2]. Определение, данное этими авторами, основано на соображениях, отличных от предложенных в [1]. В [2] определяется также понятие отображения класса BV.

Цель настоящей статьи — доказать эквивалентность определений классов W_p^1 отображений области пространства $\mathbb{R}^n$ в метрическое пространство, данных в [1, 2].

Пусть Ω — область, т. е. связное открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{X}$ — метрическое пространство, d — метрика этого пространства. Говорят, что функция $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом* M, если для любых $x, y \in \mathbb{X}$ выполняется неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq Md(x, y)$. Наименьшее из таких чисел M будем обозначать символом $\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}}$.

Согласно определению, данному в работе [1], отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу $W_p^1(\Omega, \mathbb{X})$, если для всякой функции $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию Липшица, суперпозиция $\varphi \circ u$ есть функция класса $W_p^1(\Omega, \mathbb{R})$, причем существует функция $w \in L_p(\Omega)$ такая, что для любой функции φ, удовлетворяющей условию Липшица для почти всех $x \in \Omega$, выполняется неравенство $|\nabla[\varphi \circ u](x)| \leq \|\varphi\|_{\mathrm{Lip}} w(x)$. (Для классов $BV(\Omega)$ аналогичный подход предложен Л. Амбросио [3].)

Определение класса $W_p^1(\Omega, \mathbb{X})$, данное в [2], в простейшей своей форме может быть представлено следующим образом. Пусть дано отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — полное метрическое пространство. Зададим произвольно число $h > 0$. Для $x \in \Omega$ полагаем

$$e_p(u, x, h) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{|y-x|<h} \left\{ \frac{d[u(x), u(y)]}{h} \right\}^p dy,$$

если шар радиуса h с центром в точке x содержится в множестве Ω. Если это условие не выполняется, то положим $e_h(x) = 0$. Пусть

$$E_p(u,\Omega) = \sup_{f \in \mathscr{C}_0(\Omega), 0 \le f \le 1} \left\{ \limsup_{h \to 0} \int\limits_{\Omega} e_p(u,x,h) f(x)\, dx \right\}.$$

Согласно [2] функция $u : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу $W_p^1(\Omega, \mathbb{X})$, если величина $E_p(u,\Omega)$ конечна.

В работе [2] рассматривается общий случай отображений риманова пространства в метрическое пространство $\mathbb{X}$. Функционал $E_p(u,\Omega)$ при этом определяется несколько более сложным образом, о чем будет сказано далее.

В заключительной части статьи показывается, как распространить определение классов W_p^1 отображений со значениями в метрическом пространстве на случай, когда область определения отображения есть риманово пространство.

1. Обозначения и некоторые вспомогательные сведения

Всюду далее $\mathbb{R}^n$ означает n-мерное арифметическое евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ обозначается символом $\langle x, y \rangle$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ через $|x|$ обозначаем длину вектора x.

Областью в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем называть всякое связное открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть A — непустое множество в метрическом пространстве $\mathbb{M}$ с метрикой ρ. Для точки $z \in \mathbb{M}$ положим $\rho(z,A) = \inf\limits_{x \in A} \rho(z,x)$. Величина $\rho(z,A)$ называется *расстоянием от точки z до множества A*. Функция $z \to \rho(z,A)$ непрерывна, причем для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{M}$ выполняется неравенство $|\rho(z_1,A) - \rho(z_2,A)| \le d(z_1,z_2)$.

Для $h > 0$ полагаем

$$U_h(A) = \{t \in \mathbb{X} \mid \rho(t,A) < h\}, \quad \overline{U}_h(A) = \{t \in \mathbb{X} \mid \rho(t,A) \le h\};$$

множество $U_h(A)$ открыто, $\overline{U}_h(A)$ замкнуто.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\delta_\Omega(x) = \rho(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Пусть $h > 0$. Символом Ω_h обозначим множество тех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $\delta_\Omega(x) > h$. Точная верхняя граница значений $h > 0$, для которых $\Omega_h \ne \varnothing$, обозначается символом $\delta(\Omega)$. Для всякого компактного множества $A \subset \Omega$ найдется число $h_0 > 0$ такое, что $A \subset \Omega_h$ при $0 < h < h_0$.

Будем говорить, что $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $p \ge 1$, если u измерима и для всякого компактного множества $A \subset \Omega$ конечна величина

$$\|u\|_{L_p(A)} = \left\{ \int\limits_A |u(x)|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

В пространстве $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ вводится отношение порядка $\prec$ путем соглашения: $u_1 \prec u_2$, если $u_1(x) \le u_2(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция класса $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что ее носитель $\mathrm{Supp}(\theta)$ содержится в шаре $B(0,1)$ пространства $\mathbb{R}^n$ и выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(x)\, dx = 1.$$

Зададим произвольно h такое, что $0 < h < \delta(\Omega)$. Для $x \in \Omega_h$ положим

$$u_h(x) = \int\limits_{|\tau|\le 1} u(x + h\tau)\theta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{h^n} \int\limits_{B(x,h)} u(y)\theta\left(\frac{y-x}{h}\right) dy.$$

Функция u_h принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty(\Omega_h)$. Будем говорить, что u_h — *соболевское усреднение функции* $u(x)$.

Пусть даны метрическое пространство $\mathbb{X}$ и область Ω пространства $\mathbb{R}^n$. Для отображения $u : \Omega \to \mathbb{X}$ и точки $z \in \mathbb{X}$ символом $[u]_z$ обозначается вещественная функция $x \in \Omega \mapsto d[u(x), z]$.

Будем говорить, что *отображение* $u : \Omega \to \mathbb{X}$ — *функция класса* $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\infty > p \ge 1$, если для всякой точки $z \in \mathbb{X}$ вещественная функция $f = [u]_z$ принадлежит классу $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Понятия обобщенной в смысле С. Л. Соболева производной вещественной функции n переменных и класса $W_p^1(\Omega)$ далее предполагаются известными. (Из огромной массы публикаций, посвященных этим вопросам, отметим здесь только монографии [3–5].)

Согласно определению, данному в работе [1], отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$, если для всякого $z \in \mathbb{X}$ вещественная функция $[u]_z$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и существует функция $w \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что при любом $z \in \mathbb{X}$ для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|\nabla u_z(x)| \le w(x). \tag{1.1}$$

Если пространство $\mathbb{X}$ сепарабельно, то, как показано в [1], для всякой функции $u : \Omega \to \mathbb{X}$ класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$ среди функций w, для которых выполняется неравенство (1.1), существует функция $w_0 \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, наименьшая в смысле отношения порядка $\prec$, определенного выше. Эта функция в [1] обозначается символом $|\nabla u(x)|$.

Теперь приведем определение класса $W_p^1(\Omega)$, данное в работе [2]. Класс $W_p^1(\Omega)$ в смысле определения из [2] временно будем обозначать через $KS_p(\Omega)$. Символом $\overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)$ обозначим совокупность всех непрерывных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, финитных относительно области Ω и таких, что $0 \le f(x) \le 1$ для всех $x \in \Omega$.

Пусть дано отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — полное метрическое пространство. Метрика пространства $\mathbb{X}$ далее обозначается символом d. Предположим, что $u \in L_p(\Omega)$. Для $h > 0$ и $x \in \Omega$ полагаем

$$e_p(u, x, h) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{|y-x|<h} \left\{\frac{d[u(x), u(y)]}{h}\right\}^p dy, \tag{1.2}$$

если $B(x, h) \subset \Omega$. Если последнее включение не имеет места, то полагаем $e_p(x, u, h) = 0$. Конечность интеграла (1.2) следует из того, что $u \in L_p(\Omega)$. Пусть

$$E_p(u, \Omega) = \sup_{f \in \overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)} \left\{\limsup_{h\to 0} \int\limits_\Omega e_p(u, x, h) f(x)\,dx\right\}.$$

Функция $u : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу $KS_p(\Omega, \mathbb{X})$, если величина $E_p(u, \Omega)$ конечна.

2. Включение $\boldsymbol{KS_p(\Omega,\mathbb{X})} \subset \boldsymbol{W_p^1(\Omega,\mathbb{X})}$

Наша цель — доказать, что классы $KS_p(\Omega,\mathbb{X})$ и $W_p^1(\Omega,\mathbb{X})$ совпадают. Сначала докажем включение, указанное в заголовке этого раздела статьи.

Предположим, что функция $u:\Omega\to\mathbb{R}$ класса $L_1(\Omega)$ такова, что для любого h, удовлетворяющего условию $0<h<\delta(\Omega)$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega_h} |\nabla u_h(x)|^p\,dx \le M^p,$$

где M — постоянная, не зависящая от h. Тогда в силу классических результатов С. Л. Соболева [3] функция u принадлежит классу $W_p^1(\Omega)$, причем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p\,dx \le M^p.$$

Следующая лемма показывает, что всякая вещественная функция $u:\Omega\to\mathbb{R}$, принадлежащая классу $KS_p(\Omega)$, является функцией класса $W_p^1(\Omega)$ в смысле определения С. Л. Соболева. Данное утверждение доказано также и в работе [2]. Мы приводим доказательство полностью, поскольку некоторые его детали используются позднее.

Лемма 1. *Пусть дано число $p>1$. Тогда если функция $u:\Omega\to\mathbb{R}$ класса $L_p(\Omega)$ принадлежит классу $KS_p(\Omega)$, то u также функция класса $W_p^1(\Omega)$, причем имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p\,dx \le c^p E_p(u,\Omega), \tag{2.1}$$

где $c=\mathrm{const}$, $0<c<\infty$.

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Для $f\in\overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)$ имеем $0\le f(x)\le 1$ при всех $x\in\Omega$. Пусть $h_0>0$ таково, что для любого $x\in\mathrm{Supp}(f)$ выполняется неравенство $\delta(x)\ge h_0$.

Зададим произвольно h такое, что $0<h<h_0$.

Пусть $\eta>0$ таково, что $h+2\eta<h_0$. Возьмем произвольно точку $x\in\Omega_h$. В рассматриваемом случае $\mathbb{X}=\mathbb{R}$ и $d(u,v)=|u-v|$. Вводя в интеграле (1.2) новую переменную интегрирования $\tau=\frac{y-x}{h}$, получим

$$e_p(u,x,h)=\int\limits_{|\tau|<1}\left|\frac{u(x+h\tau)-u(x)}{h}\right|^p d\tau.$$

Заметим, что $e_p(u,x,h)$ при фиксированных $x\in\Omega$ и $h\in(0,h_0)$, удовлетворяющих условию $\delta(x)>h$, есть выпуклый относительно u функционал.

Для произвольного вектора $\sigma\in\mathbb{R}^n$ пусть $s_\sigma u$ — функция $x\mapsto u(x+\sigma)$.

Для всякой точки $x\in\mathrm{Supp}(f)$ и любых векторов $\sigma,\tau\in\mathbb{R}^n$ таких, что $|\sigma|<1$ и $|\tau|<1$, точка $x+\eta\sigma+h\tau$ принадлежит области Ω. В силу выпуклости функционала $e_p(u,x,h)$ справедливо неравенство

$$e_p\Bigg(\int\limits_{|\sigma|<1} s_{\eta\sigma}u(x)\theta(\sigma)\,d\sigma,x,h\Bigg)\le\int\limits_{|\sigma|<1} e_p(s_{\eta\sigma}u,x,h)\theta(\sigma)\,d\sigma.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{|\sigma|<1} s_{\eta\sigma}u(x)\theta(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{|\sigma|<1} u(x+\eta\sigma)\theta(\sigma)\,d\sigma = u_\eta(x)$$

и, значит,

$$e_p(u_\eta, x, h) \leq \int\limits_{|\sigma|<1} e_p(s_{\eta\sigma}u, x, h)\theta(\sigma)\,d\sigma.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $f(x)$ и проинтегрировав его почленно, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} e_p(u_\eta, x, h)f(x)\,dx \leq \int\limits_{\Omega}\Bigg\{\int\limits_{|\sigma|<1} e_p(s_{\eta\sigma}u, x, h)\theta(\sigma)\,d\sigma\Bigg\}f(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{|\sigma|<1}\Bigg\{\int\limits_{\Omega} e_p(s_{\eta\sigma}u, x, h)f(x)\,dx\Bigg\}\theta(\sigma)\,d\sigma. \quad (2.2)$$

Так как, очевидно, $e_p(s_{\eta\sigma}u, x, h) = e_p(u, x+\eta\sigma, h)$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} e_p(s_{\eta\sigma}u, x, h)f(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} e_p(x+\eta\sigma, u, h)f(x)\,dx.$$

В интеграле справа введем новую переменную интегрирования $y = x+\eta\sigma$. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega} e_p(s_{\eta\sigma}u, x, h)f(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} e_p(u, y, h)f(y-\eta\sigma)\,dy. \quad (2.3)$$

Мы воспользовались здесь тем, что функция $\tilde{f} : y \to f(y-h\sigma)$ принадлежит классу $\overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)$, так как $h < h_0$ и $|\sigma| < 1$. Умножив обе части равенства (2.3) на $\theta(\sigma)$ и проинтегрировав полученное равенство по переменной σ, после очевидных преобразований будем иметь

$$\int\limits_{|\sigma|<1}\Bigg\{\int\limits_{\Omega} e_p(s_{\eta\sigma}u, x, h)f(x)\,dx\Bigg\}\theta(\sigma)\,d\sigma$$

$$= \int\limits_{\Omega} e_p(u, x, h)\Bigg\{\int\limits_{|\sigma|<1} f(x-\eta\sigma)\theta(\sigma)\,d\sigma\Bigg\}\,dx = \int\limits_{\Omega} e_p(u, x, h)f_\eta(x)\,dx.$$

В силу неравенства (2.2) из доказанного следует, что

$$\int\limits_{\Omega} e_p(u_\eta, x, h)f(x)\,dx \leq \int\limits_{\Omega} e_p(u, x, h)\tilde{f}_\eta(x)dx. \quad (2.4)$$

Функция $\tilde{f}_\eta$, очевидно, принадлежит классу $\overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)$.

Пусть $A = \mathrm{Supp}(f)$. Положим также $\overline{V} = \overline{U}_\eta(A)$. Тогда $\mathrm{Supp}(f_\eta) \subset \overline{V} \subset \Omega$ и функция u_η принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$ на множестве $\overline{V}$. Если $x \in \overline{V}$, то для любого вектора τ такого, что $|\tau| < 1$, точка $x + h\tau$ принадлежит Ω. При $h \to 0$ имеем

$$\frac{u_\eta(x+h\tau) - u_\eta(x)}{h} \to \langle \nabla u_\eta(x), \tau\rangle.$$

При этом сходимость равномерна при $x \in \overline{V}$ и $|\tau| \leq 1$. Переходя в неравенстве (2.4) к пределу при $h \to 0$, получим, что

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \int\limits_{|\tau|<1} |\langle \nabla u_\eta(x), \tau \rangle|^p \, d\tau \right\} f(x)\, dx \leq \limsup_{h \to 0} \int\limits_{\Omega} e_p(u, x, h) f_\eta(x)\, dx. \tag{2.5}$$

Так как $f_\eta \in \overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)$, имеем

$$\limsup_{h \to 0} \int\limits_{\Omega} e_p(u, x, h) f_\eta(x) dx \leq E_p(u, \Omega). \tag{2.6}$$

Для $z \in \mathbb{R}^n$ положим

$$N(z) = \left\{ \int\limits_{|\tau|<1} |\langle z, \tau \rangle|^p \, d\tau \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{2.7}$$

Для всякого ортогонального преобразования P пространства $\mathbb{R}^n$ справедливо равенство $N(Pz) = N(z)$, откуда следует, что $N(z) = \frac{|z|}{c}$, где $c = \text{const}$, $0 < c < \infty$.

В силу неравенств (2.5), (2.6) из доказанного получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_\eta(x)|^p f(x)\, dx \leq c^p E_p(u, \Omega).$$

Отсюда, ввиду произвольности функции $f \in \overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)$ вытекает, что при $0 < \eta < h_0$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_\eta(x)|^p \, dx \leq c^p E_p(u, \Omega).$$

С учетом сделанного выше замечания относительно функций соболевских классов отсюда следует, что $u \in W_p^1(\Omega)$, причем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx \leq c^p E_p(u, \Omega).$$

Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{X}$ — полное метрическое пространство с метрикой d и Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда если для отображения $u : \Omega \to \mathbb{X}$ величина $E_p(u, \Omega)$ конечна, то u принадлежит классу $W_p^1(\Omega, \mathbb{X})$. При этом выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx \leq c^p E_p(u, \Omega),$$

где c — постоянная леммы 1.

Доказательство. Предположим, что отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Зададим произвольно точку $z \in \mathbb{X}$. Для всякого $x \in \Omega$ будет $[u]_z(x) = d[u(x), z]$. Для любого $x \in \Omega_h$ и любого вектора τ такого, что $|\tau| < 1$ и точка $x + h\tau$ принадлежит области Ω, имеем

$$|[u]_z(x + h\tau) - [u]_z(x)| = |d[u(x + h\tau), z] - d[u(x), z]| \leq d[u(x + h\tau), u(x)].$$

Возведя обе части последнего неравенства в степень p, получим, что для любого $z \in \mathbb{X}$ для всех $x \in \Omega$ будет $e_p([u]_z, x, h) \leq e_p(u, x, h)$. Отсюда

$$\limsup_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} e_p([u]_z, x, h) f(x)\, dx \leq \limsup_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} e_p(u, x, h) f(x)\, dx$$

при всех $x \in \Omega$ для любого $z \in \mathbb{X}$. Это позволяет заключить, что

$$E_p([u]_z, \Omega) \leq E_p(u, \Omega).$$

В частности, величина $E_p([u]_z, \Omega)$ конечна для любой точки $z \in \mathbb{X}$.

Вещественная функция $[u]_z$ удовлетворяет, таким образом, условиям леммы 1. Отсюда следует, что $[u]_z \in W_p^1(\Omega)$.

В силу теоремы работы [7] (см. также [6]) для почти всех $x \in \Omega$ функция

$$\tau \mapsto \frac{[u]_z(x + h\tau) - [u]_z(x)}{h}$$

переменной $\tau \in B(0,1)$ при $h \to 0$ сходится в пространстве $W_p^1(B(0,1))$ к функции $\langle \nabla [u]_z(x), \tau\rangle$. Для всякого $x \in \Omega$, для которого это имеет место, функция $\frac{[u]_z(x+h\tau)-[u]_z(x)}{h}$ переменной τ сходится к функции $\langle \nabla [u]_z(x), \tau\rangle$ также и в пространстве $L_p(B(0,1))$. Таким образом, для почти всех $x \in \Omega$ при $h \to 0$ имеем

$$\int\limits_{|\tau|<1} \left| \frac{[u]_z(x + h\tau) - [u]_z(x)}{h} - \langle \nabla [u]_z(x), \tau\rangle \right|^p d\tau \to 0. \tag{2.8}$$

Пусть $(t_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ — строго убывающая числовая последовательность такая, что $t_1 < \delta(\Omega)$, и $\lim\limits_{\nu\to\infty} t_\nu = 0$. Пусть $\Omega_\nu = \{x \in \Omega \mid \delta(x) > t_\nu\}$, $\overline{\Omega}_\nu$ — замыкание Ω_ν. Пусть f_ν — непрерывная функция такая, что $f_\nu(x) = 0$ при $x \notin \Omega_{\nu+1}$, $f_\nu(x) = 1$ при $x \in \overline{\Omega}_\nu$ и $0 \leq f_\nu(x) \leq 1$ для всех x. Так $\overline{\Omega}_\nu \subset \Omega_{\nu+1}$, такая функция f_ν существует. Пусть

$$L_\nu = \limsup_{h\to 0} \int\limits_{\Omega_{\nu+1}} e_p(u, x, h) f_\nu(x)\, dx.$$

Величина L_ν конечна, $L_\nu \leq E_p(u, \Omega)$ при каждом ν. Определим последовательность значений $h_\nu > 0$, $\nu = i = 1, 2, \dots$, такую, что $t_\nu \geq h_\nu$ при каждом ν и при $0 < h \leq h_\nu$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega_{\nu+1}} e_p(u, x, h) f_\nu(x)\, dx < L_\nu + \frac{1}{\nu}.$$

При каждом ν для $h \leq h_\nu$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_\nu} e_p(u, x, h)\, dx \leq \int\limits_{\Omega_{\nu+1}} e_p(u, x, h) f_\nu(x)\, dx < L_\nu + \frac{1}{\nu}.$$

Для произвольного $x \in \Omega$ положим

$$w(x) = \liminf_{\nu\to\infty} \{e_p(u, x, h_\nu)\}^{\frac{1}{p}}.$$

Функция w измерима и интегрируема в степени p по множеству Ω. Действительно, для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ при $\mu \geq \nu$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_\nu} e_p(u,x,h_\mu)\,dx \leq \int\limits_{\Omega_\mu} e_p(u,x,h_\mu)\,dx \leq L + \frac{1}{\mu}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\mu \to \infty$, получим, что

$$\int\limits_{\Omega_\nu} [w(x)]^p\,dx = \int\limits_{\Omega_\nu} \liminf_{\mu\to\infty} e_p(u,x,h_\mu)\,dx \leq L.$$

Последовательность множеств $(\Omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ возрастающая. Объединение множеств Ω_ν есть Ω, и, следовательно, функция w^p интегрируема по области Ω. При этом

$$\int\limits_{\Omega_\nu} [w(x)]^p\,dx \leq L = E_p(u,\Omega).$$

Для всякого $x \in \Omega$, для которого выполняется соотношение (2.8), существует предел

$$\lim_{h\to 0} e_p([u]_z,x,h) = \int\limits_{|\tau|<1} |\langle \nabla[u]_z(x),\tau\rangle|^p\,d\tau = c^p|\nabla[u]_z(x)|^p,$$

где $c = \mathrm{const} > 0$. Равенство $N(z) = \frac{|z|}{c}$, где $N(z)$ определено равенством (2.7), позволяет заключить, что для каждого x, для которого предел $\lim\limits_{h\to 0} e_p([u]_z,x,h)$ существует, выполняется неравенство

$$c^p|\nabla[u]_z(x)|^p \leq \liminf_{\nu\to\infty} e_p(u,x,h_\nu)$$

и, значит, $|\nabla[u]_z(x)| \leq w(x)$.

Получаем в итоге, что при каждом $z \in \mathbb{X}$ функция $[u]_z : x \mapsto d[u(x),z]$ принадлежит классу $W_p^1(\Omega)$ и существует интегрируемая функция $w(x) \equiv \frac{1}{c}v(x)$ такая, что $c^p|\nabla u_z(x)| \leq w(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Согласно определению это и означает, что u — отображение класса $W_p^1(\Omega,\mathbb{X})$. Теорема доказана. $\square$

3. Включение $W_p^1(\Omega,\mathbb{X}) \subset KS_p(\Omega,\mathbb{X})$

Теперь докажем, что всякое отображение класса $W_p^1(\Omega,\mathbb{X})$ принадлежит классу $KS_p(\Omega,\mathbb{X})$.

Далее, как и выше, $\theta(\tau)$ означает неотрицательную функцию класса $\mathscr{C}^\infty$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ такую, что $\mathrm{Supp}(\theta) \subset B(0,1)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(\tau)\,d\tau = 1.$$

Кроме того, мы будем предполагать, что функция θ сферически симметрична, т. е. существует функция $\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ такая, что для всякого $\tau \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $\theta(\tau) = \psi(|\tau|)$. При этом предположении, в частности, выполняется равенство $\theta(-\tau) = \theta(\tau)$.

Пусть φ — функция класса $\mathscr{C}_0(\Omega)$ и $A = \mathrm{Supp}(\varphi)$. Положим $h_0 = \inf\limits_{x\in A} \delta(x)$. Пусть φ_η — соболевское усреднение функции φ с параметром усреднения η.

Если $0 < \eta < h_0$, то $\varphi_\eta \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. При этом носитель функции φ_η содержится в множестве $\overline{U}_\eta(A) \subset \Omega$.

Предположим, что $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — произвольная функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}$. Тогда для всякого $\eta < h_0$ функция u_η определена и непрерывна на множестве $\overline{U}_\eta \subset U_{h_0}$ и выполняется равенство

$$\int\limits_A u_\eta(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\overline{U}_\eta(A)} u(x)\varphi_\eta(x)\,dx, \tag{3.1}$$

справедливость которого легко устанавливается с помощью теоремы Фубини. При этом используется условие $\theta(-\tau) = \theta(\tau)$.

Лемма 2. *Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ и u — вещественная функция класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда для любого h такого, что $0 < h < \delta(x)$, найдется множество E_h такое, что его мера Лебега равна нулю и для всех $x \in \Omega_h \setminus E_h$ выполняется неравенство*

$$e_p(u,x,h) = \int\limits_{|\tau|<1} \left|\frac{u(x+h\tau)-u(x)}{h}\right| r^p\,d\tau \le \int\limits_{|\tau|<1} |\nabla u(x+h\tau)|^p \frac{K(\tau)\,d\tau}{|\tau|^{n-1}},$$

где

$$K(\tau) = \begin{cases} \frac{1-|\tau|^{n+p-1}}{(n+p-1)} & \textit{при } |\tau| \le 1, \\ 0 & \textit{при } |\tau| > 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $u \in \mathscr{C}^\infty$. Тогда

$$\left|\frac{u(x+h\tau)-u(x)}{h}\right|^p = \left|\int\limits_0^1 \langle \nabla u(x+\zeta h\tau), \tau\rangle\,d\zeta\right|^p \le \int\limits_0^1 |\nabla u(x+\zeta h\tau)|^p |\tau|^p\,d\zeta.$$

Положим $\lambda(\tau) = |\nabla u(x+\tau)|^p$. В этих обозначениях имеем

$$e_p(u,x,h) \le \int\limits_{|\tau|<1} \left[\int\limits_0^1 \lambda(h\zeta\tau)\,d\zeta\right] |\tau|^p\,d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования и производя затем во внутреннем интеграле замену переменной интегрирования по формуле $\sigma = \frac{\tau}{\zeta}$, после очевидных преобразований получим

$$e_p(u,x,h) \le \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{|\tau|<1} \lambda(h\zeta\tau)|\tau|^p\,d\tau\right) d\zeta = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\zeta^{n+p}} \int\limits_{|\sigma|<\zeta} \lambda(h\sigma)|\sigma|^p\,d\sigma\right) d\zeta. \tag{3.3}$$

Положим $\chi(\sigma,\zeta) = 0$ при $|\sigma| \ge \zeta$ и $\chi(\sigma,\zeta) = 1$ в остальных случаях. Тогда неравенство (3.3) может быть переписано следующим образом:

$$e_p(u,x,h) \le \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\zeta^{n+p}} \int\limits_{B(0,1)} \lambda(h\sigma)|\sigma|^p \chi(\sigma,\zeta)d\sigma\right) d\zeta.$$

Меняя порядок интегрирования еще раз, приходим к оценке

$$e_p(u,x,h) \leq \int\limits_{B(0,1)} \lambda(h\sigma)\sigma|^p \left(\int\limits_0^1 \chi(\sigma,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+p}}\right) d\sigma$$

$$= \int\limits_{B(0,1)} \lambda(h\sigma)\left(\int\limits_{|\sigma|}^1 \frac{d\zeta}{\zeta^{n+p}}\right) d\sigma = \int\limits_{B(0,1)} \lambda(h\sigma)\frac{1-|\sigma|^{n+p-1}}{(n+p-1)|\sigma|^{n-1}}\, d\sigma.$$

Для случая, когда $u \in \mathscr{C}^\infty$, лемма доказана.

Пусть u — функция класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Предположим, что $0 < \eta < \delta(\Omega)$. Пусть $u_\eta(x)$ — соболевское усреднение функции u с параметром усреднения η. Функция u_η определена на множестве Ω_η и принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$. При $\eta \to 0$ функции u_η сходятся в $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ к функции u, а их градиенты сходятся в том же смысле к градиенту функции u. Это означает, что если $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$, то для всякого компактного множества $A \subset \Omega$ найдется $\eta_0 > 0$ такое, что при $0 < \eta < \eta_0$ функции u_η и ∇u_η на множестве A определены и непрерывны, и при $\eta \to 0$ выполняются соотношения

$$\|u - u_\eta\|_{L_p(A)} = \left\{\int\limits_A |u(x) - u_\eta(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

$$\|\nabla u - \nabla u_\eta\|_{L_p(A)} = \left\{\int\limits_K |\nabla u(x) - \nabla u_\eta(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Пусть h таково, что $0 < h < \delta(\Omega)$. Зададим произвольно неотрицательную функцию $\varphi \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, не обращающуюся тождественно в нуль и такую, что $A = \mathrm{Supp}(\varphi) \subset \Omega_h$. При $0 < \eta < h$ функция u_η определена на множестве Ω_h. Для всякой точки $x \in A$ имеем $\delta(x) > h$. Так как функция $\delta(x)$ непрерывна, а множество A компактно, отсюда следует, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для каждой точки $x \in A$ выполняется неравенство $\delta(x) \geq h + \varepsilon$.

Пусть $0 < \eta < \varepsilon$. Тогда величина $u_\eta(x)$ определена для всех $x \in A$. В силу доказанного выше для любого $x \in A$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{|\tau|<1} \left|\frac{u_\eta(x+h\tau) - u_\eta(x)}{h}\right|^p d\tau \leq \int\limits_{|\tau|<1} |\nabla u_\eta(x+h\tau)|^p \frac{K(\tau)\, d\tau}{|\tau|^{n-1}}.$$

Умножив обе части этого неравенства на $\varphi(x)$, после интегрирования получим

$$\int\limits_{\Omega_h}\int\limits_{|\tau|<1} \left|\frac{u_\eta(x+h\tau) - u_\eta(x)}{h}\right|^p d\tau\varphi(x)dx \leq \int\limits_{\Omega_h}\int\limits_{|\tau|<1} |\nabla u_\eta(x+h\tau)|^p \frac{K(\tau)\, d\tau}{|\tau|^{n-1}}\varphi(x)\, dx. \tag{3.4}$$

(Для $x \notin A$ все интегралы в этом неравенстве считаются равными нулю.)

Докажем, что неравенство (3.4) остается верным, если заменить в нем u_η на u.

Рассмотрим сначала второй интеграл в формуле (3.4). Меняя в нем порядок интегрирования, приходим к интегралу

$$I(\eta) = \int\limits_{|\tau|<1} \left\{\int\limits_{\Omega_h} |\nabla u_\eta(x+h\tau)|^p \varphi(x)\, dx\right\} \frac{K(\tau)\, d\tau}{|\tau|^{n-1}}. \tag{3.5}$$

Во внутреннем интеграле в правой части формулы (3.5) произведем замену переменной, полагая $x + h\tau = z$. Тогда

$$I(\eta) = \int\limits_{|\tau|<1} \left\{ \int\limits_{\Omega} |\nabla u_\eta(z)|^p \varphi(z - h\tau)\, dx \right\} \frac{K(\tau)\, d\tau}{|\tau|^{n-1}}.$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, найдем, что

$$I(\eta) = \int\limits_{\Omega} \left\{ \int\limits_{|\tau|<1} \varphi(z - h\tau) K(\tau) \frac{d\tau}{|\tau|^{n-1}} \right\} |\nabla u_\eta(x)|^p\, dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla u_\eta(x)|^p \Phi(x)\, dx,$$

где

$$\Phi(x) = \int\limits_{|\tau|<1} \varphi(x - h\tau) \frac{K(\tau)\, d\tau}{|\tau|^{n-1}}.$$

Если точка $x \in \mathbb{R}^n$ такова, что $\rho(x, A) \geq h$, то $\varphi(x - h\tau) = 0$ для любого τ с $|\tau| < 1$ и, значит, для этого x величина $\Phi(x)$ обращается в нуль. Так как φ непрерывна, то, очевидно, и Φ непрерывна. Множество $\overline{U}_h(A)$ компактно и содержится в области Ω, и $\Phi(x) = 0$ для любого $x \notin \overline{U}_h(A)$, так что $\Phi \in \mathscr{C}_0(\Omega)$. В частности, функция Φ ограниченная. Поскольку функции ∇u_η сходятся к ∇u в $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, из доказанного следует, что при $\eta \to 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{\eta\to 0} I(\eta) = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{\Omega} |\nabla u_\eta(x)|^p \Phi(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \Phi(x)\, dx.$$

Подставив в последний интеграл выражение для $\Phi(x)$ и проделав в обратном порядке те преобразования, которые ранее были выполнены для интеграла $I(\eta)$, в результате получим

$$\lim_{\eta\to 0} \int\limits_{|\tau|<1} \left\{ \int\limits_{\Omega_h} |\nabla u_\eta(x + h\tau)|^p \varphi(x)\, dx \right\} \frac{K(\tau)\, d\tau}{|\tau|^{n-1}}$$
$$= \int\limits_{|\tau|<1} \left\{ \int\limits_{\Omega_h} |\nabla u(x + h\tau)|^p \varphi(x)\, dx \right\} \frac{K(\tau)\, d\tau}{|\tau|^{n-1}}.$$

Так как $u_\eta(x) \to u(x)$ при $\eta \to 0$ для почти всех $x \in \Omega$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega_h} \left[\int\limits_{|\tau|<1} \left| \frac{u(x + h\tau) - u(x)}{h} \right|^p d\tau \right] \varphi(x)\, dx$$
$$\leq \liminf_{\eta\to 0} \int\limits_{\Omega_h} \left[\int\limits_{|\tau|<1} \left| \frac{u_\eta(x + h\tau) - u_\eta(x)}{h} \right|^p d\tau \right] \varphi(x)\, dx.$$

Из доказанного вытекает, что неравенство (3.4) при $\eta \to 0$ в пределе переходит в неравенство

$$\int\limits_{\Omega_h} \int\limits_{|\tau|<1} \left| \frac{u(x + h\tau) - u(x)}{h} \right|^p d\tau \varphi(x) dx \leq \int\limits_{\Omega_h} \int\limits_{|\tau|<1} |\nabla u(x + h\tau)|^p \frac{K(\tau)\, d\tau}{|\tau|^{n-1}} \varphi(x)\, dx. \tag{3.6}$$

Неотрицательная функция $\varphi \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ здесь выбрана произвольно, следовательно,

$$\int\limits_{|\tau|<1} \left|\frac{u(x+h\tau)-u(x)}{h}\right|^p d\tau \leq \int\limits_{|\tau|<1} |\nabla u(x+h\tau)|^p \frac{K(\tau)\,d\tau}{|\tau|^{n-1}}\,dx$$

для почти всех $x \in \Omega_h$. Лемма доказана. $\square$

Теперь результат леммы 2 перенесем на случай функций со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Далее d означает метрику этого пространства и относительно $\mathbb{X}$ предполагается, что оно удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, указанным в формулировке леммы 3.

Лемма 3. *Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{X}$ — сепарабельное полное метрическое пространство, $u : \Omega \to \mathbb{X}$ — отображение класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}$. Тогда найдется множество $E \subset \Omega$, мера которого равна нулю, такое, что для всякого $x \in \Omega \setminus E$ для любого h, удовлетворяющего условиям $0 < h < \delta(x)$, выполняется неравенство*

$$\int\limits_{|y-x|<h} \frac{\{d[u(y),u(x)]\}^p}{h^{n+p}}\,dy \leq \frac{1}{h} \int\limits_{|y-x|<h} \big|\nabla u(y)\big|^p \frac{K\left(\frac{y-x}{h}\right)\,dy}{|y-x|^{n-1}}, \tag{3.7}$$

где функция K определяется равенством (3.2).

Доказательство. Воспользуемся следующим известным результатом, доказательство которого может быть найдено, например, в [8, гл. II, лемма 5.3, с. 152]). Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и $g : \Omega \to \mathbb{R}$ — функции класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $h = \max\{f, g\}$, т. е. $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ для всякого x, для которого величины $f(x)$ и $g(x)$ определены. Пусть Ω_f — множество тех $x \in \Omega$, для которых $h(x) = f(x)$, а Ω_g — множество тех $x \in \Omega$, для которых $h(x) = g(x)$. Функция h принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, и для почти всех $x \in \Omega_f$ имеем $\nabla h(x) = \nabla f(x)$, а для почти всех $x \in \Omega_g$ справедливо равенство $\nabla h(x) = \nabla g(x)$. Отсюда следует, что для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|\nabla h(x)| \leq \max\{|\nabla f(x)|, |\nabla g(x)|\}. \tag{3.8}$$

Пусть Q — счетное всюду плотное в $\mathbb{X}$ множество пространства $\mathbb{X}$. Для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $[u]_z$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. При этом $|\nabla[u]_z(x)| \leq |\nabla u(x)|$.

Фиксируем произвольное значение h такое, что $0 < h < \delta(\Omega)$. Согласно лемме 2 для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство

$$\int\limits_{|\tau|<1} \left|\frac{[u]_z(x+h\tau)-[u]_z(x)}{h}\right|^p d\tau \leq \int\limits_{|\tau|<1} |\nabla[u]_z(x+h\tau)|^p \frac{K(\tau)d\tau}{|\tau|^{n-1}}.$$

В каждом из интегралов введем новую переменную интегрирования $y = x + h\tau$. Принимая во внимание, что $|\nabla[u]_z(y)| \leq |\nabla u(y)|$, получим

$$\frac{1}{h^n} \int\limits_{|y-x|<h} \left|\frac{[u]_z(y)-[u]_z(x)}{h}\right|^p d\tau \leq \frac{1}{h} \int\limits_{|y-x|<h} |\nabla u(y)|^p \frac{K\left(\frac{y-x|}{h}\right)d\tau}{|\tau|^{n-1}}. \tag{3.9}$$

Пусть E^h_z — множество тех $x \in \Omega$, для которых неравенство (3.9) не выполняется, E^h_z — множество меры нуль. Пусть E^h — объединение всех тех множеств E^h_z, для которых $z \in Q$. Так как множество Q счетно, то E^h является множеством меры нуль.

Пусть $x \in \Omega \setminus E^h$. Тогда для данного x неравенство (3.9) верно для всех $z \in Q$. При всяком $z \in \mathbb{X}$ имеем

$$|[u]_z(y) - [u]_z(x)| = |d[u(y), z] - d[u(x), z]| \leq d[u(y), u(x)].$$

Зададим произвольно последовательность z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, точек множества Q такую, что $z_\nu \to u(x)$ при $\nu \to \infty$. Тогда

$$\lim_{\nu\to\infty} |d[u(y), z_\nu] - d[u(x), z_\nu]| = |d[u(y), u(x)] - d[u(x), u(x)]| = d[u(y), u(x)].$$

Так как $|[u]_{z_\nu}(y) - [u]_{z_\nu}(x)| \leq d[u(y), u(x)]$ при каждом ν, из доказанного следует, что при $\nu \to \infty$ будем иметь

$$\frac{1}{h^n} \int\limits_{|y-x|<h} \left| \frac{|[u]_{z_\nu}(y) - [u]_{z_\nu}(x)|}{h} \right|^p dy \to \frac{1}{h^n} \int\limits_{|y-x|<h} \left(\frac{d[u(y), u(x)]}{h} \right)^p dy.$$

Переходя в неравенстве (3.9) к пределу при $\nu \to \infty$, получим

$$\frac{1}{h^n} \int\limits_{|y-x|<h} \frac{\{d[u(y), u(x)]\}^p}{h^p}\, dy \leq \frac{1}{h} \int\limits_{|y-x|<h} |\nabla u(y)|^p \frac{K\left(\frac{y-x}{h}\right) dy}{|y-x|^{n-1}}. \tag{3.10}$$

Для завершения доказательства осталось показать, что найдется множество меры нуль $E \subset \Omega$ такое, что если $x \in \Omega$ не принадлежит E, то неравенство (3.10) выполняется для всякого $h > 0$ такого, что $\delta(x) > h$.

Пусть H есть счетное всюду плотное подмножество промежутка $(0, \infty)$. Для всякого $h \in H$ по доказанному найдется множество $E^h \subset \Omega_h$ меры нуль такое, что если $x \in \Omega_h$ не принадлежит множеству E^h, то справедливо неравенство (3.10). Обозначим символом E объединение множеств E^h, отвечающих различным значениям $h \in H$. Так как H счетно, то E — множество меры нуль.

Пусть $x \notin E$. Тогда согласно определению множества E неравенство (3.10) верно для любого $h \in H$, удовлетворяющего условиям $0 < h < \delta(x)$. Положим

$$\Phi(x, h) = \int\limits_{|y-x|<h} \left\{ \frac{d[u(y), u(x)]}{h} \right\}^p dy,$$

$$\Psi(x, h) = \int\limits_{|y-x|<h} |\nabla u(y)|^p \frac{K\left(\frac{y-x}{h}\right) dy}{|y-x|^{n-1}},$$

$$\Sigma(x, h) = \int\limits_{|y-x|<h} |\nabla u(y)|^p\, dy.$$

Для данного x величины $\Phi(x, h)$ и $\Sigma(x, h)$ зависят от $h \in (0, \delta(\Omega))$ непрерывным образом, так как подынтегральные выражения в представлении $\Phi(x, h)$ и $\Sigma(x, h)$ принадлежат классу $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Пусть $0 < h_1 < h_2 < \delta(\Omega)$. Тогда имеет место равенство $\Psi(x, h_2) = \Psi(x, h_1) + R(x, h_1, h_2)$, где

$$R(x, h_1, h_2) = \int\limits_{h_1<|y-x|<h_2} |\nabla u(y)|^p \frac{K\left(\frac{y-x}{h}\right) dy}{|y-x|^{n-1}}.$$

Функция $K(\tau)$ ограничена и непрерывна. Пусть $|K(\tau)| \leq M = \text{const} < \infty$. Тогда

$$|R(x, h_1, h_2)| \leq \frac{M}{h_1^{n-1}} \{\Sigma(x, h_2] - \Sigma[x, h_1]\}.$$

Величина $R(x, h_1, h_2)$, как следует из этой оценки, для любых h_1 и h_2, удовлетворяющих условиям $0 < h_1 < h_2 < \delta(\Omega)$, конечна. Отсюда следует, что если $\Psi(x, h) = \infty$ хотя бы для одного значения $h = h_0$, то $\Psi(x, h) = \infty$ для всех $h \in (0, \delta(x)$. Если же $\Psi(x, h)$ конечно для всех таких значений h, то из указанной оценки следует, что $\Psi(x, h)$ как функция переменной h на промежутке $(0, \delta(x))$ непрерывна.

Неравенство (3.10) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{1}{h^{n+p}} \Phi(x, h) \leq \frac{1}{h} \Psi(x, h). \tag{3.11}$$

Если $\Psi(x, h) = \infty$ хотя бы для одного значения h, то $\Psi(x, h) = \infty$ для всех $h \in (0, \delta(x))$ и в этом случае неравенство (3.10), очевидно, выполнено. Если же $\Psi(x, h)$ конечно, то левая и правая части неравенства (3.11) представляют собой функции, непрерывные относительно h. Неравенства (3.11) верны для всех h из некоторого счетного всюду плотного в промежутке $(0, \delta(x))$ множества. Отсюда следует, что они верны для всех $h \in (0, \delta(x))$.

Лемма доказана полностью. □

Теорема 2. *Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{X}$ — сепарабельное полное метрическое пространство. Всякое отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$ класса $W^1_{p,\text{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$ принадлежит классу $KS_p(\Omega, \mathbb{X})$.*

Доказательство. Пусть $u : \Omega \to \mathbb{X}$ — отображение класса $W^1_{p,\text{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$. Зададим произвольно функцию $f \in \overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)$. Пусть $A = \text{Supp}(f)$. Множество A компактно, $\Omega \supset A$, и, значит, найдется $h_0 > 0$ такое, что для всякого $x \in A$ выполняется неравенство $\delta(x) \geq h_0$. Согласно лемме 3 найдется множество E меры нуль такое, что для всякого $x \notin E$ для любого $h \in (0, \delta(x))$ верно неравенство (3.7).

Зададим произвольно функцию $\varphi \in \overline{\mathscr{C}}_0(\Omega)$. Умножив обе части неравенства (3.7) на $\varphi(x)$ и проинтегрировав полученное неравенство почленно, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \left[\int\limits_{|y-x|<h} \frac{\{d[u(y), u(x)]\}^p}{h^{n+p}} \, dy \right] \varphi(x) \, dx \\ \leq \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{h} \int\limits_{|y-x|<h} |\nabla u(y)|^p \frac{K\left(\frac{y-x}{h}\right) dy}{|y-x|^{n-1}} \right] \varphi(x) \, dx.$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части последнего неравенства, символом $I(\varphi)$. Во внутреннем интеграле справа в качестве области интегрирования можно взять все множество Ω, так как функция $K\left(\frac{y-x}{h}\right)$ обращается в нуль при $|y - x| > h$. Меняя порядок интегрирования, получим

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u(y)|^p \left[\frac{1}{h} \int\limits_{\Omega} \varphi(x) \frac{K\left(\frac{y-x}{h}\right)}{|y-x|^{n-1}} \, dx \right] dy.$$

В последнем интеграле произведем замену переменной интегрирования, полагая $\tau = \frac{y-x}{h}$. Имеем

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u(y)|^p \left[\int\limits_{\Omega} \varphi(y - h\tau) \frac{K(\tau)}{|\tau|^{n-1}} \, d\tau \right] dy.$$

Во внутреннем интеграле в качестве области интегрирования можно взять шар $B(0,1) = \{\tau \in \mathbb{R}^n \mid |\tau| < 1\}$. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega} \left[\int\limits_{|y-x|<h} \frac{\{d[u(y), u(x)]\}^p}{h^{n+p}} \, dy \right] \varphi(x) \, dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla u(y)|^p \left[\int\limits_{|\tau|<1} \varphi(y - h\tau) \frac{K(\tau)}{|\tau|^{n-1}} \, d\tau \right] dy.$$

Положим

$$M = \int\limits_{|\tau|<1} \frac{K(\tau)}{|\tau|^{n-1}} \, d\tau.$$

Величина M конечна, так как функция K ограничена и непрерывна при $\tau \neq 0$, а функция $\tau \mapsto \frac{1}{|\tau|^{n-1}}$ имеет в нуле интегрируемую особенность. Пусть $\omega(\varepsilon)$ — модуль непрерывности функции φ. Тогда

$$\left| \int\limits_{|\tau|<1} \varphi(y - h\tau) \frac{K(\tau)}{|\tau|^{n-1}} \, d\tau - M\varphi(y) \right| \leq M\omega(h).$$

Отсюда

$$\limsup_{h \to 0} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{|y-x|<h} \frac{\{d[u(y), u(x)]\}^p}{h^{n+p}} \varphi(x) \, dy dx \leq M \int\limits_{\Omega} |\nabla u(y)|^p \varphi(y) \, dy. \tag{3.12}$$

Функция $\varphi \in \overline{\mathscr{C}}_0$ была выбрана произвольно. Имеем $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ для всех $x \in \Omega$, откуда следует, что правая часть неравенства $(F1)$ не превосходит

$$M \int\limits_{\Omega} \left| \nabla u(y) \right|^p dy \tag{3.13}$$

и, значит, точная верхняя граница выражения, стоящего в правой части неравенства (3.12), т. е. $E_p(u, \Omega)$, не превосходит величину (3.13). В частности, $E_p(u, \Omega)$ конечна. Следовательно, данное отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу $KS_p(\Omega, \mathbb{X})$. Теорема доказана. □

Следствие. *Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякого полного сепарабельного метрического пространства X классы $KS_p(\Omega, \mathbb{X})$ и $W_p^1(\Omega, \mathbb{X})$ совпадают.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
2. *Korevaar N. J., Schoen R. M.* Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets // Comm. Anal. Geom. 1993. V. 1, N 3–4. P. 561–659.
3. *Ambrosio L.* Metric space valued functions of bounded variation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1990. V. 17, N 3. P. 439–478.
4. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

5. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
6. *Goldshtein V. M., Reshetnyak Yu. G.* Quasiconformal mappings and Sobolev spaces. Dordrecht; Boston; London: Kluwer, 1990.
7. *Решетняк Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170, № 6. С. 1273–1275.
8. *Reshetnyak Yu. G.* Space mappings with bounded distortion. Providence: Amer. Math. Soc., 1989.

Статья поступила 24 декабря 2003 г.

Решетняк Юрий Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Reshetnyak@math.nsc.ru