Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.54

ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ, НЕ ПРИНИМАЮЩИХ НУЛЕВОГО ЗНАЧЕНИЯ

С. В. Романова

Аннотация: Рассматривается класс аналитических ограниченных в единичном круге функций, не принимающих в этом круге нулевых значений. Доказаны некоторые свойства экстремальных функций для функционалов определенного вида в этом классе функций.

Ключевые слова: ограниченные функции, гипотеза Кжижа.

1. Введение

Пусть B — класс всех функций f, $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$, аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих в D условию $0 < |f(z)| \le 1$. Я. Кжиж [1] высказал гипотезу, что $\sup\limits_{f\in B} |a_n| = 2/e$, $n \ge 1$, с равенством для функций $\lambda F(kz^n)$, $|\lambda| = |k| = 1$, где $F(z) = \exp((z-1)/(z+1))$. Гипотеза была доказана для $n = 1, 2, 3, 4$ (см. библиографию в [2]). Поскольку класс B инвариантен относительно вращения, достаточно рассматривать функции $f \in B$, нормированные условием $a_0 > 0$. Ввиду неравенства $0 < a_0 \le 1$ можно положить $a_0 = e^{-t}$, $0 \le t < \infty$. Обозначим через $B(t)$ класс функций $f \in B$, для которых $a_0 = e^{-t}$, $F_t(z) = \exp(-t(1-z)/(1+z))$. Будем рассматривать функционалы, определенные на классе всех аналитических в единичном круге функций вида

$$L(f) = \operatorname{Re}(a_n + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \dots + \alpha_1 a_1), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in C.$$

В статье доказано, что если $f(z,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(t) z^k$ доставляет экстремум функционалу $L(f)$ в классе $B(t)$, то для $a_k(t)$, $k \ge 1$, справедлива формула

$$a_k(t) = e^{-t}\left[(-1)^k \frac{2^k C_1^k t^k}{k!} + \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^{k-p} 2^{k-p} t^{k-p} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+a_s=k-p \\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k}} \frac{C_{js}^{\alpha_1} \dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1! \dots \alpha_s!}\right],$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — неотрицательные целые числа,

$$C_p = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e^{-ipu_k}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00123).

© **2003 Романова С. В.**

$$0 \le u_1 < u_2 < \dots < u_m < 2\pi, \quad m \le n.$$

Пусть функции f_0 соответствуют следующие u_k и λ_k:

$$u_1 = u_1^0, \dots, u_m = u_m^0, \quad \lambda_1 = \lambda_1^0, \dots, \lambda_m = \lambda_m^0.$$

Обозначим $(u^0, \lambda^0) = \big(u_1^0, \dots, u_m^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0\big)$. Назовем функцию f_0 *критической точкой функционала* $L(f)$, если

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}(u^0, \lambda^0) = \dots = \frac{\partial L}{\partial u_m}(u^0, \lambda^0) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(u^0, \lambda^0) = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_{m-1}}(u^0, \lambda^0) = 0.$$

Пусть $M_k(t)$ — множество таких векторов $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in C^{n-1}$, что функция $F_t(z^k)$ будет критической точкой для функционала $L(f)$ при фиксированном $t > 0$.

В статье установлена размерность многообразия $M_k(t)$ и получена формула для a_n, позволяющая выписывать систему линейных уравнений для коэффициентов $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ из $M_k(t)$. Доказана следующая

Теорема. *Множество* $M_k(t)$, $1 \le k \le n-1$, *является гладким действительным многообразием размерности* $2n - 2k - 1$. *Множество* $M_n(t)$ *совпадает с множеством* $(0, \dots, 0)$.

2. Обобщенное уравнение типа Левнера

В [3] показано, что любую функцию f из всюду плотного подкласса $B(t_0)$, $t_0 > 0$, можно представить в виде $f(z) = f(z, t_0)$, где $f(z,t)$ является интегралом дифференциального уравнения типа Левнера

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t)\frac{1 + e^{-iu(t)}z}{1 - e^{-iu(t)}z}, \quad 0 \le t \le t_0,\ z \in D,\ f(z,0) = 1,$$

$u(t)$ — кусочно-непрерывная действительнозначная функция на $[0, t_0]$, называемая управлением. Наряду с этим уравнением можно рассматривать обобщенное дифференциальное уравнение типа Левнера, интегралы которого образуют всюду плотный подкласс $B(t_0)$. А именно, любую функцию f из подкласса $B(t_0)$, $t_0 > 0$, можно представить в виде $f(z) = f(z, t_0)$, где $f(z,t)$ является интегралом обобщенного дифференциального уравнения типа Левнера

$$\frac{\partial f(z,t)}{dt} = -f(z,t)\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{1 + e^{-iu_k(t)}z}{1 - e^{iu_k(t)}z}, \tag{1}$$

где $\lambda_1 \ge 0, \dots, \lambda_m \ge 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, $u_k(t)$ — непрерывные на $[0, t_0]$ действительнозначные управления.

В самом деле, известно, что функцию из класса $B(t_0)$ можно представить в виде $f(z) = e^{-tp(z)}$, где $p(z) \in P$, P — класс Каратеодори всех функций p, $p(z) = 1 + p_1 z + \dots$, аналитических в D и удовлетворяющих в D условию $\operatorname{Re} p(z) > 0$. Для функций класса P имеется интегральное представление

$$p(z) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{iu} - z}{e^{iu} - z}\, d\mu(u),$$

где $\mu(u)$ — неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} d\mu(u) = 1.$$

Таким образом, легко видеть, что функции класса $B(t_0)$, имеющие интегральное представление

$$f(z) = \exp\left[-\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{e^{iu} + z}{e^{iu} - z} h_k(u)du\right],$$

где $h_k(u)$ — положительные непрерывные функции, удовлетворяющие условию

$$\int_0^{2\pi} h_k(u)du = -\log f(0), \quad \lambda_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1,$$

образуют всюду плотный подкласс класса $B(t_0)$. Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \int_0^{2\pi} \frac{e^{iu} + z}{e^{iu} - z} h_k(u)du\right].$$

В каждом интеграле в последней формуле сделаем соответственно замену переменных

$$\tau = \tau(u) = \int_0^{u} h_k(u)\, du.$$

Тогда приходим к формуле

$$f(z) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \int_0^{t_0} \frac{1 + e^{-iu_k(\tau)}z}{1 - e^{-iu_k(\tau)}z}\, d\tau\right], \tag{2}$$

где $t_0 = \tau(2\pi) = -\log f(0)$. Обратно, если $u_k(\tau)$ — непрерывные функции, то равенство (2) определяет функцию класса B. Рассмотрим функцию

$$f(z,t) = \exp\left[-\int_0^{t} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{1 + e^{-iu_k(\tau)}z}{1 - e^{-iu_k(\tau)}z}\, d\tau\right], \quad 0 \leq t \leq t_0,\ z \in D. \tag{3}$$

Тогда $f(z,t) \in B(t)$ для всех $t \in [0, t_0]$, $f(z, t_0) = f(z)$, $f(z, 0) = 1$. Из (3) следует, что для всех $t \in [0, t_0]$ справедливо уравнение (1). Если $f(z,t)$ — решение уравнения (1), то, проинтегрировав его, получим

$$f(z,t) = \exp\left[-\int_0^{t} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{1 - e^{iu_k}z}{1 - e^{-iu_k}z}\, dt\right].$$

Следовательно, $f(z,t) \in B$.

3. Предварительные результаты

Пусть $f(z,t)$ имеет разложение $f(z,t) = a_0(t)+a_1(t)z+\dots$ и является решением дифференциального уравнения (1). Из уравнения (1) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\dot a_0 = -a_0(t), \quad a_0(0) = 1,\\ \dot a_1(t) = -a_1(t) - 2a_0(t)C_1, \quad a_1(0) = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot a_n(t) = -a_n(t) - 2a_{n-1}(t)C_1 - \dots - 2a_0(t)C_n, \quad a_n(0) = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$C_p = C_p(u_1,\dots,u_m,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = \sum_{k=1}^m \lambda_k e^{-ipu_k(t)}, \quad 1 \le p \le n.$$

Из первого уравнения системы (4) следует, что $a_0(t) = e^{-t}$. Покажем, что все экстремальные функции для функционала $L(f)$ в классе $B(t)$ имеют вид

$$f(z,t) = \exp\left[-t\sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{1+e^{-iu_k(t)}z}{1-e^{iu_k(t)}z}\right].$$

Действительно, всякую функцию класса $B(t)$ можно записать в виде $f(z,t) = e^{-tp(z)}$, где $p(z) \in P$, P — класс Каратеодори.

Задача о максимуме функционала $L(f)$ в классе $B(t)$ эквивалентна задаче о максимуме в классе P нелинейного функционала, зависящего от коэффициентов $p_1,\dots,p_n$. Так как экстремальные функции в классе P [4, с. 124–126] имеют вид

$$p(z) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{1+e^{-iu_k}z}{1-e^{iu_k}z},\ 1 \le m \le n,\ \lambda_k \ge 0, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1,$$

то экстремальные функции для функционала $L(f)$ в классе $B(t)$ имеют вид

$$f(z,t) = \exp\left[-t\sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{1+e^{iu_k}z}{1-e^{-iu_k}z}\right].$$

Отсюда следует, что все экстремальные функции для функционала $L(f)$ являются интегралами обобщенного дифференциального уравнения (1) с постоянными управлениями.

Лемма. *Если*

$$f(z,t) = \sum_{k=0}^\infty a_k(t)z^k$$

доставляет экстремум функционалу $L(f)$ в классе $B(t)$, то для $a_k(t)$, $k \ge 1$, справедлива формула

$$a_k(t) = e^{-t}\left[(-1)^k\frac{2^kC_1^kt^k}{k!} + \sum_{p=1}^{k-1}(-1)^{k-p}2^{k-p}t^{k-p}\sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p\\ \alpha_1j_1+\dots+\alpha_sj_s=k}}\frac{C_{j_i}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}\right], \tag{5}$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ — неотрицательные целые числа,

$$C_p = \sum_{k=1}^m \lambda_k e^{-ipu_k}, \quad \lambda_1,\dots,\lambda_m \ge 0, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1,$$

$$0 \le u_1 < u_2 < \dots < u_m < 2\pi, \quad m \le n.$$

Доказательство. Равенство (5) получается интегрированием системы (4). Будем доказывать его по индукции. Из второго уравнения системы (4) получаем $a_1(t) = -2C_1 te^{-t}$. Допустим, что формула (5) верна для $a_2, \dots, a_k$. Докажем ее для a_{k+1}. Из системы (4) имеем

$$\dot a_{k+1} = -a_{k+1} - 2a_k C_1 - 2a_{k-1}C_2 - \dots - 2a_1 C_k - 2a_0 C_{k+1}. \tag{6}$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде $a_{k+1} = \Phi_{k+1}e^{-t}$. Тогда Φ_{k+1} будет удовлетворять уравнению

$$\dot\Phi_{k+1}e^{-t} = -2C_1 a_k - 2C_2 a_{k-1} - \dots - 2a_1 C_k - 2a_0 C_{k+1}.$$

Используя предположение индукции, получим

$$\begin{gathered}\dot\Phi_{k+1} = -2C_1\left[(-1)^k \frac{2^k C_1^k t^k}{k!} + \sum_{p=1}^{k-1}(-1)^{k-p}2^{k-p}t^{k-p} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}\right] \\ - 2C_2\Bigg[(-1)^{k-1}\frac{2^{k-1}C_1^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \\ + \sum_{p=1}^{k-2}(-1)^{k-p-1}2^{k-p-1}t^{k-p-1} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p-1\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k-1}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}\Bigg] - \\ \dots - 2C_k(-2tC_1) - 2C_{k+1} = b_k t^k + b_{k-1}t^{k-1} + \dots + b_1 t + b_0, \quad \Phi_{k+1}(0) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{2^{k+1}C_1^{k+1}}{k!},$$

$$\begin{aligned} b_{k-1} &= (-1)^{k-1}2^{k-1} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-1\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}(-2C_1) - 2C_2(-1)^{k-1}\frac{2^{k-1}C_1^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= (-1)^k 2^k\left[C_1 \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-1\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!} + \frac{C_1^{k-1}C_2}{(k-1)!}\right] \\ &= (-1)^k 2^k\left[\frac{C_1 C_1^{k-2}C_2}{(k-2)!} + \frac{C_1^{k-1}C_2}{(k-1)!}\right] = (-1)^k 2^k \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k+1}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k-p} = \Bigg[&(-1)^{k-p+1}2^{k-p+1}C_1 \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!} \\ &+(-1)^{k-p+1}2^{k-p+1}C_2 \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k-1}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!} + \dots + (-1)^{k-p+1}\frac{2^{k-p+1}C_{p+1}C_1^{k-p}}{(k-p)!}\Bigg] \end{aligned}$$

$$= (-1)^{k-p+1}2^{k-p+1}\Bigg[C_1 \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}$$

$$+ C_2 \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!} + \dots + \frac{C_{p+1}C_1^{k-p}}{(k-p)!}\Bigg]$$

$$= (-1)^{k-p+1}2^{k-p+1} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p+1\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k+1}} \beta_s C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}, \quad 2 \le p \le k-1.$$

Если $j_1 < j_2 < \dots < j_s$, то

$$\beta_s = \frac{1}{(\alpha_1-1)!\alpha_2!\dots\alpha_s!} + \frac{1}{\alpha_1!(\alpha_2-1)!\dots\alpha_s!} + \dots + \frac{1}{(\alpha_1!\alpha_2!\dots(\alpha_s-1)!}$$
$$= \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{\alpha_1!\dots\alpha_s!} = \frac{k-p+1}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}.$$

Если $j_1 = \dots = j_s$, то

$$\beta_s = \frac{1}{(k-p)!} = \frac{k-p+1}{(k-p+1)!}.$$

Таким образом,

$$b_{k-p} = (-1)^{k-p+1}2^{k-p+1} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p+1\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k+1}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}(k-p+1), \quad 2 \le p \le k-1,$$

$$b_0 = -2C_{k+1}.$$

После интегрирования уравнения (7) получаем

$$\Phi_{k+1} = \Bigg[(-1)^{k+1}2^{k+1}C_1^{k+1}t^{k+1}(k+1)!$$
$$+ \sum_{p=1}^{k}(-1)^{k+1-p}2^{k+1-p}t^{k+1-p} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_s=k-p+1\\ \alpha_1 j_1+\dots+\alpha_s j_s=k+1}} \frac{C_{j_1}^{\alpha_1}\dots C_{j_s}^{\alpha_s}}{\alpha_1!\dots\alpha_s!}\Bigg],$$

$a_{k+1} = \Phi_{k+1}e^{-t}$, и равенство (5) доказано.

4. Доказательство теоремы

1. Определим сначала множество $M_n(t)$. Функции $F_t(z^n)$ соответствуют следующие управления и параметры λ_k:

$$u_1^0 = \frac{\pi}{n}, \dots, u_n^0 = \frac{(2n-1)\pi}{n}, \quad \lambda_1^0 = \dots = \lambda_n^0 = \frac{1}{n}.$$

Пусть

$$(u,\lambda) = (u_1,\dots,u_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n), \quad (u^0,\lambda^0) = \big(u_1^0,\dots,u_n^0,\lambda_1^0,\dots,\lambda_n^0\big).$$

Рассмотрим функционал

$$L(f) = \mathrm{Re}(a_n + \alpha_{n-1}a_{n-1} + \dots + \alpha_1 a_1).$$

Подставляя в функционал $L(f)$ значения $a_1, \dots, a_n$ из формулы (5), получим

$$L(f) = \mathrm{Re}(a_n(u,\lambda) + \alpha_{n-1}a_{n-1}(u,\lambda) + \dots + \alpha_1 a_1(u,\lambda)).$$

Функция $F_t(z^n)$ является критической точкой для функционала $L(f)$. Следовательно, должны выполняться условия

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}(u^0,\lambda^0) = \dots = \frac{\partial L}{\partial u_n}(u^0\lambda^0) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(u^0,\lambda^0) = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_{n-1}}(u^0,\lambda^0) = 0, \tag{8}$$

$$L(f) = \mathrm{Re}\biggl[\biggl((-1)^n \frac{2^n C_1^n t^n}{n!} + \dots + (-2tC_n)\biggr)e^{-t}$$
$$+ \alpha_{n-1}\biggl((-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}C_1^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + (-2tC_{n-1}))e^{-t}\biggr) + \dots + \alpha_1(-2tC_1)e^{-t}\biggr].$$

Так как $C_1(u^0,\lambda^0) = \dots = C_{n-1}(u^0,\lambda^0) = 0$, $C_n(u^0,\lambda^0) = -1$, то

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}(u^0,\lambda^0) = \mathrm{Re}\biggl[-2t\frac{\partial C_n}{\partial u_1}(u^0,\lambda^0)e^{-t}$$
$$- 2t\alpha_{n-1}\frac{\partial C_{n-1}}{\partial u_1}(u^0,\lambda^0)e^{-t} - \dots - 2t\alpha_1\frac{\partial C_1}{\partial u_1}(u^0,\lambda^0)e^{-t}\biggr]$$
$$= \mathrm{Re}\bigl[2tin\lambda_1^0 e^{-inu_1^0} + 2t\alpha_{n-1}(n-1)i\lambda_1^0 e^{-i(n-1)u_1^0} + \dots + 2t\alpha_1 i\lambda_1^0 e^{-iu_1^0}\bigr]e^{-t},$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2}(u^0,\lambda^0) = \mathrm{Re}\bigl[2nit\lambda_2^0 e^{-inu_2^0}$$
$$+ 2t\alpha_{n-1}(n-1)i\lambda_2^0 e^{-i(n-1)u_2^0} + \dots + 2t\alpha_1 i\lambda_2^0 e^{-iu_2^0}\bigr]e^{-t}, \dots,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_n}(u^0,\lambda^0) = \mathrm{Re}\bigl[2nit\lambda_n^0 e^{-inu_n^0}$$
$$+ 2t\alpha_{n-1}(n-1)i\lambda_n^0 e^{-i(n-1)u_n^0} + \dots + 2t\alpha_1 i\lambda_n^0 e^{-iu_n^0}\bigr]e^{-t},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(u^0,\lambda^0) = \mathrm{Re}[-2t(e^{-inu_1^0} - e^{-inu_n^0})$$
$$- 2t\alpha_{n-1}(e^{-i(n-1)u_1^0} - e^{-i(n-1)u_n^0}) - \dots - 2t\alpha_1(e^{-iu_1^e} - e^{-iu_n^0})]e^{-t}, \dots,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{n-1}}(u^0,\lambda^0) = \mathrm{Re}[-2t(e^{-inu_{n-1}^0} - e^{-inu_n^0})$$
$$- 2t\alpha_{n-1}(e^{-i(n-1)u_{n-1}^0} - e^{-i(n-1)u_n^0}) - \dots - 2t\alpha_1(e^{-iu_{n-1}^0} - e^{-iu_n^0})]e^{-t}.$$

Введем обозначение $e_{m,p}^k = e^{-iku_m^0} - e^{-iku_p^0}$.

Учитывая (8), приходим к системе уравнений

$$\mathrm{Im}[ne^{-inu_1^0} + \alpha_{n-1}(n-1)e^{-i(n-1)u_1^0} + \dots + \alpha_1 e^{-iu_1^0}] = 0, \dots,$$
$$\mathrm{Im}[ne^{-inu_n^0} + \alpha_{n-1}(n-1)e^{-i(n-1)u_n^0} + \dots + \alpha_1 e^{-iu_n^0}] = 0,$$
$$\mathrm{Re}\bigl[e_{1,n}^n + \alpha_{n-1}e_{1,n}^{n-1} + \dots + \alpha_1 e_{1,n}^1\bigr] = 0, \dots,$$
$$\mathrm{Re}\bigl[e_{n-1,n}^n + \alpha_{n-1}e_{n-1,n}^{n-1} + \dots + \alpha_1 e_{n-1,n}^1\bigr] = 0.$$

Вычитая n-е уравнение этой системы из всех предыдущих, получим систему

$$\operatorname{Im}\big[ne_{1,n}^{n}+\alpha_{n-1}(n-1)e_{1,n}^{n-1}\dots+\alpha_1 e_{1,n}^{1}\big]=0,\dots,$$
$$\operatorname{Im}\big[ne_{n-1,n}^{n}+\alpha_{n-1}(n-1)e_{n-1,n}^{n-1}\dots+\alpha_1 e_{n-1,n}^{1}\big]=0,$$
$$\operatorname{Re}\big[e_{1,n}^{n}+\alpha_{n-1}e_{1,n}^{n-1}\dots+\alpha_1 e_{1,n}^{1}\big]=0,\dots,$$
$$\operatorname{Re}\big[e_{n-1,n}^{n}+\alpha_{n-1}e_{n-1,n}^{n-1}\dots+\alpha_1 e_{n-1,n}^{1}\big]=0.$$

Последняя система равносильна системе

$$(n-1)\operatorname{Re}\alpha_{n-1}\operatorname{Im}e_{1,n}^{n-1}+(n-1)\operatorname{Im}\alpha_{n-1}\operatorname{Re}e_{1,n}^{n-1}+\\ \dots+\operatorname{Re}\alpha_1\operatorname{Im}e_{1,n}^{1}+\operatorname{Im}\alpha_1\operatorname{Re}e_{1,n}^{1}=0,\dots,$$

$$(n-1)\operatorname{Re}\alpha_{n-1}\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{n-1}+(n-1)\operatorname{Im}\alpha_{n-1}\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{n-1}+\\ \dots+\operatorname{Re}\alpha_1\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{1}+\operatorname{Im}\alpha_1\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{1}=0,$$

$$\operatorname{Re}\alpha_{n-1}\operatorname{Re}e_{1,n}^{n-1}-\operatorname{Im}\alpha_{n-1}\operatorname{Im}e_{1,n}^{n-1}+\\ \dots+\operatorname{Re}\alpha_1\operatorname{Re}e_{1,n}^{1}-\operatorname{Im}\alpha_1\operatorname{Im}e_{1,n}^{1}=0,\dots,$$

$$\operatorname{Re}\alpha_{n-1}\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{n-1}-\operatorname{Im}\alpha_{n-1}\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{n-1}+\dots+\operatorname{Re}\alpha_1\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{1}-\operatorname{Im}\alpha_1\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{1}=0. \tag{9}$$

Получили однородную систему линейных уравнений относительно

$$\operatorname{Re}\alpha_{n-1},\operatorname{Im}\alpha_{n-1},\dots,\operatorname{Re}\alpha_1,\operatorname{Im}\alpha_1.$$

Допустим, что существует нетривиальное решение системы (9). Тогда определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
(n-1)\operatorname{Im}e_{1,n}^{n-1} & (n-1)\operatorname{Re}e_{1,n}^{n-1} & \dots & \operatorname{Im}e_{1,n}^{1} & \operatorname{Re}e_{1,n}^{1}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
(n-1)\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{n-1} & (n-1)\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{n-1} & \dots & \operatorname{Im}e_{n-1,n}^{1} & \operatorname{Re}e_{n-1,n}^{1}\\
\operatorname{Re}e_{1,n}^{n-1} & -\operatorname{Im}e_{1,n}^{n-1} & \dots & \operatorname{Re}e_{1,n}^{1} & -\operatorname{Im}e_{1,n}^{1}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{n-1} & -\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{n-1} & \dots & \operatorname{Re}e_{n-1,n}^{1} & -\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{1}
\end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Строки определителя (10) должны быть линейно зависимыми, следовательно, существуют такие числа $\beta_1,\dots,\beta_{2n-2}$, не обращающиеся одновременно в нуль, что справедливы равенства

$$\beta_1(n-1)\operatorname{Im}e_{1,n}^{n-1}+\dots+\beta_{n-1}(n-1)\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{n-1}\\ +\beta_n\operatorname{Re}e_{1,n}^{n-1}+\dots+\beta_{2n-2}\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{n-1}=0,$$

$$\beta_1(n-1)\operatorname{Re}e_{1,n}^{n-1}+\dots+\beta_{n-1}(n-1)\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{n-1}\\ -\beta_n\operatorname{Im}e_{1,n}^{n-1}-\dots-\beta_{2n-2}\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{n-1}=0,\dots,$$

$$\beta_1\operatorname{Im}e_{1,n}^{1}+\dots+\beta_{n-1}\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{1}+\beta_n\operatorname{Re}e_{1,n}^{1}+\dots+\beta_{2n-2}\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{1}=0,$$
$$\beta_1\operatorname{Re}e_{1,n}^{1}+\dots+\beta_{n-1}\operatorname{Re}e_{n-1,n}^{1}-\beta_n\operatorname{Im}e_{1,n}^{1}-\dots-\beta_{2n-2}\operatorname{Im}e_{n-1,n}^{1}=0.$$

Так как $e^{-i(n-p)u_k^0} = e^{-i(\pi - pu_k^0)}$ при любом p, из последней системы получаем

$$(n-1)(\beta_1 \operatorname{Im} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{n-1} \operatorname{Im} e^1_{n-1,n}) \\ - (\beta_n \operatorname{Re} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{2n-2} \operatorname{Re} e^1_{n-1,n}) = 0,$$

$$-(n-1)(\beta_1 \operatorname{Re} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{n-1} \operatorname{Re} e^1_{n-1,n}) \\ - (\beta_n \operatorname{Im} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{2n-2} \operatorname{Im} e^1_{n-1,n}) = 0, \dots,$$

$$\beta_1 \operatorname{Im} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{n-1} \operatorname{Im} e^1_{n-1,n} + \beta_n \operatorname{Re} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{2n-2} \operatorname{Re} e^1_{n-1,n} = 0, \quad (11)$$
$$\beta_1 \operatorname{Re} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{n-1} \operatorname{Re} e^1_{n-1,n} - \beta_n \operatorname{Im} e^1_{1,n} - \dots - \beta_{2n-2} \operatorname{Im} e^1_{n-1,n} = 0.$$

Из первого и предпоследнего уравнения системы (11) следует, что справедливы уравнения

$$\beta_1 \operatorname{Im} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{n-1} \operatorname{Im} e^1_{n-1,n} = 0, \quad \beta_n \operatorname{Re} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{2n-2} \operatorname{Re} e^1_{n-1,n} = 0.$$

Второе и последнее уравнения системы (11) приводят к уравнениям

$$\beta_1 \operatorname{Re} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{n-1} \operatorname{Re} e^1_{n-1,n} = 0, \quad \beta_n \operatorname{Im} e^1_{1,n} + \dots + \beta_{2n-2} \operatorname{Im} e^1_{n-1,n} = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\beta_1(e^{-iu_1^0} - e^{-iu_n^0}) + \dots + \beta_{n-1}(e^{-iu_{n-1}^0} - e^{-iu_n^0}) = 0,$$
$$\beta_n(e^{-iu_1^0} - e^{-iu_n^0}) + \dots + \beta_{2n-2}(e^{-iu_{n-1}^0} - e^{-iu_n^0}) = 0.$$

Используя остальные уравнения системы (11), приходим к системам

$$\begin{gathered} \beta_1(e^{-iu_1^0} - e^{-iu_n^0}) + \dots + \beta_{n-1}(e^{-iu_{n-1}^0} - e^{-iu_n^0}) = 0, \\ \beta_1(e^{-2iu_1^0} - e^{-2iu_n^0}) + \dots + \beta_{n-1}(e^{-2iu_{n-1}^0} - e^{-2iu_n^0}) = 0, \dots, \\ \beta_1(e^{-i(n-1)u_1^0} - e^{-i(n-1)u_n^0}) + \dots + \beta_{n-1}(e^{-i(n-1)u_{n-1}^0} - e^{-i(n-1)u_n^0}) = 0; \end{gathered} \quad (12)$$

$$\begin{gathered} \beta_n(e^{-iu_1^0} - e^{-iu_n^0}) + \dots + \beta_{2n-2}(e^{-iu_{n-1}^0} - e^{-iu_n^0}) = 0, \\ \beta_n(e^{-2iu_1^0} - e^{-2iu_n^0}) + \dots + \beta_{2n-2}(e^{-2iu_{n-1}^0} - e^{-2iu_n^0}) = 0, \dots, \\ \beta_n(e^{-i(n-1)u_1^0} - e^{-i(n-1)u_n^0}) + \dots + \beta_{2n-2}(e^{-i(n-1)u_{n-1}^0} - e^{-i(n-1)u_n^0}) = 0. \end{gathered} \quad (13)$$

Существование нетривиального решения системы (12) равносильно тому, что определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{-iu_1^0} & \dots & e^{-iu_n^0} \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{-i(n-1)u_1^0} & \dots & e^{-i(n-1)u_n^0} \end{vmatrix} = 0.$$

Но это определитель Вандермонда, который отличен от нуля. Следовательно, $\beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 0$. Аналогично из (13) следует, что $\beta_n = \dots = \beta_{2n-2} = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $M_n(t)$ содержит только нулевой вектор.

2. Рассмотрим теперь случай $M_k(t)$, $1 \le k \le n-1$. Функции $F_t(z^k)$ соответствует точка $(u^0, \lambda^0) = \bigl(u_1^0, \dots, u_k^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0\bigr)$, где

$$u_1^0 = \frac{\pi}{k}, \dots, u_k^0 = \frac{(2k-1)\pi}{k}, \quad \lambda_1^0 = \dots = \lambda_k^0 = \frac{1}{k}.$$

В этом случае $C_j(u^0, \lambda^0) = 0$, $j \ne k$, $C_k(u^0, \lambda^0) = -1$. Функция $F_t(z^k)$ является критической точкой для функционала $L(f)$. Следовательно, должны выполняться условия

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}(u^0, \lambda^0) = \dots = \frac{\partial L}{\partial u_k}(u^0, \lambda^0) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(u^0, \lambda^0) = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_{k-1}}(u^0, \lambda^0) = 0. \tag{14}$$

Система (14) равносильна системе

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial a_n}{\partial u_s}(u^0, \lambda^0) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \frac{\partial a_k}{\partial u_s}(u^0, \lambda^0)\right] = 0, \quad 1 \le s \le k,$$
$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial a_n}{\partial \lambda_s}(u^0, \lambda^0) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \frac{\partial a_k}{\partial \lambda_s}(u^0, \lambda^0)\right] = 0, \quad 1 \le s \le k-1.$$

Преобразуем последнюю систему к виду

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re}\left[\frac{\partial a_n}{\partial u_k}(u^0, \lambda^0) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{\partial a_j}{\partial u_k}(u^0, \lambda^0)\right] = 0,\\
\operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial a_n}{\partial u_s} - \frac{\partial a_n}{\partial u_k}\right)(u^0, \lambda^0) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \left(\frac{\partial a_j}{\partial u_s} - \frac{\partial a_j}{\partial u_k}\right)(u^0, \lambda^0)\right] = 0, \quad 1 \le s \le k-1,\\
\operatorname{Re}\left[\frac{\partial a_n}{\partial \lambda_k}(u^0, \lambda^0) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{\partial a_j}{\partial \lambda_s}(u^0, \lambda^0)\right] = 0, \quad 1 \le s \le k-1.
\end{gathered} \tag{15}$$

Получили систему относительно $\operatorname{Re}\alpha_{n-1}$, $\operatorname{Im}\alpha_{n-1}, \dots, \operatorname{Re}\alpha_1$, $\operatorname{Im}\alpha_1$. Определим ранг этой системы. Покажем, что определитель из коэффициентов, при $\operatorname{Im}\alpha_k, \operatorname{Re}\alpha_{k-1}, \dots, \operatorname{Re}\alpha_1, \operatorname{Im}\alpha_1$ отличен от нуля. Это равносильно требованию отличия от нуля определителя

$$\begin{vmatrix}
k \operatorname{Re} e^{-iku_k^0} & (k-1)\operatorname{Im} e^{-i(k-1)u_k^0} & (k-1)\operatorname{Re} e^{-i(k-1)u_k^0} & \dots & \operatorname{Im} e^{-iu_k^0} & \operatorname{Re} e^{-iu_k^0}\\
0 & (k-1)\operatorname{Im} e_{1,k}^{k-1} & (k-1)\operatorname{Re} e_{1,k}^{k-1} & \dots & \operatorname{Im} e_{1,k}^1 & \operatorname{Re} e_{1,k}^1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & (k-1)\operatorname{Im} e_{k-1,k}^{k-1} & (k-1)\operatorname{Re} e_{k-1,k}^{k-1} & \dots & \operatorname{Im} e_{k-1,k}^1 & \operatorname{Re} e_{k-1,k}^1\\
0 & \operatorname{Re} e_{1,k}^{k-1} & -\operatorname{Im} e_{1,k}^{k-1} & \dots & \operatorname{Re} e_{1,k}^1 & -\operatorname{Im} e_{1,k}^1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \operatorname{Re} e_{k-1,k}^{k-1} & -\operatorname{Im} e_{k-1,k}^{k-1} & \dots & \operatorname{Re} e_{k-1,k}^1 & -\operatorname{Im} e_{k-1,k}^1
\end{vmatrix},$$

что следует из первой части доказательства. Таким образом, ранг системы (15) равен $2n-3-(2(k-1)+1) = 2n-2-2k$. Так как переменная $\operatorname{Re}\alpha_k$ не входит в систему (14), размерность многообразия $M_k(t)$ будет на 1 больше, т. е. равна $2n-2k-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Krzyz J.* Coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Ann. Polon. Math. 1968. V. 20. P. 314.

2. *Szapiel W.* A new approach to the Krzyz conjecture // Ann. Univ. Mariae. Curie-Sklodowska Sect. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

3. *Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L.* A coefficient problem for bounded nonvanishing functions // J. Anal. Math. 1977. V. 34. P. 169–190.

4. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 20 июня 2000 г.

Романова Светлана Владимировна
Саратовский гос. университет им. Н. Г. Чернышевского,
Астраханская, 83, Саратов 410026
RomanovaSV@info.sgu.ru