Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Г. В. Алексеев

Аннотация: Рассматривается краевая задача для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости при неоднородных краевых условиях для скорости и электромагнитного поля. Исследуется глобальная разрешимость указанной задачи и устанавливаются достаточные условия единственности ее решения. Формулируются задачи управления для рассматриваемой модели магнитной гидродинамики, исследуется их разрешимость, приводятся и анализируются системы оптимальности как для произвольного, так и конкретного функционалов качества.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, вязкая жидкость, неоднородные краевые задачи, задачи управления, системы оптимальности.

§ 1. Введение. Постановка краевой задачи

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей Γ. Рассмотрим в области Ω краевую задачу

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{1.1}$$

$$\nu_m\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{E} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_m\mathbf{J}_0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0,\ \nu_m = \frac{1}{\sigma}, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = q, \quad \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma, \tag{1.3}$$

описывающую течение в Ω вязкой несжимаемой проводящей жидкости единичной плотности. Здесь $\mathbf{u}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — векторы скорости и напряженностей электрического и магнитного полей, p — давление, ν и σ — коэффициенты вязкости и проводимости, μ — магнитная проницаемость, $\mathbf{g}, q$ и $\mathbf{k}$ — заданные на Γ функции, $\mathbf{J}_0$ — вектор плотности тока внешних электродвижущих сил.

Исследованию разрешимости краевых задач для уравнений магнитной гидродинамики (МГД) при различных типах краевых условий посвящено, начиная с пионерских работ [1] и [2], достаточно большое количество работ (см., например, [3–10] и ссылки там). Для случая вязкой жидкости, когда краевые условия для скорости и электромагнитного поля однородны, доказана глобальная разрешимость стационарных краевых задач, причем полученные в этом случае результаты близки к соответствующим результатам для системы уравнений Навье — Стокса. В случае, когда краевые условия неоднородны, разрешимость соответствующей краевой задачи удается доказать лишь «в малом», т. е. при условии малости определенных параметров задачи. В частности, локальная разрешимость задачи (1.1)–(1.3), рассматриваемой в односвязной области Ω со связной границей Г, вытекает из [6]. В настоящей работе доказывается глобальная разрешимость неоднородной краевой задачи (1.1)–(1.3) и исследуются задачи управления для рассматриваемой модели магнитной гидродинамики. Доказательство разрешимости основывается на использовании специального продолжения внутрь Ω граничной функции $\mathbf{g}$ в (1.3), предложенного в [11, 12]. Используя указанное продолжение, докажем разрешимость задачи (1.1)–(1.3) и выведем точные априорные оценки норм решения, непрерывно зависящие от норм исходных данных. Далее сформулируем общую задачу управления и на основе методики работ [13–15] исследуем ее разрешимость, выведем и проанализируем системы оптимальности как для произвольного, так и конкретных функционалов качества. Для краткости ниже на задачу (1.1)–(1.3) будем ссылаться как на задачу 1.

Обозначим через $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, пространство Соболева; $H^0(D) = L^2(D)$, где D означает Ω либо Γ. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$. Нормы в пространствах $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$ и их векторных аналогах обозначаем через $\|\cdot\|_{s,\Omega} \equiv \|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$. При $s=0$ полагаем $\|\psi\|_{0,\Omega} = \|\psi\|$, $\|\psi\|_{0,\Gamma} = \|\psi\|_\Gamma$. Скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ и $\mathbf{L}^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma)$ и $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ либо через $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Через $\|\cdot\|_1$ и $|\cdot|_1$ обозначаем норму и полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Отношение двойственности между пространством X и двойственным к нему X^* обозначается через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ либо просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Предполагая, что $\Gamma \in C^{0,1}$, обозначим через $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ оператор следа. Будем использовать следующие неравенства, вытекающие из теоремы вложения и непрерывности оператора следа:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le C_\Omega \|\mathbf{v}\|_1,\ \|\gamma\mathbf{v}\|_{1/2,\Gamma} \le C_\Gamma \|\mathbf{v}\|_1\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad C_\Omega = \mathrm{const}, C_\Gamma = \mathrm{const}. \tag{1.4}$$

Пусть $\mathscr{D}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций, $H_0^1(\Omega)$ — пополнение $\mathscr{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega) \equiv \mathrm{Ker}\,\gamma$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \big(H_0^1(\Omega)\big)^3$, $\mathbf{V} = \big\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\big\}$, $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p,1) = 0\}$, $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma) = \{q \in H^{1/2}(\Gamma) : (q,1)_\Gamma = 0\}$, $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$, $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$, $\mathbf{H}^0(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{h} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) : \mathrm{rot}\,\mathbf{h} = 0\}$, $\mathbf{H}(\Delta;\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \Delta\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$. Через $\mathbf{H}_0(\mathrm{rot};\Omega)$ (либо $\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega)$) обозначим пополнение $\mathscr{D}(\Omega)^3$ в $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ (либо в $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$).

Любой вектор $\mathbf{q}$, определенный на границе Γ области Ω, может быть представлен в виде суммы нормальной и тангенциальной компонент $\mathbf{q}_n$ и $\mathbf{q}_T$. Если $\mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, то компоненты $\mathbf{q}_n$ и $\mathbf{q}_T$ определяются формулами $\mathbf{q}_n = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} \equiv q_n\mathbf{n}$, $\mathbf{q}_T = \mathbf{q} - \mathbf{q}_n \equiv (\mathbf{n}\times\mathbf{q})\times\mathbf{n}$. Здесь скаляр $q_n = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$ — нормальная компонента векторного поля $\mathbf{q}$. Ясно, что $\mathbf{q}_T = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{n}\times\mathbf{q} = 0$. Через $\mathbf{H}_T^1(\Omega)$, $\mathbf{L}_T^2(\Gamma)$ и $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ обозначим подпространства пространств $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, состоящие из тангенциальных на Γ векторов с нормами, индуцируемыми соответственно из $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Наряду с замкнутыми (по норме $\|\cdot\|_1$) подпространствами $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}_T^1$ пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$ будем рассматривать двойственные к ним относительно $\mathbf{L}^2(\Omega)$ пространства $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ и $\mathbf{H}_T^{-1}(\Omega)$ с нормами $\|\cdot\|_{-1}$ и $\|\cdot\|_{-1,T}$, определяемыми соотношениями

$$\|\mathbf{f}\|_{-1} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{|\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|_1}, \quad \|\mathbf{f}\|_{-1,T} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_T^1(\Omega)} \frac{|\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|_1}.$$

Отождествляя, как обычно, пространство $\mathbf{L}^2(\Omega)$ с его двойственным, имеем плотные и непрерывные вложения

$$\mathbf{H}^1_0(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbf{H}^1_T(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}_T(\Omega).$$

Через $H^{-1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma)$ обозначим двойственные к пространствам $H^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma)$ относительно соответственно пространств $L^2(\Gamma)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{L}^2_T(\Gamma)$.

Справедливы следующие формулы Грина [16]:

$$(\mathbf{u}, \operatorname{grad}\varphi) + (\operatorname{div}\mathbf{u}, \varphi) = \langle \gamma_n \mathbf{u}, \varphi\rangle_\Gamma \equiv \langle \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, \varphi\rangle_\Gamma \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega),\ \varphi \in H^1(\Omega), \tag{1.5}$$

$$(\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{w}) - (\operatorname{rot}\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \langle \gamma_\tau \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle_\Gamma \equiv \langle \mathbf{u}\times\mathbf{n}, \mathbf{w}\rangle_\Gamma \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot};\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \tag{1.6}$$

$$(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \langle \partial\mathbf{u}/\partial n, \mathbf{v}\rangle_\Gamma \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Delta;\Omega),\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \tag{1.7}$$

В формулах (1.5)–(1.7) $\gamma_n : \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ и $\gamma_\tau : \mathbf{H}(\operatorname{rot};\Omega) \to \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ — операторы нормального либо тангенциального следа соответственно, $\partial/\partial n$: $\mathbf{H}^1(\Delta;\Omega) \to \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ — оператор векторной нормальной компоненты, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ обозначает отношение двойственности между $H^{-1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ либо $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$.

Введем теперь следующие дополнительные предположения на область Ω:

(i) Ω — ограниченная конечно-связная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из p_0+1 связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p_0}$, где Γ_0 — граница неограниченной компоненты множества $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$, и существуют поверхности $\Sigma_i \in C^2$, $i = 1, 2, \ldots, q_0$, такие, что $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ при $i \neq j$, причем множество $\Omega = \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{q_0} \Sigma_i$ односвязно и липшицево;

(ii) $\Gamma \in C^{1,1}$.

Отметим, что числа q_0 и p_0, входящие в условие (i), являются топологическими характеристиками области Ω, называемыми первым и вторым числами Бетти. При этом $p_0 = 0$ тогда и только тогда, когда граница Γ связна, т. е. $\Gamma = \Gamma_0$, а $q_0 = 0$ тогда и только тогда, когда Ω односвязна. Введем два подпространства гармонических в Ω векторов $\mathscr{H}(e) \subset \mathbf{H}_0(\operatorname{rot};\Omega)$ и $\mathscr{H}(m) \subset \mathbf{H}_0(\operatorname{div};\Omega)$, состоящие соответственно из всех решений однородных задач электрического либо магнитного типа, имеющих вид

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}\times\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma;$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Здесь $\mathscr{H}(e)$ и $\mathscr{H}(m)$ конечномерны [17], причем $\dim\mathscr{H}(e) = p_0$, $\dim\mathscr{H}(m) = q_0$, где числа p_0 и q_0 введены в (i). Через $\mathbf{S}^\perp$ обозначим ортогональное дополнение в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ любого множества $\mathbf{S} \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$. Положим $\mathbf{X}_T = \mathbf{H}(\operatorname{rot};\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\operatorname{div};\Omega) \cap \mathscr{H}(m)^\perp$, $\mathbf{V}_T = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_T : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$. Известно [16, 17], что при выполнении обоих условий (i) и (ii) $\mathbf{X}_T = \mathbf{H}^1_T(\Omega) \cap \mathscr{H}(m)^\perp$. Каждое из пространств $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{H}^1_T(\Omega)$, $\mathbf{X}_T$ и $\mathbf{V}_T$ является гильбертовым по норме $\|\cdot\|_1$.

Введем билинейные формы $a_0 : \mathbf{H}^1(\Omega)^2 \to \mathbb{R}$ и $a_1 : \mathbf{H}(\operatorname{rot};\Omega)^2 \to \mathbb{R}$, где

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\, d\Omega, \quad a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} d\Omega. \tag{1.8}$$

Из неравенства Фридрихса — Пуанкаре и [17] вытекает следующий результат.

Лемма 1.1. *При выполнении условия* (i) *существуют константы* $C_1 = C_1(\Omega)$ *и* $\alpha_i = \alpha_i(\Omega) > 0$, $i = 0, 1$, *с которыми выполняются неравенства*

$$|a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \le \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad a_0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge \alpha_0 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{1.9}$$

$$|a_1(\mathbf{H}, \boldsymbol{\Psi})| \le C_1^2 \|\mathbf{H}\|_1 \|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \ \forall (\mathbf{H}, \boldsymbol{\Psi}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2, \quad a_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}) \ge \alpha_1 \|\boldsymbol{\Psi}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{\Psi} \in \mathbf{V}_T. \tag{1.10}$$

Справедливо ортогональное разложение пространства $\mathbf{L}^2(\Omega)$ [17]:

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \operatorname{rot} \mathbf{V}_T \oplus \nabla H_0^1(\Omega) \oplus \mathscr{H}(e). \tag{1.11}$$

Оно означает, что любой вектор $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ допускает единственное ортогональное разложение вида $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{q} + \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{e}$. Здесь векторный потенциал $\mathbf{q} \in \mathbf{V}_T$, скалярный потенциал $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ и гармонический вектор $\mathbf{e} \in \mathscr{H}(e)$ однозначно определяются по $\mathbf{u}$.

Введем в дополнение к формам a_0 и a_1 в (1.8) билинейную форму $b : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ и трилинейные формы c и $c_1 : \mathbf{H}^1(\Omega)^3 \to \mathbb{R}$, действующие по формулам

$$\begin{gathered} b(\mathbf{v}, r) = -\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v} r d\Omega, \quad c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega [(\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v}] \cdot \mathbf{w}\, d\Omega, \\ c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) = \int_\Omega (\operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{u}\, d\Omega. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Введенные в (1.12) формы непрерывны, причем

$$\begin{gathered} c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ с } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \end{gathered} \tag{1.13}$$

$$c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) = \int_\Omega (\mathbf{H} \times \mathbf{u}) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} d\Omega, \ c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) = -c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{u}, \mathbf{H}) \ \forall (\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^3, \tag{1.14}$$

$$|c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \le \tilde{\gamma} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le \gamma \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1 \le \gamma' \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, \tag{1.15}$$

$$|c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u})| \le \gamma_1 \|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \|\mathbf{H}\|_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le \gamma_1' \|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \|\mathbf{H}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1, \quad \gamma_1' = C_\Omega \gamma_1. \tag{1.16}$$

Здесь $\tilde{\gamma}$ и γ_1 — константы, зависящие от Ω, $\gamma = C_\Omega \tilde{\gamma}$, $\gamma' = C_\Omega^2 \tilde{\gamma}$. Форма b в (1.12) удовлетворяет к тому же на паре $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ inf-sup условию с константой $\beta > 0$ [16]:

$$\inf_{r \in L_0^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, r)}{\|\mathbf{v}\|_1 \|r\|} \ge \beta. \tag{1.17}$$

Наряду с пространствами $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{H}_T^1(\Omega)$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_T$ главную роль ниже будут играть пространства $\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) = \{\mathbf{H} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathscr{H}(m)^\perp : \operatorname{div} \mathbf{H} = 0\}$, $H = \mathbf{H}^1(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, $H_{0T} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T$, $V_{0T} = \mathbf{V} \times \mathbf{V}_T \subset H_{0T} \subset H$, а также двойственные к H_{0T} и V_{0T} пространства H_{0T}^* и V_{0T}^*. Пространства H, H_{0T} и V_{0T} гильбертовы с гильбертовой нормой $(\mathbf{u}, \mathbf{H}) \to \|(\mathbf{u}, \mathbf{H})\|_1 \equiv \left(\|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{H}\|_1^2\right)^{1/2}$. Элементами пространства H_{0T}^* (либо V_{0T}^*) являются пары $(\mathbf{f}, \mathbf{q}) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{V}_T^*$ (либо $(\mathbf{f}, \mathbf{q}) \in \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}_T^*$), причем действие элемента $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{q}) \in H_{0T}^*$ на элементе $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in H_{0T}$ определяется соотношением

$$\langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}) \rangle_{H_{0T}^* \times H_{0T}} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\Psi} \rangle_{\mathbf{V}_T^* \times \mathbf{V}_T}.$$

Ясно, что $\|\mathbf{F}\|_{H_{0T}^*} \equiv \|(\mathbf{f},\mathbf{q})\|_{H_{0T}^*} \leq \|\mathbf{f}\|_{-1} + \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{V}_T^*}$. Подобным образом определяется значение $\langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})\rangle_{V_{0T}^* \times V_{0T}}$ для $\mathbf{F} = (\mathbf{f},\mathbf{q}) \in V_{0T}^*$ и выводится оценка $\|\mathbf{F}\|_{V_{0T}^*} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^*} + \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{V}_T^*}$.

По аналогии с [16, с. 59] введем линейные операторы $S_{\mathbf{V}} \in \mathscr{L}(\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{V}^*)$ и $S_{V_{0T}} \in \mathscr{L}(H_{0T}^*, V_{0T}^*)$, действующие по формулам

$$\langle S_{\mathbf{V}}\mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega),\ \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

$$\langle S_{V_{0T}}\mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})\rangle = \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})\rangle \quad \forall \mathbf{F} \in H_{0T}^*,\ (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in V_{0T}.$$

Ясно, что $\|S_{\mathbf{V}}\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^*} \leq \|\mathbf{f}\|_{-1}$, $\|S_{V_{0T}^*}\mathbf{F}\|_{V_{0T}^*} \leq \|\mathbf{F}\|_{H_{0T}^*}$. С учетом этого ниже вместо $S_{\mathbf{V}}\mathbf{f}$ и $S_{V_{0T}}\mathbf{F}$ будем писать просто $\mathbf{f}$ или $\mathbf{F}$ там, где это не приведет к путанице.

Положим $a((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) \equiv \nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \nu_m a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi})$. В силу леммы 1.1 форма a непрерывна на $H \times H$ и коэрцитивна на подпространстве H_{0T} пространства H, причем

$$a((\mathbf{v},\mathbf{\Psi}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) \geq \lambda_* \big(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\mathbf{\Psi}\|_1^2\big) \quad \forall (\mathbf{v},\mathbf{\Psi}) \in H_{0T},\ \lambda_* = \min(\alpha_0\nu, \alpha_1\nu_m). \tag{1.18}$$

Пусть $\hat{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ — произвольная билинейная непрерывная форма, удовлетворяющая следующему условию «δ-малости» на подпространстве $V_{0T} \subset H$:

$$|\hat{a}((\mathbf{v},\mathbf{\Psi}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi}))| \leq \delta\big(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\mathbf{\Psi}\|_1^2\big) \quad \forall (\mathbf{v},\mathbf{\Psi}) \in V_{0T},\ 0 \leq \delta < \lambda_*. \tag{1.19}$$

Рассмотрим для произвольного элемента $\mathbf{F} \in V_{0T}^*$ вариационную задачу, заключающуюся в нахождении такого вектора $(\mathbf{u},\mathbf{H}) \in V_{0T}$, что

$$a((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) + \hat{a}((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) = \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\rangle_{V_{0T}^* \times V_{0T}} \quad \forall (\mathbf{v},\mathbf{\Psi}) \in V_{0T}. \tag{1.20}$$

Следующий результат вытекает из (1.18), (1.19) и теоремы Лакса — Мильграма.

Лемма 1.2. *Пусть при выполнении условий* (i), (ii) *непрерывные на* $H \times H$ *формы* a *и* $\hat{a}$ *удовлетворяют* (1.18) *и* (1.19). *Тогда*

1) *билинейная форма* $a + \hat{a}$ *непрерывна и коэрцитивна на* V_{0T} *с константой коэрцитивности* $\lambda_* - \delta$;

2) *задача* (1.20) *для любого элемента* $\mathbf{F} \in V_{0T}^*$ *имеет единственное решение* $(\mathbf{u},\mathbf{H}) \in V_{0T}$, *и справедлива оценка* $\|(\mathbf{u},\mathbf{H})\|_1 \leq (\lambda_* - \delta)^{-1}\|\mathbf{F}\|_{V_{0T}^*}$.

Форму $b : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, введенную в (1.12), формально можно рассматривать как билинейную форму $\tilde{b} : H_{0T} \times L_0^2(\Omega)$, определенную соотношением

$$\tilde{b}((\mathbf{v},\mathbf{\Psi}), r) = b(\mathbf{v}, r) \equiv -\int\limits_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) r \, d\Omega.$$

Из выполнения inf-sup условия (1.17) для формы b на $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ вытекает выполнение inf-sup условия для формы $\tilde{b}$ на $H_{0T} \times L_0^2(\Omega)$, причем с той же константой $\beta > 0$, так что

$$\inf_{r \in L_0^2(\Omega)} \sup_{(\mathbf{v},\mathbf{\Psi}) \in H_{0T}} \frac{\tilde{b}((\mathbf{v},\mathbf{\Psi}), r)}{\|(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\|_1 \|r\|} \geq \beta. \tag{1.21}$$

При описании граничных значений электрического поля нам потребуется понятие поверхностной дивергенции. Введем его, следуя [18]. Пусть $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma)$ — произвольная функция. Определим для φ такую функцию $u = u_\varphi \in H^2(\Omega)$, что $\gamma u = \varphi$, и поставим в соответствие функции u вектор $\mathbf{n} \times \nabla u|_\Gamma \times \mathbf{n} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$. Можно показать, что так построенный вектор не зависит от выбора функции $u = u_\varphi$. Поэтому данная процедура определяет линейный непрерывный оператор $\nabla_\Gamma : H^{3/2}(\Gamma) \to \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, называемый *оператором поверхностного градиента.* Сопряженный к ∇_Γ оператор $\operatorname{div}_\Gamma : \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-3/2}(\Gamma)$, действующий для $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma)$, $\mathbf{\Psi} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ по формуле

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{\Psi}, \varphi\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)} = -\langle \mathbf{\Psi}, \nabla_\Gamma \varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)\times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)},$$

называется *оператором поверхностной дивергенции.*

Обозначим через $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma;\Gamma)$ подпространство в $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$, состоящее из вектор-функций $\mathbf{q}$, поверхностная дивергенция $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{q}$ которых принадлежит $H^{-1/2}(\Gamma)$, с нормой $\|\mathbf{q}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma} = \|\mathbf{q}\|_{-1/2,\Gamma} + \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{q}\|_{-1/2,\Gamma}$. Известно [18], что оператор тангенциального следа γ_τ является сюръекцией пространства $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ на все $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma;\Gamma)$, причем существует непрерывный правый обратный $R_\gamma : \mathbf{H}_T^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma;\Gamma) \to \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$. Это и условие $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ в (1.2) диктуют следующее (фактически необходимое) предположение на вектор-функцию $\mathbf{k}$ в (1.3):

(iii) $\mathbf{k} \in \gamma_\tau \mathbf{H}^0(\mathrm{rot};\Omega) \subset \mathbf{H}_T^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma;\Gamma)$, и, следовательно, существует такой вектор $\mathbf{E}_0$, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_0 = 0,\ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{k},\ \|\mathbf{E}_0\| \le C_T\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma},\ C_T = \|R_\gamma\| = \mathrm{const}\,. \quad (1.22)$$

§ 2. Разрешимость задачи 1

Пусть в дополнение к (i)–(iii) выполняются условия:

(iv) $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$,

(v) $\mathbf{J}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, $q \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$.

Введем функционалы $\mathbf{l} : \mathbf{V}_T \to \mathbb{R}$ и $\mathbf{F} : H_{0T} \equiv \mathbf{H}_0^1(\Omega)\times \mathbf{V}_T \to \mathbb{R}$ по формулам

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{\Psi}\rangle \equiv (\nu_m \mathbf{J}_0 + \mathbf{E}_0, \operatorname{rot}\mathbf{\Psi}), \quad \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{l}, \mathbf{\Psi}\rangle. \quad (2.1)$$

Из (1.10) и (1.22) вытекает в силу условий (iv), (v), что $\mathbf{l} \in \mathbf{V}_T^*$, $\mathbf{F} \in H_{0T}^*$, причем

$$\begin{gathered}\|\mathbf{l}\|_{\mathbf{V}_T^*} \le C_1((1/\sigma)\|\mathbf{J}_0\| + C_T\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma}),\\ \|\mathbf{F}\|_{H_{0T}^*} \le M = \|\mathbf{f}\|_{-1} + C_1((1/\sigma)\|\mathbf{J}_0\| + C_T\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma}).\end{gathered} \quad (2.2)$$

Предположим, что четверка $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{E}) \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})\times(\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})\cap\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega))\times C^1(\overline{\Omega})\times \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ является классическим решением задачи 1. Умножим первое уравнение в (1.1) на функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. Используя обозначения § 1, будем иметь

$$\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mu c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (2.3)$$

Точно так же умножим первое уравнение в (1.2) на $\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}$, где $\mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T$, и проинтегрируем по Ω. Учитывая в силу (1.6) и (1.22), что $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{\Psi}) = \langle \mathbf{k}, \mathbf{\Psi}\rangle_\Gamma = (\mathbf{E}_0, \operatorname{rot}\mathbf{\Psi})$, получим

$$\nu_m a_1(\mathbf{H}, \mathbf{\Psi}) + \mu c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{\Psi}\rangle \quad \forall \mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T. \quad (2.4)$$

Складывая (2.3) и (2.4), приходим к слабой формулировке задачи 1. Она заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega)\times\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)$, удовлетворяющей соотношениям

$$\begin{aligned}&\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu_m a_1(\mathbf{H}, \mathbf{\Psi}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p)\\ &\qquad + \mu[c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v})] = \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})\rangle \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in H_{0T},\end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = q \text{ на } \Gamma. \tag{2.6}$$

Пусть тройка $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p)$ является решением задачи (2.5), (2.6). Рассматривая сужение (2.5) на пространство $V_{0T} \equiv \mathbf{V} \times \mathbf{V}_T$, заключаем, что пара $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ удовлетворяет тождеству

$$a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu[c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v})] \\ = \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})\rangle \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in V_{0T}. \tag{2.7}$$

Отметим, что, хотя тождество (2.7) не содержит пары $(p, \mathbf{E})$, ее можно восстановить по паре $(\mathbf{u}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, удовлетворяющей (2.7), таким образом, что уравнения (1.2) выполняются почти всюду в Ω, а первое уравнение в (1.1) выполняется в смысле обобщенных функций. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(v) *и* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)\times\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ — *решение задачи* (2.6), (2.7). *Тогда существуют такие функции* $p \in L^2_0(\Omega)$ *и* $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^0(\mathrm{rot};\Omega)$, *что* $\mathbf{E}\times\mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{k}$, *тройка* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p)$ *удовлетворяет тождеству* (2.5), *а четверка* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{E})$ *удовлетворяет уравнениям* (1.2) *почти всюду в* Ω *и уравнениям в* (1.1) *в следующем смысле:*

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mu \operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{в } (\mathscr{D}'(\Omega))^3, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{u}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)\times\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ — решение задачи (2.6), (2.7). Введем функционал $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{u}, \mathbf{H}, \mathbf{f})$ в $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ по формуле $\langle \mathbf{L}, \mathbf{v}\rangle = \nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mu c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle$. Из свойств пары $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ и форм a, c, c_1 вытекает с учетом условия $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, что $\mathbf{L} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, причем $\langle \mathbf{L}, \mathbf{v}\rangle = 0\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Тогда из [16, с. 22] следует существование единственной функции $p \in L^2_0(\Omega)$ такой, что выполняется тождество $\langle \mathbf{L}, \mathbf{v}\rangle = -\langle \operatorname{grad} p, \mathbf{v}\rangle = -b(\mathbf{v}, p)\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, совпадающее с (2.3). Полагая в (2.7) $\mathbf{v} = 0$, замечаем, что пара $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ удовлетворяет тождеству (2.4). Складывая (2.3) с (2.4), приходим к (2.5), а выбирая в (2.3) $\mathbf{v} \in (\mathscr{D}(\Omega))^3 \subset \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, приходим к (2.8).

Тождество (2.4) означает с учетом (1.14) и (2.1), что вектор $\nu_m \operatorname{rot}\mathbf{H} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} - \nu_m\mathbf{J}_0 - \mathbf{E}_0$ ортогонален вектору $\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}$, где $\mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T$ — произвольная вектор-функция. В силу (1.11) это возможно тогда и только тогда, когда $\nu_m \operatorname{rot}\mathbf{H} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} - \nu_m\mathbf{J}_0 - \mathbf{E}_0 = \operatorname{grad}\varphi + \mathbf{e}$. Здесь $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ — скалярный потенциал, $\mathbf{e} \in \mathscr{H}(e)$ — некоторый вектор. Полагая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \nabla\varphi + \mathbf{e}$, замечаем, что $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{E}\times\mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{k}$ и что тройка $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, \mathbf{E})$ удовлетворяет (1.2).

Определение 2.1. *Слабым решением задачи* 1 назовем любую тройку $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega)\times\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\times L^2_0(\Omega)$, удовлетворяющую соотношениям (2.5), (2.6).

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(v). *Тогда существует не более одного слабого решения задачи* 1, *удовлетворяющего условиям*

$$\|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\gamma_1'}{\gamma'}\frac{\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}\|_1 < \frac{\alpha_0\nu}{\gamma'}, \quad \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}\|_1 < \frac{\alpha_1\nu_m}{\gamma_1'\mu}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Допустим, что задача 1 имеет два решения $(\mathbf{u}_1, \mathbf{H}_1, p_1)$ и $(\mathbf{u}_2, \mathbf{H}_2, p_2)$. Тогда разность $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \in \mathbf{V}_T$ удовлетворяет соотношению

$$\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \nu_m a_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) + \mu c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{u}_1) - \mu c_1(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}, \mathbf{u}) = 0. \tag{2.10}$$

В силу (1.15), (1.16) справедливы следующие оценки:

$$
\begin{gathered}
|c(\mathbf{u},\mathbf{u}_1,\mathbf{u})| \le \gamma' \|\mathbf{u}_1\|_1 \|\mathbf{u}\|_1^2, \quad \mu |c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{u}_1)| \le \gamma_1' \mu \|\mathbf{u}_1\|_1 \|\mathbf{H}\|_1^2, \\
\mu |c_1(\mathbf{H}_1,\mathbf{H},\mathbf{u})| \le \gamma_1' \mu \|\mathbf{H}_1\|_1 \|\mathbf{H}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 \le \frac{\gamma_1'\sqrt{\mu}}{2} \|\mathbf{H}_1\|_1 \big(\mu \|\mathbf{H}\|_1^2 + \|\mathbf{u}\|_1^2\big).
\end{gathered} \tag{2.11}
$$

Используя (2.11), из (2.10) с учетом (1.9), (1.10) получим, что

$$
\left(\alpha_0\nu - \gamma'\|\mathbf{u}_1\|_1 - \frac{\gamma_1'\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_1\|_1\right)\|\mathbf{u}\|_1^2 + \left(\alpha_1\nu_m - \gamma_1'\mu\|\mathbf{u}_1\|_1 - \frac{\gamma_1'\mu\sqrt{\mu}}{2}\|\mathbf{H}_1\|_1\right)\|\mathbf{H}\|_1^2 \le 0. \tag{2.12}
$$

Предполагая, что решение $(\mathbf{u}_1, \mathbf{H}_1, p_1)$ удовлетворяет условиям (2.9), из (2.12) выводим, что $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{H} = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$, $p_1 = p_2$ в $L_0^2(\Omega)$.

Для доказательства существования слабого решения задачи 1 сведем ее к вспомогательной однородной граничной задаче, используя следующие результаты.

Лемма 2.2. *Предположим, что выполнены условия* (i), (ii). *Тогда для любой функции* $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой вектор* $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, *что* $\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0$ *в* Ω, $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{g}$ *на* Γ, $\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_1 \le C_\varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$. *Здесь константа* C_ε *зависит от* ε *и* Ω.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ стандартное продолжение в Ω граничной функции $\mathbf{g}$, для которого с некоторой константой C_2 (не зависящей от $\mathbf{g}$) выполняется оценка $\|\mathbf{w}\|_1 \le C_2 \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$. Через $\theta_{\varepsilon_0} : \Omega \to \mathbb{R}$ обозначим функцию-срезку из пространства $C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям [16, с. 288]: $\theta_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}) = 1$ в окрестности Γ, $\theta_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}) = 0$ при $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \Gamma) \ge 2\delta(\varepsilon_0)$, где $\delta(\varepsilon_0) = \exp(-1/\varepsilon_0)$, $0 \le \theta_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}) \le C_0$ на $\overline{\Omega}$, где C_0 — константа, не зависящая от ε_0. Положим $\mathbf{w}_{\varepsilon_0} = \mathbf{w} \cdot \theta_{\varepsilon_0}$. Очевидно, что $\mathbf{w}_{\varepsilon_0} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{w}_{\varepsilon_0}|_\Gamma = \mathbf{g}$, $\|\mathbf{w}_{\varepsilon_0}\|_1 \le C'_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, где C'_{ε_0} — некоторая константа, зависящая от ε_0 и Ω. Кроме того, используя неравенство Гёльдера и оценку $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \le \widetilde{C}_\Omega \|\mathbf{w}\|_1$, $\widetilde{C}_\Omega = \mathrm{const}$, вытекающую из непрерывности вложения $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$, имеем

$$
\|\mathbf{w}_{\varepsilon_0}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \|\theta_{\varepsilon_0}\|_{L^{12}(\Omega)} = \chi(\varepsilon_0) \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} \le \widetilde{C}_\Omega C_2 \chi(\varepsilon_0) \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma},
$$

где $\chi(\varepsilon_0) = \|\theta_{\varepsilon_0}\|_{L^{12}(\Omega)}$. Ясно, что $\chi(\varepsilon_0) \to 0$ при $\varepsilon_0 \to 0$.

По вектору $\mathbf{w}_{\varepsilon_0}$ построим такой вектор $\mathbf{v}_{\varepsilon_0} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, что $\operatorname{div} \mathbf{v}_{\varepsilon_0} = \operatorname{div} \mathbf{w}_{\varepsilon_0}$ и

$$
\|\mathbf{v}_{\varepsilon_0}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le C_3 \|\mathbf{w}_{\varepsilon_0}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le \widetilde{C}_\Omega C_2 C_3 \chi(\varepsilon_0) \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma},
$$

$$
\|\mathbf{v}_{\varepsilon_0}\|_1 \le C_4 \|\mathbf{w}_{\varepsilon_0}\|_1 \le C_4 C'_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma},
$$

где C_3 и C_4 — некоторые константы. Поскольку $\mathbf{w}_{\varepsilon_0} \in \mathbf{H}_T^1(\Omega)$, существование такого вектора $\mathbf{v}_{\varepsilon_0}$ вытекает, например, из результатов [19, гл. 1]. Выбирая ε_0 из условия $(1 + C_3)\widetilde{C}_\Omega C_2 \chi(\varepsilon_0) \le \varepsilon$, введем функцию $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{w}_{\varepsilon_0} - \mathbf{v}_{\varepsilon_0}$. Ясно, что $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0$, причем $\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma_1}$, $\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_1 \le C_\varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $C_\varepsilon = (1 + C_4) C'_{\varepsilon_0}$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *При выполнении условий* (i), (ii) *для любой функции* $q \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ *существует единственная функция* $\mathbf{H}_0 \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ *такая, что* $\operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0$,

$\operatorname{rot}\mathbf{H}_0 = 0$, $\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{n} = q$ *на* Γ, $\|\mathbf{H}_0\|_1 \le C_N\|q\|_{1/2,\Gamma}$, *где константа* C_N *не зависит от* q.

Доказательство. Пусть $\varphi\in H^2(\Omega)$ — решение задачи $\Delta\varphi = 0$ в Ω, $\partial\varphi/\partial n = q$ на Γ. Тогда функция $\mathbf{H}_0 = \nabla\varphi$ обладает всеми свойствами, фигурирующими в формулировке леммы 2.3. Единственность $\mathbf{H}_0$ вытекает из того факта, что однородная задача магнитного типа (при $q = 0$) имеет в пространстве $\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ лишь тривиальное решение.

Выбирая $\varepsilon = \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \min(\alpha_0\nu/2\gamma\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \alpha_1\nu_m/2\gamma_1\mu\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma})$ при $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} > 0$, будем искать решение $(\mathbf{u},\mathbf{H})\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ задачи (2.6)–(2.7) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \widetilde{\mathbf{H}}. \tag{2.13}$$

Смысл функций $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_{\varepsilon_0}$ и $\mathbf{H}_0$ пояснен в леммах 2.2 и 2.3, а $\tilde{\mathbf{u}}\in\mathbf{V}$ и $\widetilde{\mathbf{H}}\in\mathbf{V}_T$ — новые искомые функции. Подставляя (2.13) в (2.7), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &a((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) + [c(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v}) + c(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})]\\ &- \mu[c_1(\widetilde{\mathbf{H}},\mathbf{H}_0,\mathbf{v}) + c_1(\widetilde{\mathbf{H}},\widetilde{\mathbf{H}},\mathbf{v})] + \mu[c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H}_0,\tilde{\mathbf{u}}) + c_1(\mathbf{\Psi},\widetilde{\mathbf{H}},\mathbf{u}_0) + c_1(\mathbf{\Psi},\widetilde{\mathbf{H}},\tilde{\mathbf{u}})]\\ &\qquad = \langle\mathbf{F}_1,(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\rangle \quad \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in V_{0T}. \end{aligned}\tag{2.14}$$

Здесь $\langle\mathbf{F}_1,(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\rangle = \langle\mathbf{f}_1,\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{l}_1,\mathbf{\Psi}\rangle$, где $\langle\mathbf{f}_1,\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle - \nu a(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) - c(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{v})$, $\langle\mathbf{l}_1,\mathbf{\Psi}\rangle = \langle\mathbf{l},\mathbf{\Psi}\rangle - \mu c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H}_0,\mathbf{u}_0)$. Ясно, что $\mathbf{f}_1\in\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{l}_1\in\mathbf{V}_T^*$, причем в силу (1.15), (1.16) имеем

$$|\langle\mathbf{f}_1,\mathbf{v}\rangle| \le (\|\mathbf{f}\|_{-1} + \nu\|\mathbf{u}_0\|_1 + \gamma\|\mathbf{u}_0\|_1\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)})\|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

$$|\langle\mathbf{l}_1,\mathbf{\Psi}\rangle| \le (\|\mathbf{l}\|_{\mathbf{V}_T^*} + \gamma_1\mu\|\mathbf{H}_0\|_1\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)})\|\mathbf{\Psi}\|_1 \quad \forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_T.$$

Отсюда вытекает, что $\mathbf{F}_1\in H_{0T}^*$, причем с учетом свойств векторов $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{H}_0$

$$\|\mathbf{F}_1\|_{H_{0T}^*} \le M_1 \equiv M + C_{\varepsilon_0}\nu\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} + \gamma\varepsilon_0 C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}^2 + \gamma_1\mu\varepsilon_0 C_N\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}\|q\|_{1/2,\Gamma}. \tag{2.15}$$

Кроме того, используя (1.13)–(1.16), выводим с учетом выбора вектора $\mathbf{u}_0$, что

$$\begin{aligned} |c(\mathbf{v},\mathbf{u}_0,\mathbf{v})| = |c(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{u}_0)| &\le \gamma\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_1^2\\ &\le \gamma\varepsilon_0\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}\|\mathbf{v}\|_1^2 \le \frac{\alpha_0\nu}{2}\|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}, \end{aligned}\tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \mu|c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{\Psi},\mathbf{u}_0)| &\le \gamma_1\mu\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{\Psi}\|_1^2\\ &\le \gamma_1\mu\varepsilon_0\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}\|\mathbf{\Psi}\|_1^2 \le \frac{\alpha_1\nu_m}{2}\|\mathbf{\Psi}\|_1^2 \quad \forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_T. \end{aligned}\tag{2.17}$$

Для доказательства существования решения $(\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}})\in V_{0T}$ задачи (2.14) воспользуемся теоремой Шаудера. Для этого введем отображение $G: V_{0T}\to V_{0T}$, действующее по формуле $G(\mathbf{w},\mathbf{h}) = (\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}})$. Здесь пара $(\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}})$ является решением линейной задачи

$$a((\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) + a_{\mathbf{w},\mathbf{h}}((\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) = \langle\mathbf{F}_1,(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\rangle \quad \forall\mathbf{v},\mathbf{\Psi}\in V_{0T}, \tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{w},\mathbf{h}}((\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})) = [&c(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_0,\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v}) + c(\mathbf{w},\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})] - \mu[c_1(\widetilde{\mathbf{H}},\mathbf{H}_0,\mathbf{v})\\ &+ c_1(\widetilde{\mathbf{H}},\mathbf{h},\mathbf{v})] + \mu[c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H}_0,\tilde{\mathbf{u}}) + c_1(\mathbf{\Psi},\widetilde{\mathbf{H}},\mathbf{u}_0) + c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{h},\tilde{\mathbf{u}})]. \end{aligned}$$

Ясно, что форма $a_{\mathbf{w},\mathbf{h}}$ в (2.18) непрерывна на H_{0T}. Кроме того, она «δ-мала» на V_{0T} при $\delta = \lambda_*/2$, где константа λ_* введена в (1.18), поскольку с учетом (1.13), (2.16) и (2.17) имеем

$$|a_{\mathbf{w},\mathbf{h}}((\mathbf{v},\boldsymbol{\Psi}),(\mathbf{v},\boldsymbol{\Psi}))| = |c(\mathbf{v},\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) + \mu c_1(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Psi},\mathbf{u}_0)| \\ \le \frac{\lambda_*}{2}\bigl(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\boldsymbol{\Psi}\|_1^2\bigr) \quad \forall(\mathbf{v},\boldsymbol{\Psi}) \in V_{0T}. \quad (2.19)$$

Тогда из леммы 1.2 вытекает, что для каждой пары $(\mathbf{w},\mathbf{h}) \in V_{0T}$ существует и единственно решение $(\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}}) \in V_{0T}$ задачи (2.18) и выполняется оценка

$$\|(\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}})\|_1 \equiv \bigl(\|\tilde{\mathbf{u}}\|_1^2 + \|\widetilde{\mathbf{H}}\|_1^2\bigr)^{1/2} \le \frac{2}{\lambda_*}M_1. \quad (2.20)$$

Полагая $r = 2M_1/\lambda_*$, введем в V_{0T} шар $B_r = \{(\mathbf{v},\boldsymbol{\Psi}) \in V_{0T} : \|(\mathbf{v},\boldsymbol{\Psi})\|_1 \le r\}$. Из (2.20) следует, что оператор G отображает шар B_r в себя. Докажем, что G компактен и непрерывен на B_r. Пусть $\{\mathbf{w}_k,\mathbf{h}_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность из B_r. В силу рефлексивности $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и компактности вложения $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$ существуют ее подпоследовательность, которую мы опять обозначим через $\{\mathbf{w}_k,\mathbf{h}_k\}_{k=1}^\infty$, и пара функций $(\mathbf{w},\mathbf{h}) \in B_r$ такая, что $\mathbf{w}_k \to \mathbf{w}$ сильно в $\mathbf{L}^4(\Omega)$, $\mathbf{h}_k \to \mathbf{h}$ сильно в $\mathbf{L}^4(\Omega)$. Положим $(\mathbf{u}_k,\mathbf{H}_k) = G(\mathbf{w}_k,\mathbf{h}_k), (\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}}) = G(\mathbf{w},\mathbf{h})$ и докажем, что $(\mathbf{u}_k,\mathbf{H}_k) \to (\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}})$ сильно в $\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$ при $k\to\infty$. Отсюда будет вытекать компактность и непрерывность оператора G на шаре B_r. Подставим функции $\mathbf{w}_k$, $\mathbf{h}_k$, $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{H}_k$ в (2.18) вместо $\mathbf{w}$, $\mathbf{h}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ и $\widetilde{\mathbf{H}}$ и вычтем полученное соотношение из (2.18). Получим

$$a((\mathbf{u}_k-\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{H}_k-\widetilde{\mathbf{H}}),(\mathbf{v},\boldsymbol{\Psi})) + a_{\mathbf{w},\mathbf{h}}((\mathbf{u}_k-\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{H}_k-\widetilde{\mathbf{H}}),(\mathbf{v},\boldsymbol{\Psi})) \\ = -c(\mathbf{w}_k-\mathbf{w},\mathbf{u}_k,\mathbf{v}) + \mu c_1(\mathbf{H}_k,\mathbf{h}_k-\mathbf{h},\mathbf{v}) - \mu c_1(\boldsymbol{\Psi},\mathbf{h}_k-\mathbf{h},\mathbf{u}_k)\ \forall(\mathbf{v},\boldsymbol{\Psi}) \in V_{0T}. \quad (2.21)$$

Используя (1.14)–(1.16) и оценку (2.20) для $(\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}})$, справедливую и для $(\mathbf{u}_k,\mathbf{H}_k)$, имеем

$$|c(\mathbf{w}_k-\mathbf{w},\mathbf{u}_k,\mathbf{v})| \le \gamma\|\mathbf{w}_k-\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{u}_k\|_1\|\mathbf{v}\|_1 \\ \le 2\gamma\frac{M_1}{\lambda_*}\|\mathbf{w}_k-\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

$$|c_1(\mathbf{H}_k,\mathbf{h}_k-\mathbf{h},\mathbf{v})| \le \gamma_1\|\mathbf{h}_k-\mathbf{h}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{H}_k\|_1\|\mathbf{v}\|_1 \\ \le 2\gamma_1\frac{M_1}{\lambda_*}\|\mathbf{h}_k-\mathbf{h}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

$$|c_1(\boldsymbol{\Psi},\mathbf{h}_k-\mathbf{h},\mathbf{u}_k)| \le \gamma_1\|\mathbf{h}_k-\mathbf{h}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{u}_k\|_1\|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \\ \le 2\gamma_1\frac{M_1}{\lambda_*}\|\mathbf{h}_k-\mathbf{h}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \quad \forall\boldsymbol{\Psi} \in \mathbf{V}_T.$$

Из (2.19) вытекает, что для фиксированной пары $(\mathbf{w},\mathbf{h}) \in B_r$ левая часть в (2.21) удовлетворяет условиям леммы 1.2 для пары $(\mathbf{u}_k-\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{H}_k-\widetilde{\mathbf{H}})$. Применяя ее, заключаем, что $\|\mathbf{u}_k-\tilde{\mathbf{u}}\|_1+\|\mathbf{H}_k-\widetilde{\mathbf{H}}\|_1 \le \widetilde{M}(\|\mathbf{w}_k-\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}+\|\mathbf{h}_k-\mathbf{h}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}) \to 0$ при $k\to\infty$, где константа $\widetilde{M}$ не зависит от k. Отсюда следуют непрерывность и компактность оператора G. Из теоремы Шаудера тогда получаем, что G имеет неподвижную точку $(\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}}) = G(\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}}) \in B_r$. Эта точка $(\tilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{H}})$ и является решением задачи (2.14), причем для $(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}})$ справедлива оценка (2.20). В таком случае пара $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \widetilde{\mathbf{H}}$ является решением задачи (2.6), (2.7), причем из (2.20), (2.13) приходим к следующим оценкам для $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$:

$$\|\mathbf{u}\|_1 \le M_{\mathbf{u}} = \frac{2}{\lambda_*} M_1 + C_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \quad \|\mathbf{H}\|_1 \le M_{\mathbf{H}} = \frac{2}{\lambda_*} M_1 + C_N \|q\|_{1/2,\Gamma}, \tag{2.22}$$

где константа M_1 определена в (2.15). Из этих оценок, леммы 2.1 и теоремы 2.1 вытекает

Теорема 2.2. *При выполнении условий* (i)–(v) *существует слабое решение* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ *задачи* 1 *и справедливы оценки* (2.22). *Если к тому же функции* $\mathbf{f}, \mathbf{J}_0, \mathbf{g}, q$ *и* $\mathbf{k}$ *«малы» в том смысле, что* $2\gamma' M_{\mathbf{u}} + \gamma_1' \sqrt{\mu} M_{\mathbf{H}} < 2\alpha_0 \nu$, $2\gamma_1' \mu M_{\mathbf{u}} + \gamma_1' \mu \sqrt{\mu} M_{\mathbf{H}} < 2\alpha_1 \nu_m$, *где константы* $M_{\mathbf{u}}$ *и* $M_{\mathbf{H}}$ *определены в* (2.22), *то слабое решение единственно.*

Замечание 2.1. Подчеркнем, что при доказательстве глобальной разрешимости задачи 1 мы существенно использовали лемму 2.2, которая фактически играет роль широко известной в теоретической гидродинамике леммы Хопфа [16]. Однако в отличие от классической леммы Хопфа справедливость ее аналога для рассматриваемой нами модели МГД удается доказать лишь при некоторых дополнительных условиях на исходные данные. В качестве таких условий выступают определенная гладкость границы ($\Gamma \in C^{1,1}$) и равенство нулю нормальной компоненты вектора $\mathbf{g}$, входящего в краевые условия для скорости. Если последние условия не выполняются, то мы можем доказать лишь локальную (при условии малости $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$) разрешимость задачи 1. С другой стороны, в случае, когда $\mathbf{g} = 0$, глобальную разрешимость задачи 1 можно доказать и при менее жестких условиях на границу Γ, например для выпуклого многогранника [20].

Рассмотрим слабую формулировку обобщенного линейного аналога задачи 1. Она заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in H \times L_0^2(\Omega) \equiv \mathbf{H}^1(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ из условий

$$\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mu c_1(\mathbf{H}, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.23}$$

$$\nu_m a_1(\mathbf{H}, \boldsymbol{\Psi}) + \mu c_1(\boldsymbol{\Psi}, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{l}, \boldsymbol{\Psi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\Psi} \in \mathbf{V}_T, \tag{2.24}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \chi, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = q \text{ на } \Gamma. \tag{2.25}$$

Здесь $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ и $\mathbf{l} \in \mathbf{V}_T^*$ — произвольные функционалы, а «скорость» $\hat{\mathbf{u}}$, «магнитное поле» $\widehat{\mathbf{H}}$ и правая часть χ в (2.25) — заданные функции, удовлетворяющие условиям

(vi) $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} = 0$, $\widehat{\mathbf{H}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$;

(vii) $\chi \in L_0^2(\Omega)$.

Следуя [16, с. 22], обозначим через $\mathbf{V}^\perp \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ортогональное в смысле скалярного произведения $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$ дополнение к пространству $\mathbf{V}$. Поскольку $\chi \in L_0^2(\Omega)$, существует единственная функция $\tilde{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{V}^\perp$ (см. [16, гл. 1]) такая, что $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_0 = \chi$, $\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_1 \le (1/\beta)\|\chi\|$. Здесь и ниже β — константа, входящая в inf-sup условие (1.17). Будем искать компоненты $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ решения $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p)$ задачи (2.23)–(2.25) в виде (2.13), где $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{\varepsilon_0} + \tilde{\mathbf{u}}_0$, причем $\mathbf{u}_{\varepsilon_0}$ и $\mathbf{H}_0$ — функции, фигурирующие в леммах 2.2 и 2.3, а $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ и $\widetilde{\mathbf{H}} \in \mathbf{V}_T$ — новые неизвестные функции. Подставляя (2.13) в (2.23)–(2.25) и складывая первые два соотношения, приходим к следующим соотношениям для нахождения тройки $(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}, p) \in H_{0T} \times L^2_0(\Omega)$:

$$a((\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})) + a_{\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}}((\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})) + \tilde{b}((\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}), p) = \langle \mathbf{F}_2, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle \ \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in H_{0T},$$

$$\tilde{b}((\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}), r) = 0 \quad \forall r \in L^2_0(\Omega). \tag{2.26}$$

Здесь

$$a_{\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}}((\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})) = c(\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \widehat{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{u}}) - c_1(\widetilde{\mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})],$$

$$\langle \mathbf{F}_2, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{l}, \boldsymbol{\Psi}\rangle - \nu a_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - \mu c_1(\boldsymbol{\Psi}, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{u}_0),$$

а билинейная форма $\tilde{b}$ введена в (1.21). Ясно, что $\mathbf{F}_2 \in H^*_{0T}$, причем

$$\|\mathbf{F}_2\|_{H^*_{0T}} \le M_2 \equiv \|\mathbf{f}\|_{-1} + \|\mathbf{l}\|_{\mathbf{V}^*_T} + \big(\nu + \gamma'\|\hat{\mathbf{u}}\|_1 + \mu\gamma'_1\|\widehat{\mathbf{H}}\|_1\big)\left(C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} + \frac{1}{\beta}\|\chi\|\right). \tag{2.27}$$

Рассматривая сужение первого тождества в (2.26) на пространство V_{0T}, заключаем, что пара $(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}})$ удовлетворяет следующему тождеству:

$$a((\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})) + a_{\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}}((\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})) = \langle \mathbf{F}_2, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in V_{0T}. \tag{2.28}$$

Сопоставим билинейным формам $(a + a_{\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}}) : H \times H_{0T} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{b} : H_{0T} \times L^2_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ операторы $\widehat{A} : H \to H^*_{0T}$, $B : H_{0T} \to \big(L^2_0(\Omega)\big)^* \equiv L^2_0(\Omega)$, $B^* : L^2_0(\Omega) \to H^*_{0T}$, действующие по формулам

$$\langle \widehat{A}(\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle = ((a + a_{\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}})(\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})),$$

$$\langle B(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}), r\rangle = \tilde{b}((\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}), r) \equiv b(\mathbf{v}, r) = \langle B^* r, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle.$$

Ясно, что форма $a_{\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}}$ в (2.26) непрерывна на $H \times H_{0T}$ и «0-мала» на V_{0T}, ибо $a_{\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}}((\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})) = 0$ на V_{0T}. Поэтому оператор $\widehat{A}$ непрерывен, причем

$$\|\widehat{A}(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}})\|_{H^*_{0T}} \le M_3\|(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}})\|_1, \quad M_3 = \nu + C_1^2\nu_m + \gamma'\|\hat{\mathbf{u}}\|_1 + 2\mu\gamma'_1\|\widehat{\mathbf{H}}\|_1, \tag{2.29}$$

а задача (2.28) имеет для любого элемента $\mathbf{F}_2 \in H^*_{0T}$ единственное решение $(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}) \in V_{0T}$ и справедлива оценка $\|(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}})\|_1 \le (1/\lambda_*)\|\mathbf{F}_2\|_{H^*_{0T}}$. Поскольку форма $\tilde{b} : H_{0T} \times L^2_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет inf-sup условию (см. § 1), из общей теории [16, с. 57–59], примененной к задаче (2.26), следует, что линейный оператор $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{L}\big(H_{0T} \times L^2_0(\Omega); H^*_{0T} \times L^2_0(\Omega)\big)$, где $\widetilde{\Phi}((\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}), r) = (\widehat{A}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}) + B^* r, B(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}))$, является изоморфизмом. Отсюда, в частности, вытекает, что задача (2.26) имеет для любого элемента $\mathbf{F}_2 \in H^*_{0T}$ единственное решение $((\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}}), p) \in H_{0T} \times L^2_0(\Omega)$ и выполняются оценки

$$\|(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}})\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*}\|\mathbf{F}_2\|_{H^*_{0T}}, \quad \|p\| \le \frac{1}{\beta}\|\mathbf{F}_2 - \widehat{A}(\tilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{H}})\|_{H^*_{0T}} \le \frac{1}{\lambda_*\beta}(\lambda_* + M_3)\|\mathbf{F}_2\|_{H^*_{0T}}.$$

Вернувшись к исходной задаче (2.23)–(2.25), приходим к следующему результату.

Лемма 2.4. *При выполнении условий* (i), (ii), (vi) *для любой пятерки* $(\mathbf{f}, \mathbf{l}, \mathbf{g}, q, \chi) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{V}_T^* \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times L_0^2(\Omega)$ *задача* (2.23)–(2.25) *имеет единственное решение* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, *причем для него выполняются оценки*

$$\|\mathbf{u}\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*} M_2 + C_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} + \frac{1}{\beta}\|\chi\|, \quad \|\mathbf{H}\|_1 \le \frac{1}{\lambda_*} M_2 + C_N \|q\|_{1/2,\Gamma},$$
$$\|p\| \le \frac{1}{\lambda_* \beta} M_2(\lambda_* + M_3). \tag{2.30}$$

Здесь константы M_2 *и* M_3 *определяются соотношениями в* (2.27) и (2.29).

Полагая $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{H}, p)$, введем оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) : X \to Y$, где

$$X = \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega), \quad Y = H_{0T}^* \times L_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma), \tag{2.31}$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \widehat{A}((\mathbf{u}, \mathbf{H})) + B^* p, \quad \Phi_2(\mathbf{x}) \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \Phi_3(\mathbf{x}) = \gamma \mathbf{u}, \Phi_4(\mathbf{x}) = \gamma_n \mathbf{H} \equiv \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}. \tag{2.32}$$

По построению оператор Φ линеен, определен и непрерывен на всем X, а в силу леммы 2.4 он сюръективен и обратим. Тогда из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор $\Phi : X \to Y$ — изоморфизм. Сформулируем полученный результат.

Теорема 2.3. *При выполнении условий* (i), (ii) и (vi) *оператор* $\Phi : X \to Y$, *определяемый формулами* (2.31), (2.32), *осуществляет линейный и непрерывный изоморфизм.*

Используя установленные выше результаты об оценках решения линейной задачи (2.23)–(2.25), мы можем теперь дополнить результаты о разрешимости задачи 1 приведением априорной оценки для давления p. Для этого достаточно записать соотношения (2.3), (2.4) для $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p)$ в виде (2.23), (2.24), полагая формально $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, $\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$, и воспользоваться оценкой в (2.30) для давления p и оценками в (2.22) для $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$. Получим

$$\|p\| \le \frac{1}{\lambda_* \beta} \big(\lambda_* + \nu + C_1^2 \nu_m + \gamma' M_{\mathbf{u}} + 2\mu \gamma_1' M_{\mathbf{H}}\big) [M + (\nu + \gamma' M_{\mathbf{u}} + \mu \gamma_1' M_{\mathbf{H}}) C_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}]. \tag{2.33}$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv). *Тогда для любой тройки* $(\mathbf{J}_0, \mathbf{g}, q) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ *существует по крайней мере одно слабое решение* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in X$ *задачи* 1 *и справедливы оценки* (2.22), (2.33), *где константа* M *определена в* (2.2).

§ 3. Постановка и разрешимость задач управления

Задачи управления течениями вязкой проводящей жидкости играют важную роль в ряде прикладных областей магнитной гидродинамики таких, как разработка МГД-генераторов, моделирование систем охлаждения ядерных реакторов, управляемый термоядерный синтез. Ниже мы сформулируем и исследуем общую задачу управления для исходной модели (1.1), (1.2), причем в качестве управлений будем выбирать функции $\mathbf{j} = \mathbf{J}_0, \mathbf{g}$ и q, предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1, K_2 и K_3. Более точно, предположим, что выполняются условия:

(j) $K_1 \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$, $K_2 \subset \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, $K_3 \subset \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ — непустые замкнутые выпуклые множества;

(jj) $\mu_i = \mathrm{const} \geq 0$ и K_i — ограниченное множество, либо $\mu_i > 0$ и J ограничен снизу.

Пусть $\widetilde{J} : X \equiv \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал. Полагая $K \equiv K_1 \times K_2 \times K_3$, введем функционал $J : X \times K \to \mathbb{R}$ по формуле

$$J(\mathbf{x}, v) = \widetilde{J}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2}\|\mathbf{j}\|^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}^2 + \frac{\mu_3}{2}\|q\|_{1/2,\Gamma}^2, \quad \mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{H}, p),\ v \equiv (\mathbf{j}, \mathbf{g}, q). \tag{3.1}$$

Рассматривая функционал J на слабых решениях задачи 1, запишем соответствующее ограничение, имеющее вид слабой формулировки (2.5), (2.6) задачи 1, в виде

$$F(\mathbf{x}, v) \equiv F(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{j}, \mathbf{g}, q) = 0. \tag{3.2}$$

Здесь $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4) : X \times K \to Y$ — оператор, действующий по формулам

$$\langle F_1(\mathbf{x}, v), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle = a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ + b(\mathbf{v}, p) + \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v})] - \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle,$$

$$\langle F_2(\mathbf{x}, v), s\rangle = b(\mathbf{u}, s), \quad F_3(\mathbf{x}, v) = \gamma\mathbf{u} - \mathbf{g} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma), \\ F_4(\mathbf{x}, v) \equiv \gamma_n \mathbf{H} - q \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma).$$

Сформулируем задачу условной минимизации

$$J(\mathbf{x}, v) \equiv J(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{j}, \mathbf{g}, q) \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, v) = 0, \quad (\mathbf{x}, v) \in X \times K. \tag{3.3}$$

В качестве возможных функционалов качества будем рассматривать следующие:

$$J_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 d\Omega, \quad J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\operatorname{rot} \mathbf{u} - \zeta_d|^2\, d\Omega, \quad J_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{H}|^2 d\Omega. \tag{3.4}$$

О физическом смысле функционалов J_k можно прочитать в [20, 21]. Введем множество $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, v) \in X \times K : F(\mathbf{x}, v) = 0,\ J(\mathbf{x}, v) < \infty\}$ допустимых пар для задачи (3.3).

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv), (j), (jj), $\widetilde{J} : X \to \mathbb{R}$ — *слабо полунепрерывный снизу функционал и множество* Z_{ad} *непусто. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи* (3.3).

Доказательство. Обозначим через $(\mathbf{x}_m, v_m) \equiv (\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m, p_m, \mathbf{j}_m, \mathbf{g}_m, q_m) \in Z_{ad}$ минимизирующую последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\mathbf{x}_m, v_m) = \inf_{(\mathbf{x}_m, v_m)\in Z_{ad}} J(\mathbf{x}_m, v_m) \equiv J^*.$$

В силу (jj) и теоремы 2.4 для управлений $\mathbf{j}_m$, $\mathbf{g}_m$, q_m и отвечающих им решений $(\mathbf{u}_m, \mathbf{H}_m, p_m)$ задачи 1 выполняются следующие оценки:

$$\|\mathbf{j}_m\| \leq c_1, \|\mathbf{g}_m\|_{1/2,\Gamma} \leq c_2, \quad \|q_m\|_{1/2,\Gamma} \leq c_3, \quad \|\mathbf{u}_m\|_1 \leq c_4, \\ \|\mathbf{H}_m\|_1 \leq c_5, \quad \|p_m\| \leq c_6. \tag{3.5}$$

Здесь и ниже $c_1, c_2, \ldots$ — константы, не зависящие от m. Из (3.5) вытекает, что существуют (слабые) пределы $\mathbf{j}^* \in K_1$, $\mathbf{g}^* \in K_2$, $q^* \in K_3$, $\mathbf{u}^* \in \mathbf{H}_T^1(\Omega)$,

$\mathbf{H}^* \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, $p^* \in L_0^2(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\mathbf{j}_m\}$, $\{\mathbf{g}_m\}$, $\{q_m\}$, $\{\mathbf{u}_m\}$, $\{\mathbf{H}_m\}$, $\{p_m\}$. Так как $\gamma\mathbf{u}_m = \mathbf{g}_m$, $\gamma_n\mathbf{H}_m = q_m$, из свойства непрерывности операторов следа получим, что $\gamma\mathbf{u}^* = \mathbf{g}^*$, $\gamma_n\mathbf{H}^* = q^*$. Это означает, что $F_3(\mathbf{x}^*, v^*) = 0$, $F_4(\mathbf{x}^*, v^*) = 0$, где $\mathbf{x}^* = (\mathbf{u}^*, \mathbf{H}^*, p^*)$, $v^* = (\mathbf{j}^*, \mathbf{g}^*, q^*)$. Рассуждая, как в [14], выводим, что $F_1(\mathbf{x}^*, v^*) = 0$, $F_2(\mathbf{x}^*, v^*) = 0$, а из слабой полунепрерывности снизу функционала J — что $J(\mathbf{x}^*, v^*) = J^*$.

Заметим, что каждый из функционалов J_1, J_2 и J_3 неотрицателен, ограничен снизу и слабо полунепрерывен снизу. Отсюда и теоремы 3.1 вытекает

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *существует по крайней мере одно решение экстремальной задачи* (3.3) *при* $\widetilde{J} = J_k$, $k = 1, 2, 3$.

§ 4. Обоснование принципа Лагранжа. Системы оптимальности

Обоснуем применение принципа неопределенных множителей Лагранжа для задачи (3.3). По аналогии с [14, 15] воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых задачах условной минимизации [22]. С этой целью подсчитаем частные производные Фреше по $\mathbf{x}$ от оператора F. Действуя по стандартной схеме, легко выводим, что частная производная Фреше по $\mathbf{x}$ от оператора $F : X \times K \to Y$ в любой точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \equiv (\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}, \hat{p}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{q}) \in X \times K$ есть линейный непрерывный оператор $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) : X \to Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $(\mathbf{w}, \mathbf{h}, r) \in X$ элемент $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})(\mathbf{w}, \mathbf{h}, r) = (\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{f}_2, \hat{\mathbf{f}}_3, \hat{f}_4) \in Y$, где

$$\langle \hat{\mathbf{f}}_1, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})\rangle = \nu a_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \nu_m a_1(\mathbf{h}, \boldsymbol{\Psi}) + [c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})] + b(\mathbf{v}, r)$$
$$- \mu[c_1(\widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \mathbf{v}) + c_1(\mathbf{h}, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})] + \mu[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}}) + c_1(\boldsymbol{\Psi}, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{w})] \ \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T, \tag{4.1}$$

$$\langle \hat{f}_2, s\rangle = b(\mathbf{w}, s) \ \forall s \in L_0^2(\Omega), \quad \hat{\mathbf{f}}_3 = \gamma\mathbf{w}, \quad \hat{f}_4 = \gamma_n\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}. \tag{4.2}$$

Простой анализ показывает, что для всех введенных выше функционалов J_k производные Фреше по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$ в любой точке $\hat{\mathbf{x}} \in X$ существуют и принадлежат пространству $\mathscr{L}(X, \mathbb{R}) = X^* \equiv \mathbf{H}_T^{-1}(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, где $\mathbf{H}_T^{-1}(\Omega) = \big(\mathbf{H}_T^1(\Omega)\big)^*$, $\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) = (\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega))^*$. В частности,

$$\langle (J_1)'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{w}\rangle = \int_\Omega \nabla\hat{\mathbf{u}} : \nabla\mathbf{w}\, d\Omega, \ \langle (J_2)'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{w}\rangle = \int_\Omega (\operatorname{rot}\hat{\mathbf{u}} - \zeta_d)\cdot\mathbf{w}\, d\Omega \ \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_T^1(\Omega). \tag{4.3}$$

Положим

$$\mathbf{y}^* = ((\xi, \eta), \sigma, \zeta_1, \zeta_2) \in Y^* \equiv H_{0T} \times L_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma),$$

где $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma) = (\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma))^*$, и введем для J лагранжиан $\mathscr{L} : X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}, v, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, v) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, v)\rangle_{Y^*\times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, v)$$
$$+ \langle F_1(\mathbf{x}, v), (\xi, \eta)\rangle_{H_{0T}^*\times H_{0T}} + (F_2(\mathbf{x}, v), \sigma) + \langle \zeta_1, F_3(\mathbf{x}, v)\rangle_\Gamma + \langle \zeta_2, F_4(\mathbf{x}, v)\rangle_\Gamma. \tag{4.4}$$

Здесь и ниже

$$\langle \zeta_1, \mathbf{h}\rangle_\Gamma = \langle \zeta_1, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)\times\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)}, \quad \langle \zeta_2, h\rangle_\Gamma = \langle \zeta_2, h\rangle_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)\times\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)}$$

для $\zeta_1 \in \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$ и $\zeta_2 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Положив $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, сформулируем теорему.

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнены условия* (i)–(iv), *и пусть* $K_1 \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$, $K_2 \subset \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, $K_3 \subset \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ — *непустые выпуклые множества,* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \equiv (\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}, \hat{p}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{q}) \in X \times K$ — *элемент, на котором достигается локальный минимум в задаче* (3.3). *Пусть* $J(\mathbf{x}, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ — *выпуклый функционал для каждой точки* $\mathbf{x} \in X$, *причем функция* $\mathbf{x} \to J'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, v)$ *со значениями в* X^* *принадлежит пространству* C^0 *в точке* $\hat{\mathbf{x}}$ *для любого элемента* $v \in K$. *Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, (\xi, \eta), \sigma, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$ *такой, что выполняются уравнение Эйлера — Лагранжа*

$$\lambda_0 \langle J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), (\mathbf{w}, \mathbf{h}, r) \rangle_{X^* \times X} + \langle \mathbf{y}^*, F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})(\mathbf{w}, \mathbf{h}, r) \rangle_{Y^* \times Y} = 0 \quad \forall (\mathbf{w}, \mathbf{h}, r) \in X \tag{4.5}$$

и принцип минимума $\mathscr{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \le \mathscr{L}(\hat{\mathbf{x}}, v, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ $\forall v \in K$, *эквивалентный неравенству*

$$(\mathbf{j} - \hat{\mathbf{j}}, \mathrm{rot}\eta) + \langle \zeta_1, \mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}} \rangle_\Gamma + \langle \zeta_2, q - \hat{q} \rangle_\Gamma \le \lambda_0 [J(\hat{\mathbf{x}}, v) - J(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})] \quad \forall v = (\mathbf{j}, \mathbf{g}, q) \in K. \tag{4.6}$$

Доказательство. Согласно [22, с. 79] для доказательства существования искомого лагранжевого множителя $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ следует показать с учетом дифференцируемости F всюду на X для каждого $v \in K$ и выпуклости множеств K и $F(\hat{\mathbf{x}}, K)$, что ортогональное дополнение $Y \ominus R(\widehat{F})$ конечномерно. Для этого достаточно установить фредгольмовость оператора $\widehat{F} \equiv F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) : X \to Y$. В силу (4.1), (4.2) имеем $\widehat{F} = \Phi + \widehat{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) + (\widehat{\Phi}_1, 0, 0, 0)$. Здесь операторы Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 определены в (2.32), а оператор $\widehat{\Phi}_1 : X \to H^*_{0T}$ определяется соотношением

$$\langle \widehat{\Phi}_1(\mathbf{w}, \mathbf{h}, r), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \rangle = c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \mu[c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}} - c_1(\widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \mathbf{v})].$$

В силу теоремы 2.3 оператор $\Phi : X \to Y$ является изоморфизмом, а из (1.15) и (1.16) вытекают с учетом компактности вложения $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$ непрерывность и компактность $\widehat{\Phi}_1$.

Исследуем более детально свойства лагранжевых множителей. С этой целью обратимся к уравнению Эйлера — Лагранжа (4.5). Полагая в (4.5) сначала $\mathbf{h} = 0$, $r = 0$, затем $\mathbf{w} = 0$, $\mathbf{h} = 0$ и, наконец, $\mathbf{w} = 0$, $r = 0$, приходим к следующим тождествам для ξ, η, σ, ζ_1 и ζ_2:

$$\nu a_0(\mathbf{w}, \xi) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \xi) + c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \xi) + \mu c_1(\eta, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{w}) + \langle \zeta_1, \mathbf{w} \rangle_\Gamma + b(\mathbf{w}, \sigma) \\ + \lambda_0 \langle J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1_T(\Omega),$$

$$b(\xi, r) + \lambda_0 (J'_p(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), r) = 0 \quad \forall r \in L^2_0(\Omega), \tag{4.7}$$

$$\nu_m a_1(\mathbf{h}, \eta) + \mu c_1(\eta, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}}) - \mu[c_1(\widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \xi) + c_1(\mathbf{h}, \widehat{\mathbf{H}}, \xi)] \\ + \langle \zeta_2, \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma + \lambda_0 \langle J'_{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \mathbf{h} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{h} \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega). \tag{4.8}$$

Соотношения (4.7), (4.8) вместе с (4.6) и операторным ограничением (3.2) представляют собой систему оптимальности. Она состоит из трех частей. Первая ее часть имеет вид слабой формулировки (2.5), (2.6) задачи 1, эквивалентной операторному уравнению (3.2), вторая состоит из тождеств (4.7), (4.8) для множителей Лагранжа (ξ, η), σ, ζ_1 и ζ_2, и, наконец, последняя представляет собой вариационное неравенство (4.6).

Из условий $\xi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\eta \in \mathbf{V}_T$ и второго тождества в (4.7) вытекает, что лагранжевы множители (ξ, η), сопряженные к паре $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$, обладают следующими свойствами:

$$\xi = 0, \quad \eta \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma \text{ и } \operatorname{div} \eta = 0, \ \operatorname{div} \xi = -\lambda_0 J_p'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \text{ в } \Omega. \tag{4.9}$$

Отметим, что ξ в отличие от η не обладает свойством соленоидальности, исключая случай, когда J не зависит от p и, следовательно, из (4.9) вытекает, что $\operatorname{div} \xi = 0$.

Покажем, что систему (4.7), (4.8) можно рассматривать как слабую формулировку некоторой краевой задачи для множителей (ξ, η) и σ. Предполагая для простоты, что Ω — односвязная область, так что справедливо вложение $\mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, введем линейные непрерывные операторы $S_{\mathbf{H}} : \mathbf{H}_T^{-1}(\Omega) \to \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ и $\widetilde{S}_{\mathbf{V}} : \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \to \mathbf{V}^*$ по формулам

$$\langle S_{\mathbf{H}} \mathbf{l}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \langle \mathbf{l}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{H}_T^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}_T^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{l} \in \mathbf{H}_T^{-1}(\Omega), \ \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{H}_T^1(\Omega), \tag{4.10}$$

$$\langle \widetilde{S}_{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{l}}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}} = \langle \tilde{\mathbf{l}}, \mathbf{h} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)} \quad \forall \tilde{\mathbf{l}} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega), \quad \mathbf{h} \in \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega). \tag{4.11}$$

Используя вытекающие из (1.8), (1.12)–(1.14) и (1.5)–(1.7) соотношения

$$\begin{gathered}
a_0(\mathbf{w}, \xi) = -\langle \Delta \xi, \mathbf{w} \rangle, \quad b(\mathbf{w}, \sigma) = \langle \nabla \sigma, \mathbf{w} \rangle, \quad a_1(\mathbf{h}, \eta) = \langle \operatorname{rot} \operatorname{rot} \eta, \mathbf{h} \rangle, \\
c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \xi) = -c(\hat{\mathbf{u}}, \xi, \mathbf{w}) \equiv -((\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \xi, \mathbf{w}), \\
c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \xi) \equiv \int_\Omega (\mathbf{w} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} \cdot \xi \, d\Omega = (\nabla \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \xi, \mathbf{w}), \\
c_1(\eta, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{w}) = (\operatorname{rot} \eta \times \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{w}), \quad c_1(\eta, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}}) = -(\operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{h}), \\
c_1(\widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \xi) = -(\operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}} \times \xi, \mathbf{h}), \\
c_1(\mathbf{h}, \widehat{\mathbf{H}}, \xi) \equiv (\operatorname{rot} \mathbf{h}, \widehat{\mathbf{H}} \times \xi) = (\operatorname{rot}(\widehat{\mathbf{H}} \times \xi), \mathbf{h}) \quad \forall (\mathbf{w}, \mathbf{h}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^2,
\end{gathered} \tag{4.12}$$

где $\nabla \hat{\mathbf{u}}^T$ — сопряженный тензор к $\nabla \hat{\mathbf{u}}$, выводим, что

$$\begin{gathered}
\nu a_0(\mathbf{w}, \xi) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \xi) + c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \xi) + \mu c_1(\eta, \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{w}) + \langle \zeta_1, \mathbf{w} \rangle_\Gamma + b(\mathbf{w}, \sigma) = -\nu \langle \Delta \xi, \mathbf{w} \rangle \\
- ((\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \xi, \mathbf{w}) + (\nabla \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \xi, \mathbf{w}) + \mu (\operatorname{rot} \eta \times \widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{w}) + \langle \nabla \sigma, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),
\end{gathered} \tag{4.13}$$

$$\begin{gathered}
\nu_m a_1(\mathbf{h}, \eta) + \mu c_1(\eta, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}}) - \mu [c_1(\widehat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \xi) + c_1(\mathbf{h}, \widehat{\mathbf{H}}, \xi)] + \langle \zeta_2, \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \rangle_\Gamma \\
= \nu_m \langle \mathrm{rotrot} \eta, \mathbf{h} \rangle - \mu (\operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{h}) + \mu (\operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}} \times \xi, \mathbf{h}) - \mu (\operatorname{rot}(\widehat{\mathbf{H}} \times \xi), \mathbf{h}) \ \forall \mathbf{h} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).
\end{gathered} \tag{4.14}$$

Поэтому, рассматривая сужения первого тождества в (4.7) и тождества (4.8) соответственно на пространства $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{H}_T^1(\Omega)$ и $\mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, приходим к следующим соотношениям:

$$-\nu \Delta \xi - (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \xi + \nabla \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \xi + \mu \operatorname{rot} \eta \times \widehat{\mathbf{H}} + \nabla \sigma = -\lambda_0 S_{\mathbf{H}} J_{\mathbf{u}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \quad \text{в } \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \tag{4.15}$$

$$\nu_m \mathrm{rotrot} \eta - \mu \operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{u}} + \mu \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}} \times \xi - \mu \operatorname{rot}(\widehat{\mathbf{H}} \times \xi) = -\lambda_0 \widetilde{S}_{\mathbf{V}} J_{\mathbf{H}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \quad \text{в } \mathbf{V}^*. \tag{4.16}$$

Каждое из слагаемых в левой части (4.16) принадлежит $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Пусть, более того,

$$\widetilde{S}_{\mathbf{V}} J_{\mathbf{H}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega). \tag{4.17}$$

Положим

$$\mathbf{L}_1 = \nu_m \operatorname{rot}\operatorname{rot}\eta - \mu \operatorname{rot}\eta \times \hat{\mathbf{u}} + \mu \operatorname{rot}\widehat{\mathbf{H}} \times \xi - \mu \operatorname{rot}(\widehat{\mathbf{H}} \times \xi) + \lambda_0 \widetilde{S}_{\mathbf{V}} J'_{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}).$$

Из (4.16) вытекает, что сужение функционала $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ на $\mathbf{V}$ равно нулю. Тогда из [16, с. 22] следует существование такой функции $\psi \in L^2_0(\Omega)$, что $\mathbf{L}_1 = -\nabla\psi$ в $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, т. е. что

$$\nu_m \operatorname{rot}\operatorname{rot}\eta - \mu \operatorname{rot}\eta \times \hat{\mathbf{u}} + \mu \operatorname{rot}\widehat{\mathbf{H}} \times \xi - \mu \operatorname{rot}(\widehat{\mathbf{H}} \times \xi) + \nabla\psi \\ = -\lambda_0 \widetilde{S}_{\mathbf{V}} J'_{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \quad \text{в } \mathbf{H}^{-1}(\Omega). \quad (4.18)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 4.2. *Пусть* Ω *— односвязная область и выполняются условия теоремы* 4.1 *и* (4.17). *Тогда существуют функции (лагранжевы множители)* $(\xi, \eta) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times \mathbf{V}_T$, $\sigma \in L^2_0(\Omega)$, $\zeta_1 \in \mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma)$, $\zeta_2 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$, $\psi \in L^2_0(\Omega)$ *и константа* $\lambda_0 \geq 0$, *которые вместе с элементом* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) = (\hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}}, \hat{p}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{q})$ *удовлетворяют уравнениям* (4.15), (4.18), *интегральным тождествам* (4.7), (4.8) *и принципу минимума* (4.6).

Замечание 4.1. Отметим, что, хотя функция ψ формально не входит в выражение (4.5) для лагранжиана $\mathscr{L}$, тем не менее ее можно считать множителем Лагранжа, сопряженным к электрическому полю $\mathbf{E}$, входящему в уравнение (1.2) (см. [20]).

Легко проверить, что условие (4.17) выполняется для всех функционалов качества в (3.4). Если предположить к тому же, что $\xi, \eta, \hat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{H}} \in \mathbf{H}^1(\Delta; \Omega)$, $\sigma, \psi \in H^1(\Omega)$, то из (4.7), (4.8) и (4.15), (4.18) можно вывести «поточечные» дифференциальные уравнения и граничные соотношения для лагранжевых множителей. Действительно, умножив при выполнении этих условий (4.15) и (4.18) соответственно на функции $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1_T(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$ и $\mathbf{H} \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$, проинтегрируем результат по области Ω и применим формулы Грина (1.5)–(1.7). Вычитая полученные соотношения из (4.13), (4.14), легко выводим, что

$$\nu\langle \partial\xi/\partial n, \mathbf{w}\rangle_\Gamma + \langle \zeta_1, \mathbf{w}\rangle_\Gamma = \lambda_0 \int_\Omega \big[S_{\mathbf{H}} J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})\big] \cdot \mathbf{w}\, d\Omega - \lambda_0 \big\langle J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \mathbf{w}\big\rangle \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1_T(\Omega), \quad (4.19)$$

$$\nu_m\langle \operatorname{rot}\eta \times \mathbf{n}, \mathbf{h}\rangle_\Gamma + \langle \zeta_2 - \psi, \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\rangle_\Gamma \\ = \lambda_0 \int_\Omega \tilde{S}_{\mathbf{V}} J'_{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \cdot \mathbf{h}\, d\Omega - \lambda_0 \big\langle J'_{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \mathbf{h}\big\rangle \quad \forall \mathbf{h} \in \widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega). \quad (4.20)$$

Дальнейший процесс определяется видом функционала качества J.

Рассмотрим сначала случай, когда $\widetilde{J} = J_1$. Учитывая (4.3), (1.7), имеем

$$\big\langle (J_1)'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \mathbf{w}\big\rangle = \int_\Omega \nabla\hat{\mathbf{u}} : \nabla\mathbf{w}\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \Delta\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w}\, d\Omega + \left\langle \frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial n}, \mathbf{w}\right\rangle_\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1_T(\Omega),$$

$$\int_\Omega \big[S_{\mathbf{H}} (J_1)'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})\big] \cdot \mathbf{w}\, d\Omega - \big\langle (J_1)'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \mathbf{w}\big\rangle = -\left\langle \frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial n}, \mathbf{w}\right\rangle_\Gamma, \quad (J_1)'_{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) = 0. \quad (4.21)$$

Используя (4.21), перепишем (4.15), (4.18), (4.19) и (4.20) в виде

$$-\nu\Delta\xi-(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\xi+\nabla\hat{\mathbf{u}}^T\cdot\xi+\mu\,\mathrm{rot}\,\eta\times\widehat{\mathbf{H}}+\nabla\sigma=\lambda_0\Delta\hat{\mathbf{u}}\quad\text{в }\Omega,\tag{4.22}$$

$$+\nu_m\mathrm{rotrot}\eta-\mu\,\mathrm{rot}\,\eta\times\hat{\mathbf{u}}+\mu\,\mathrm{rot}\,\widehat{\mathbf{H}}\times\xi-\mu\,\mathrm{rot}(\widehat{\mathbf{H}}\times\xi)+\nabla\psi=0\quad\text{в }\Omega,\tag{4.23}$$

$$\nu\langle\partial\xi/\partial n,\mathbf{w}\rangle_\Gamma+\langle\zeta_1,\mathbf{w}\rangle_\Gamma=-\lambda_0\langle\partial\hat{\mathbf{u}}/\partial n,\mathbf{w}\rangle_\Gamma\quad\forall\mathbf{w}\in\mathbf{H}^1_T(\Omega),\tag{4.24}$$

$$\nu_m\langle\mathrm{rot}\,\eta\times\mathbf{n},\mathbf{h}\rangle_\Gamma+\langle\zeta_2-\psi,\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\rangle_\Gamma=0\quad\forall\mathbf{h}\in\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega).\tag{4.25}$$

Когда функция $\mathbf{w}$ пробегает пространство $\mathbf{H}^1_T(\Omega)$, ее след $\gamma\mathbf{w}$ пробегает пространство $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma)$. Точно так же, когда функция $\mathbf{h}$ пробегает пространство $\widetilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, ее тангенциальная и нормальная компоненты пробегают соответственно пространства $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma)$ и $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$. С учетом этого из (4.24), (4.25) приходим к следующим соотношениям для ξ, η, ψ, ζ_1 и ζ_2:

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\,\eta\times\mathbf{n}=0\quad\text{в }\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma),\quad\zeta_1=-\nu\frac{\partial\xi}{\partial n}-\lambda_0\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial n}\quad\text{в }\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma),\\ \zeta_2=\psi\quad\text{в }\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma).\end{gathered}\tag{4.26}$$

В случае, когда функции $\hat{\mathbf{u}}$ и $\widehat{\mathbf{H}}$ известны, соотношения (4.22), (4.23) вместе с условиями (4.9) и первым соотношением в (4.26) представляют собой замкнутую систему линейных уравнений для нахождения множителей Лагранжа ξ, η, σ и ψ, эквивалентную в силу теоремы 4.1 линейной фредгольмовой задаче. Определив из этой системы ξ, η, σ и ψ, далее из последних двух соотношений в (4.26) можно найти остальные множители ζ_1 и ζ_2. В общем же случае, когда $\hat{\mathbf{u}}$ и $\widehat{\mathbf{H}}$ неизвестны, (4.22), (4.23), (4.26) и (4.9) представляют собой вторую часть системы оптимальности для задачи (3.3) при $\widetilde{J}=J_1$, которую следует рассматривать совместно с соотношениями (2.5)–(2.6) и неравенством (4.6).

По аналогичной схеме (см. [20]) показывается, что при $\widetilde{J}=J_2$ вторая часть системы оптимальности состоит из соотношений (4.23), (4.9) и (вместо (4.22), (4.26)) соотношений

$$-\nu\Delta\xi-(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\xi+\nabla\hat{\mathbf{u}}^T\cdot\xi+\mu\,\mathrm{rot}\,\eta\times\widehat{\mathbf{H}}+\nabla\sigma=-\lambda_0\,\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}-\zeta_d)\quad\text{в }\Omega,$$

$$\mathrm{rot}\,\eta\times\mathbf{n}=0\text{ в }\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma),\quad\zeta_1=-\nu\frac{\partial\xi}{\partial n}-\lambda_0(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}-\zeta_d)\times\mathbf{n}\quad\text{в }\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma),$$

$$\eta_2=\psi\text{ в }\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma),$$

а для функционала J_3, зависящего лишь от $\mathbf{H}$, она состоит из (4.9) и соотношений

$$-\nu\Delta\xi-(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\xi+\nabla\hat{\mathbf{u}}^T\cdot\xi+\mu\,\mathrm{rot}\,\eta\times\widehat{\mathbf{H}}+\nabla\sigma=0\quad\text{в }\Omega,$$

$$\nu_m\mathrm{rot\,rot}\eta-\mu\,\mathrm{rot}\,\eta\times\hat{\mathbf{u}}+\mu\,\mathrm{rot}\,\widehat{\mathbf{H}}\times\xi-\mu\,\mathrm{rot}(\widehat{\mathbf{H}}\times\xi)+\nabla\psi=\lambda_0\Delta\widehat{\mathbf{H}}\quad\text{в }\Omega,$$

$$\nu_m\,\mathrm{rot}\,\eta\times\mathbf{n}=-\lambda_0\frac{\partial\widehat{\mathbf{H}}}{\partial n}\text{ в }\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma),\quad\zeta_1=-\nu\frac{\partial\xi}{\partial n}\text{ в }\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma),$$

$$\zeta_2=\psi-\lambda_0\frac{\partial\widehat{\mathbf{H}}}{\partial n}\cdot\mathbf{n}\quad\text{в }\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Таким образом, в настоящей работе была предложена общая методика исследования задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости, рассматриваемых при неоднородных краевых условиях для скорости и электромагнитного поля. Применение этой методики позволило доказать разрешимость как исходной неоднородной краевой задачи, так и задач управления для широкого класса слабо полунепрерывных снизу функционалов качества при наличии нескольких распределенных или граничных управлений, а также вывести и проанализировать системы оптимальности для конкретных дифференцируемых функционалов качества. Следует отметить, что не все важные вопросы, касающиеся свойств решений задач управления для модели (1.1), (1.2), были освещены в этой работе. В стороне остались рассмотрение свойств регулярности и единственности решений задач управления, а также изучение задач управления для более сложных моделей с условиями сопряжения для электромагнитного поля. Исследованию указанных вопросов автор предполагает посвятить отдельную статью.

Автор благодарит рецензента за его замечания, направленные на улучшение содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1960. Т. 59. С. 115–173.
2. *Солонников В. А.* О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1960. Т. 59. С. 174–187.
3. *Алексеев Г. В.* О разрешимости однородной начально-краевой задачи для уравнений магнитной гидродинамики идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. 1982. Т. 57. С. 3–20.
4. *Sermange M., Temam R.* Some mathematical questions related to the MHD equations // Comm Pure. Appl. Math. 1983. V. 36. P. 635–664.
5. *Чижонков С. В.* Об одной системе уравнений типа магнитной гидродинамики // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 5. С. 1074–1077.
6. *Gunzburger M. D., Meir A. J., Peterson J. S.* On the existence, uniqueness and finite element approximation of solution of the equations of stationary, incompressible magnetohydrodynamics // Math. Comp. 1991. V. 56, N 194. P. 523–563.
7. *Самохин В. Н.* О стационарных задачах магнитной гидродинамики неньютоновских сред // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 4. С. 120–127.
8. *Meir A. J., Schmidt P. G.* Variational methods for stationary MHD flow under natural interface conditions // Nonlinear Anal. 1996. V. 26, N 4. P. 659–689.
9. *Meir A. J., Schmidt P. G.* Analysis and numerical approximation of a stationary MHD flow problem with nonideal boundary // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 36, N 4. P. 1304–1332.
10. *Wiedmer M.* Finite element approximation for equations of magnetohydrodynamics // Math. Comp. 1999. V. 69, N 229. P. 83–101.
11. *Алексеев Г. В., Смышляев А. Б., Терешко Д. А.* Неоднородные краевые задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса. Владивосток: Дальнаука. 2000. 60 с. (Препринт / ИПМ ДВО РАН; № 19).
12. *Алексеев Г. В., Смышляев А. Б., Терешко Д. А.* Разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса при смешанных краевых условиях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 1. С. 84–98.
13. *Алексеев Г. В.* Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
14. *Алексеев Г. В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
15. *Алексеев Г. В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 3. С. 380–394.
16. *Girault V., Raviart P. A.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin: Springer-Verl., 1986.
17. *Valli A.* Orthogonal decompositions of $\mathbf{L}^2(\Omega)^3$. Galamen, 1995. (Preprint / Department of Mathematics. University of Toronto; UTM 493).
18. *Alonso A.,Valli A.* Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ and the construction of the extension operator // Manuscripta Math. 1996. V. 89. P. 159–178.

19. *Galdi G.* An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. New York: Springer-Verl., 1994. V. 1.

20. *Алексеев Г. В.* Теоретический анализ обратных экстремальных задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2002. 78 с. (Препринт / ИПМ ДВО РАН; № 1).

21. *Hou L., Ravindran S.* Computations of boundary optimal control problems for an electrically conducting fluid // J. Comput. Phys. 1996. V. 128, N . P. 319–330.

22. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

Статья поступила 10 марта 2003 г.

Алексеев Геннадий Валентинович
Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, Владивосток 690041
alekseev@iam.dvo.ru