Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 519.21+519.219.5

О КОМПОНЕНТАХ ФАКТОРИЗАЦИОННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ В ПОЛОСЕ

В. С. Лугавов

Аннотация: Найден явный вид компонент факторизационного представления для времени пребывания непрерывного сверху случайного блуждания в полосе.

Ключевые слова: полунепрерывные случайные блуждания, матричная факторизация

Введение

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Обозначим

$$\varphi(\lambda) = E(e^{\lambda\xi_1})$$

и при $n \geq 1$ положим $S(n) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,\ S(0) = 0$. Рассмотрим функционал времени пребывания блуждания $(S(n); n \in [1,k])$ в полосе $(\gamma_1, \gamma_2], \gamma_1 < \gamma_2$:

$$u((\gamma_1,\gamma_2],k) = \operatorname{Card}\{n \in [1,k] : S(n) \in (\gamma_1,\gamma_2]\},\ k \geq 1, \quad u((\gamma_1,\gamma_2],0) = 0.$$

В работе [1] получено тройное преобразование

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} E(e^{\lambda S(k)} \omega^{u((\gamma_1,\gamma_2],k)})$$

распределения $(S(k), u((\gamma_1,\gamma_2],k))$. Указанное преобразование найдено в терминах компонент $\Phi_\pm(\gamma,\lambda,\omega,\rho)$ левой канонической факторизации по оператору T (см. [1] или ниже по тексту) матрицы

$$e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I - \rho\Phi(\lambda))^{-1}(I - \rho\Phi(\lambda)D(\bar\omega))e^{-\lambda D(\bar\gamma)}$$

при $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Здесь и далее используются следующие обозначения: $\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varphi(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$, $\bar\gamma = (0,\gamma)$, где $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ — ширина рассматриваемой полосы $(\gamma_1,\gamma_2]$, $\overline{\omega} = (\omega, \omega^{-1})$; а также для произвольного двумерного вектора $\bar\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ через $D(\bar\alpha)$ обозначена диагональная матрица $\|\delta_{ij}\alpha_i\|_{i,j=\overline{1,2}}$, где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$ $(i,j = \overline{1,2})$.

Работа поддержана Министерством образования Российской Федерации (грант E00–1.0–200).

Явный вид компонент факторизации $\Phi_{\pm}(\gamma, \lambda, \omega, \rho)$ в общем случае недоступен.

Цель настоящей работы — нахождение явных представлений факторизационных компонент $\Phi_{\pm}(\gamma, \lambda, \omega, \rho)$ в предположении, что рассматриваемое случайное блуждание $\{S(n); n \geq 0\}$ непрерывно сверху:

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{1} e^{\lambda k} p_k, \quad p_1 \neq 0.$$

Нахождению компонент $\Phi_{\pm}(\gamma, \lambda, \omega, \rho)$ посвящен § 2 работы. В § 1 приведены необходимые в дальнейшем определения и обозначения (см. также [1]).

§ 1. Вспомогательные определения и обозначения

Рассмотрим над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ произвольную банахову алгебру $\mathscr{B}$ с элементами $f, g \ldots.$ Обозначим через θ нулевой элемент и через e единичный элемент алгебры $\mathscr{B}$. Через $|f|$ обозначим норму элемента f; $|e| = 1$. Пусть $\mathscr{L}$ — преобразование $\mathscr{B}$ в себя, удовлетворяющее условиям:

(i) $\mathscr{L}$ — ограниченное линейное преобразование,

(ii) $\mathscr{L}$ — преобразование проектирования: $\mathscr{L}^2(f) = \mathscr{L}(f)$,

(iii) $\mathscr{L}(f_1 f_2) = \mathscr{L}(f_1 \mathscr{L}(f_2)) + \mathscr{L}(\mathscr{L}(f_1) f_2) - \mathscr{L}(f_1)\mathscr{L}(f_2)$.

Норму преобразования $\mathscr{L}$ определим как наименьшее неотрицательное число $|\mathscr{L}|$, удовлетворяющее неравенству $|\mathscr{L}(f)| \leq |\mathscr{L}|\cdot|f|$. Если преобразование $\mathscr{L}$ ненулевое, то в силу условия (ii) $|\mathscr{L}| \geq 1$. Наряду с преобразованием $\mathscr{L}$ определим преобразование $\mathscr{L}^{\star}$, полагая $\mathscr{L}^{\star}(f) = f - \mathscr{L}(f)$. Нетрудно видеть, что если $\mathscr{L}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii), то $\mathscr{L}^{\star}$ также им удовлетворяет. Обозначим через $\mathscr{L}(\mathscr{B})$ образ алгебры $\mathscr{B}$ при отображении $\mathscr{L}$: $\mathscr{L}(\mathscr{B}) = \{g \in \mathscr{B} : \mathscr{L}(f) = g$ при некотором $f \in \mathscr{B}\}$. Аналогично определим $\mathscr{L}^{\star}(\mathscr{B})$.

Будем говорить, следуя работе [2], что элемент $e - f$ алгебры $\mathscr{B}$ допускает *левую каноническую факторизацию по оператору* $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$-л.к.ф.), если имеет место разложение $e - f = f_+ f_-$ и существуют элементы f_+^{-1}, f_-^{-1}, при этом элементы $f_+ - e, f_+^{-1} - e$ принадлежат $\mathscr{L}(\mathscr{B})$ и элементы $f_- - e, f_-^{-1} - e$ принадлежат $\mathscr{L}^{\star}(\mathscr{B})$.

Если элемент $e - f$ допускает $\mathscr{L}$-л.к.ф., то эта факторизация единственна [2].

Обозначим через $\mathscr{V}_1$ класс функций, представимых при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda x\} v(dx),$$

где v — комплекснозначная конечная мера на прямой. Для функции

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda x\} v(dx)$$

из $\mathscr{V}_1$ определим норму $|f(\lambda)|_1$, полагая ее равной полной вариации меры v на $(-\infty, \infty)$. Относительно введенной нормы и обычных операций сложения, умножения и умножения на константу из C совокупность $\mathscr{V}_1$ является коммутативной банаховой алгеброй с единицей. Обозначим через $\mathscr{V}_2$ класс матриц порядка 2 с элементами из $\mathscr{V}_1$. Для матрицы $F(\lambda) = \|f_{ij}(\lambda)\|_{i,j=\overline{1,2}} \in \mathscr{V}_2$ определим норму

$$|F(\lambda)|_2 = \max_{i=\overline{1,2}} \sum_{j=1}^{2} |f_{ij}(\lambda)|_1.$$

Определяя сложение, умножение в соответствии с правилами алгебры матриц, легко убедиться, что совокупность $\mathscr{V}_2$ есть некоммутативная банахова алгебра с единицей $I = \|\delta_{ij}\|_{i,j=\overline{1,2}}$.

Рассмотрим оператор T, определяемый для функций

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda x\} v(dx) \in \mathscr{V}_1$$

равенством

$$T\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda x\} v(dx)\right) = \int_{(0,\infty)} \exp\{\lambda x\} v(dx),$$

и одновременно определим

$$T(F(\lambda)) = \|T(f_{ij}(\lambda))\|_{i,j=\overline{1,2}}$$

для матриц $F(\lambda) = \|f_{ij}(\lambda)\|_{i,j=\overline{1,2}} \in \mathscr{V}_2$. Преобразования T, $T^\star$ удовлетворяют условиям (i)–(iii), нормы этих преобразований равны 1.

§ 2. Явные представления компонент факторизации $\Phi_\pm(\gamma, \lambda, \omega, \rho)$

Рассмотрим T-л.к.ф.

$$e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I - \rho\Phi(\lambda))^{-1}(I - \rho\Phi(\lambda)D(\overline{\omega}))e^{-\lambda D(\bar\gamma)} = \Phi_+(\gamma, \lambda, \omega, \rho)\Phi_-(\gamma, \lambda, \omega, \rho)$$

при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ матрицы

$$e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I - \rho\Phi(\lambda))^{-1}(I - \rho\Phi(\lambda)D(\overline{\omega}))e^{-\lambda D(\bar\gamma)}. \tag{1}$$

В этом параграфе в предположении, что случайное блуждание $\{S(n); n \geq 0\}$ непрерывно сверху (см. введение), находятся явные представления компонент факторизации $\Phi_\pm(\gamma, \lambda, \omega, \rho)$ матрицы (1). Преобразуя эту матрицу, получим

$$e^{\lambda D(\bar\gamma)}(I - \rho\Phi(\lambda))^{-1}(I - \rho\Phi(\lambda)D(\overline{\omega}))e^{-\lambda D(\bar\gamma)}$$
$$= (1 - \rho^2\varphi(\lambda))^{-1} \begin{pmatrix} 1 - \omega\rho^2\varphi(\lambda) & \rho(1 - \omega^{-1})e^{-\lambda\gamma} \\ \rho(1 - \omega)e^{\lambda\gamma}\varphi(\lambda) & 1 - \omega^{-1}\rho^2\varphi(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Из этого равенства следует, что для нахождения компонент T-л.к.ф. матрицы (1) достаточно построить каноническую факторизацию скалярного множителя и T-л.к.ф. матричного множителя в правой части (2). Каноническая факторизация функции $(1 - z\varphi(\lambda))$ и свойства ее компонент подробно исследованы в монографии [3]. Пусть

$$(1 - z\varphi(\lambda)) = \omega_+(z, \lambda)\omega_-(z, \lambda) \tag{3}$$

— каноническое разложение функции $(1 - z\varphi(\lambda))$ при $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Если случайное блуждание $\{S(n); n \geq 0\}$ непрерывно сверху, то из результатов работы [3, гл. 3, § 16] (см. также [4, гл. 11, § 8]) вытекает следующее представление для $\omega_+(z, \lambda)$:

$$\omega_+(z, \lambda) = 1 - \exp\{\lambda - \mu(z)\}, \quad \operatorname{Re}\lambda \leq 0, \tag{4}$$

здесь $\mu(z)$ — корень уравнения $\varphi(\mu) = z^{-1}$ в области $\operatorname{Re}\mu > 0$.

Обозначим матричный множитель в правой части равенства (2) через $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ и рассмотрим T-л.к.ф. $F = L \cdot R$ матрицы F при $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Пусть

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix},$$

$$H = L^{-1} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad G = R^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Из определения T-л.к.ф. вытекает, что элементы матриц L, R, H, G представимы в виде

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda n} l_{ij}^{(n)}(\gamma,\omega,\rho), \quad r_{ij} = \sum_{n=-\infty}^{0} e^{\lambda n} r_{ij}^{(n)}(\gamma,\omega,\rho), \\ h_{ij} &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda n} h_{ij}^{(n)}(\gamma,\omega,\rho), \quad g_{ij} = \sum_{n=-\infty}^{0} e^{\lambda n} g_{ij}^{(n)}(\gamma,\omega,\rho). \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим $l_{ij}^{(n)} = l_{ij}^{(n)}(\gamma,\omega,\rho)$, $h_{ij}^{(n)} = h_{ij}^{(n)}(\gamma,\omega,\rho)$ при $n = \overline{1,\infty}$, а также $r_{ij}^{(n)} = r_{ij}^{(n)}(\gamma,\omega,\rho)$, $g_{ij}^{(n)} = g_{ij}^{(n)}(\gamma,\omega,\rho)$ при $n = \overline{-\infty,0}$.

Отметим, что для целочисленных блужданий, не уменьшая общности, можно ограничиться случаем, когда γ — целое положительное число. Также отметим, что для нахождения явного вида компонент факторизации $\Phi_\pm(\gamma,\lambda,\omega,\rho)$ достаточно вычислить явно одну из компонент $\Phi_\pm(\gamma,\lambda,\omega,\rho)$.

Теорема. *Если случайное блуждание $\{S(n); n \geq 0\}$ непрерывно сверху, то при целом положительном γ компонента $\Phi_+(\gamma,\lambda,\omega,\rho)$ T-л.к.ф. матрицы* (1) *имеет вид*

$$\Phi_+(\gamma,\lambda,\omega,\rho) = (1-\kappa^{-1}e^{\lambda})^{-1} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix},$$

где $\kappa = \exp\{\mu(\rho^2)\}$, а функции $l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}$ определяются соотношениями (7), (9), (22), (23), *а также соотношениями* (31), (32), (35), (36) (*см. текст доказательства ниже*).

Доказательство теоремы разобьем на три этапа. На первом этапе находятся представления функций l_{ij}, $i,j = \overline{1,2}$, через функции $g_{21}^{(0)}$, $g_{22}^{(0)}$ и через функции $g_{11}^{(n)}$, $g_{12}^{(n)}$ при $n = \overline{-\gamma,0}$. На втором этапе функции $g_{11}^{(n)}$, $g_{12}^{(n)}$, $n = \overline{-\gamma,-1}$, представляются через функции $g_{11}^{(0)}$, $g_{12}^{(0)}$. На третьем этапе находится явный вид функций $g_{ij}^{(0)}$ при $i,j = \overline{1,2}$.

1. Найдем представления функций l_{ij}, $i,j = \overline{1,2}$, через функции $g_{21}^{(0)}$, $g_{22}^{(0)}$ и через функции $g_{11}^{(n)}$, $g_{12}^{(n)}$, $n = \overline{-\gamma,0}$.

Из равенства $L = F \cdot G$ получим

$$l_{ij} = f_{i1}g_{1j} + f_{i2}g_{2j}, \quad i,j = \overline{1,2}. \tag{6}$$

Отсюда в силу равенств (см. (5)) $T(l_{ij}) = l_{ij} - \delta_{ij}$, $T(g_{ij}) = 0$ при $i,j = \overline{1,2}$, а также соотношений (см. (2))

$$T(f_{11}) = -\omega\rho^2 p_1 e^{\lambda}, \quad T(f_{12}) = 0,$$

$$T(f_{21}) = \rho(1-\omega)T(e^{\lambda\gamma}\varphi(\lambda)), \quad T(f_{22}) = -\omega^{-1}\rho^2 p_1 e^{\lambda}$$

вытекает, что

$$l_{11} = 1 + T(l_{11}) = 1 + T(f_{11}g_{11}) + T(f_{12}g_{21}) = 1 + T(-\omega\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{11})$$

и, следовательно,

$$l_{11} = 1 - \omega\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{11}^{(0)}. \tag{7}$$

Таким же образом из равенств

$$\begin{aligned} l_{21} = T(l_{21}) &= T(f_{21}g_{11}) + T(f_{22}g_{21}) \\ &= \rho(1-\omega)T(e^{\lambda\gamma}\varphi(\lambda)g_{11}) + T(-\omega^{-1}\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{21}) \\ &= \rho(1-\omega)T\left(e^{\lambda\gamma}\sum_{k=-\infty}^{1} e^{\lambda k}\sum_{k-1\le n\le 0} g_{11}^{(n)}p_{k-n}\right) - \omega^{-1}\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{21}^{(0)} \end{aligned}$$

следует, что

$$l_{21} = \rho(1-\omega)e^{\lambda\gamma}\sum_{k=-\gamma+1}^{1} e^{\lambda k}\sum_{k-1\le n\le 0} g_{11}^{(n)}p_{k-n} - \omega^{-1}\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{21}^{(0)}. \tag{8}$$

Аналогично соотношениям (7) и (8) устанавливаются равенства

$$l_{12} = -\omega\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{12}^{(0)}, \tag{9}$$

$$l_{22} = 1 - \omega^{-1}\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{22}^{(0)} + \rho(1-\omega)e^{\lambda\gamma}\sum_{k=-\gamma+1}^{1} e^{\lambda k}\sum_{k-1\le n\le 0} g_{12}^{(n)}p_{k-n}. \tag{10}$$

2. Для представления функций $g_{11}^{(n)}$, $g_{12}^{(n)}$, $n = \overline{-\gamma, -1}$, через функции $g_{11}^{(0)}, g_{12}^{(0)}$ предварительно обратимся к равенствам $T^{\star}(l_{11}) = 1$ и $T^{\star}(l_{12}) = 0$ (см. (5)).

Сравнивая коэффициенты при $\exp\{\lambda k\}$, $k = \overline{-\gamma+1, 0}$, в равенстве $T^{\star}(l_{11}) = 1$ в силу (6) имеем

$$-\omega\rho^2 p_1 g_{11}^{(-1)} + (1-\omega\rho^2 p_0)g_{11}^{(0)} = 1; \tag{11}$$

если $\gamma > 1$, то в дополнение к (11) также получим

$$g_{11}^{(n)} - \omega\rho^2 \sum_{n-1\le m\le 0} g_{11}^{(m)}p_{n-m} = 0, \quad n = \overline{-\gamma+1, -1}. \tag{12}$$

Аналогичным путем из равенства $T^{\star}(l_{12}) = 0$ устанавливается

$$g_{12}^{(n)} - \omega\rho^2 \sum_{n-1\le m\le 0} g_{12}^{(m)}p_{n-m} = 0, \quad n = \overline{-\gamma+1, 0}. \tag{13}$$

Соотношения (11), (12) позволяют найти представления элементов $g_{11}^{(-k)}$, $k = \overline{1, \gamma}$, через $g_{11}^{(0)}$; также соотношение (13) позволяет представить $g_{12}^{(-k)}$, $k = \overline{1, \gamma}$, через $g_{12}^{(0)}$.

Выразим $g_{12}^{(-k)}$, $k = \overline{1, \gamma}$, через $g_{12}^{(0)}$. В силу (13) имеем

$$g_{12}^{(-1)} = \frac{1-\omega\rho^2 p_0}{\omega\rho^2 p_1} g_{12}^{(0)},$$

$$g_{12}^{(n-1)} = \frac{1-\omega\rho^2 p_0}{\omega\rho^2 p_1} g_{12}^{(n)} - \frac{p_{-1}}{p_1} g_{12}^{(n+1)} - \frac{p_{-2}}{p_1} g_{12}^{(n+2)} - \ldots - \frac{p_n}{p_1} g_{12}^{(0)}, \quad -\gamma+1 \le n \le -1. \tag{14}$$

Обозначим

$$x_n = g_{12}^{(-n)},\ n = 0,1,2,\ldots,\gamma, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_\gamma \end{pmatrix}, \tag{15}$$
$$\frac{1-\omega\rho^2 p_0}{\omega\rho^2 p_1} = \alpha_1, \quad -\frac{p_{-k+1}}{p_1} = \alpha_k, \quad 2 \le k \le \gamma,$$

также через A обозначим нижнетреугольную матрицу порядка $\gamma+1$ с единичными элементами на главной диагонали и с элементами $-\alpha_i$ на i-й поддиагонали $(i = \overline{1,\gamma})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_\gamma & -\alpha_{\gamma-1} & -\alpha_{\gamma-2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В силу соотношений (14) имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_\gamma & \alpha_{\gamma-1} & \alpha_{\gamma-2} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\bar{x} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Рассмотрим поддиагональную матрицу V порядка $\gamma+1$:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что $A = I_{\gamma+1} - \alpha_1 V - \alpha_2 V^2 - \cdots - \alpha_\gamma V^\gamma$, где $I_{\gamma+1}$ — единичная матрица порядка $\gamma+1$.

Таким образом, $A = f(V)$, где $f(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_\gamma z^\gamma$ — многочлен относительно z. Рассмотрим функцию $b(z) = (f(z))^{-1}$. Так как минимальный многочлен матрицы V равен $z^{\gamma+1}$, значениями $b(z)$ на спектре V будут числа $b(0), b^{(1)}(0), \ldots, b^{(\gamma)}(0)$. Поэтому интерполяционный многочлен Лагранжа — Сильвестра для функции $b(z)$ на спектре матрицы V равен

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_\gamma z^\gamma,$$

здесь $b_k = \frac{b^{(k)}(0)}{k!}$ при $k = \overline{1, \gamma}$ и $b_0 = b(0) = 1$. Следовательно,

$$A^{-1} = b(V) = I_{\gamma+1} + b_1 V + b_2 V^2 + \dots + b_\gamma V^\gamma.$$

Вычисляя степени V, получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_\gamma & b_{\gamma-1} & b_{\gamma-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

С учетом последнего из равенств (15) и (17) вытекает

$$g_{12}^{(-n)} = g_{12}^{(0)} b_n, \quad n = \overline{1, \gamma}. \tag{19}$$

Выразим $g_{11}^{(-k)}$, $k = \overline{1, \gamma}$, через $g_{11}^{(0)}$. В силу соотношений (11), (12) имеем

$$\begin{gathered} g_{11}^{(-1)} = \frac{g_{11}^{(0)}(1 - \omega\rho^2 p_0) - 1}{\omega\rho^2 p_1}, \\ g_{11}^{(n-1)} = g_{11}^{(n)} \frac{1 - \omega\rho^2 p_0}{\omega\rho^2 p_1} - g_{11}^{(n+1)} \frac{p_{-1}}{p_1} \dots - \frac{p_n}{p_1} g_{11}^{(0)}, \quad n = -1, \dots, -\gamma + 1. \end{gathered} \tag{20}$$

Обозначим $y_n = g_{11}^{(0)}$, $n = 0, 1, \dots, \gamma$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_\gamma \end{pmatrix}$, $c = -(\omega\rho^2 p_1)^{-1}$. Используя обозначения (15), из (20) выводим, что

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_\gamma & \alpha_{\gamma-1} & \alpha_{\gamma-2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \bar{y} + \begin{pmatrix} y_0 \\ c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\bar{y} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где матрица A^{-1} определена равенством (18). Из последнего соотношения имеем

$$g_{11}^{(-n)} = g_{11}^{(0)} b_n - \frac{b_{n-1}}{\omega\rho^2 p_1}, \quad n = \overline{1, \gamma}. \tag{21}$$

Из соотношений (8), (11), (12), (21) вытекает, что

$$\begin{aligned} l_{21} = -\omega^{-1}\rho^2 p_1 e^\lambda g_{21}^{(0)} + \frac{1-\omega}{\omega\rho} g_{11}^{(0)} \left[\sum_{d=1}^{\gamma} e^{\lambda d} b_{\gamma-d} + \omega\rho^2 p_1 e^{\lambda(\gamma+1)} \right] \\ - \frac{1-\omega}{\omega\rho} \left[\frac{1}{\omega\rho^2 p_1} \sum_{d=1}^{\gamma-1} e^{\lambda d} b_{\gamma-d-1} + e^{\lambda\gamma} \right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Из соотношений (10), (13), (19) следует, что

$$l_{22} = 1 - \omega^{-1}\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{22}^{(0)} + \frac{1-\omega}{\omega\rho} g_{12}^{(0)} \left[\sum_{d=1}^{\gamma} e^{\lambda d} b_{\gamma-d} + \omega\rho^2 p_1 e^{\lambda(\gamma+1)} \right]. \quad (23)$$

3. В силу равенств (7), (9), (22), (23), для определения факторизационной компоненты L достаточно найти $g_{11}^{(0)}$, $g_{12}^{(0)}$, $g_{21}^{(0)}$, $g_{22}^{(0)}$.

Для фиксированных ω, ρ, γ временно обозначим

$$\alpha(\lambda) = \frac{1-\omega}{\omega\rho} \left[\sum_{d=1}^{\gamma} e^{\lambda d} b_{\gamma-d} + \omega\rho^2 p_1 e^{\lambda(\gamma+1)} \right], \quad (24)$$

$$\beta(\lambda) = -\frac{1-\omega}{\omega\rho} \left[\frac{1}{\omega\rho^2 p_1} \sum_{d=1}^{\gamma-1} e^{\lambda d} b_{\gamma-d-1} + e^{\lambda\gamma} \right]. \quad (25)$$

С учетом этих обозначений соотношения (22), (23) примут вид

$$l_{21} = -\omega^{-1}\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{21}^{(0)} + \alpha(\lambda) g_{11}^{(0)} + \beta(\lambda), \quad (26)$$

$$l_{22} = 1 - \omega^{-1}\rho^2 p_1 e^{\lambda} g_{22}^{(0)} + \alpha(\lambda) g_{12}^{(0)}. \quad (27)$$

Далее отметим, что из равенства $F = L \cdot R$ вытекает равенство $\det F = \det L \cdot \det R$, представляющее каноническую факторизацию функции $\det F$. Так как $\det F = (1 - \rho^2\varphi(\lambda))^2$, из соотношения (4) приходим к равенству

$$\det L = (1 - \kappa^{-1} e^{\lambda})^2,$$

где $\kappa = \kappa(\rho) = \exp\{\mu(\rho^2)\}$. Отсюда и из равенства $R = L^{-1} \cdot F$ следует, что при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ будет

$$r_{11}(1 - \kappa^{-1} e^{\lambda})^2 = l_{22} f_{11} - l_{12} f_{21}. \quad (28)$$

Левая и правая части последнего равенства являются функциями, аналитичными в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и непрерывными в ее замыкании, поэтому соотношение (28) выполняется при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Следовательно, в силу аналитичности r_{11} при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ точка $\lambda = \mu(\rho^2)$ является для функции $l_{22} f_{11} - l_{12} f_{21}$ по крайней мере нулем второго порядка. Так как в точке $\lambda = \mu(\rho^2)$ выполнены соотношения

$$l_{22} = 1 - \omega^{-1}\rho^2 p_1 \kappa g_{22}^{(0)} + \alpha(\mu(\rho^2)) g_{12}^{(0)}, \quad f_{11} = 1 - \omega,$$

$$l_{12} = -\omega\rho^2 p_1 \kappa g_{12}^{(0)}, \quad f_{21} = \rho^{-1}(1-\omega)\kappa^{\gamma},$$

из равенства нулю значения функции $l_{22} f_{11} - l_{12} f_{21}$ в точке $\lambda = \mu(\rho^2)$ вытекает, что

$$1 - \omega^{-1}\rho^2 p_1 \kappa g_{22}^{(0)} + \alpha(\mu(\rho^2)) g_{12}^{(0)} + \omega\rho p_1 \kappa^{\gamma+1} g_{12}^{(0)} = 0. \quad (29)$$

Равенство нулю значения производной функции $l_{22} f_{11} - l_{12} f_{21}$ в точке $\lambda = \mu(\rho^2)$ приводит к равенству

$$\begin{aligned} &\big(-\omega^{-1}\rho^2 p_1 \kappa g_{22}^{(0)} + \alpha'(\mu(\rho^2)) g_{12}^{(0)}\big)(1-\omega) - \big(1 - \omega^{-1}\rho^2 p_1 \kappa g_{22}^{(0)} + \alpha(\mu(\rho^2)) g_{12}^{(0)}\big) \\ &\times \omega\rho^2\varphi'(\mu(\rho^2)) + \omega(1-\omega)\rho p_1 \kappa^{\gamma+1} g_{12}^{(0)} + \omega(1-\omega)\rho p_1 \kappa^{\gamma+1} g_{12}^{(0)} \\ &\times (\gamma + \rho^2\varphi'(\mu(\rho^2))) = 0. \quad (30) \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (29), (30), получим (см. также (24))

$$g_{12}^{(0)} = \left[-\alpha(\mu(\rho^2)) + \alpha'(\mu(\rho^2)) + \omega\rho p_1\kappa^{\gamma+1}\gamma + \frac{\omega}{(1-\omega)}\rho^3 p_1\kappa^{\gamma+1}\varphi'(\mu(\rho^2))\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{1-\omega}{\omega\rho}\sum_{d=2}^{\gamma}(d-1)\kappa^d b_{\gamma-d} + \rho p_1\kappa^{\gamma+1}\left(\gamma + \frac{\omega}{1-\omega}\rho^2\varphi'(\mu(\rho^2))\right)\right]^{-1}, \quad (31)$$

$$g_{22}^{(0)} = \frac{\omega}{\rho^2 p_1\kappa}\left\{1 + \left[\frac{1-\omega}{\omega\rho}\sum_{d=1}^{\gamma}\kappa^d b_{\gamma-d} + \rho p_1\kappa^{\gamma+1}\right]g_{12}^{(0)}\right\}. \quad (32)$$

Далее, аналогично соотношению (28) из равенства $R = L^{-1}\cdot F$ имеем

$$r_{21}(1-\kappa^{-1}e^{\lambda})^2 = -l_{21}f_{11} + l_{11}f_{21}$$

при $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Отсюда аналогично соотношениям (29), (30) получим

$$\omega^{-1}\rho^2 p_1\kappa g_{21}^{(0)} - \alpha(\mu(\rho^2))g_{11}^{(0)} - \beta(\mu(\rho^2)) + \left(1 - \omega\rho^2 p_1\kappa g_{11}^{(0)}\right)\kappa^{\gamma}\rho^{-1} = 0, \quad (33)$$

$$\left(\omega^{-1}\rho^2 p_1\kappa g_{21}^{(0)} - \alpha'(\mu(\rho^2))g_{11}^{(0)} - \beta'(\mu(\rho^2))\right)(1-\omega) - \left(\omega^{-1}\rho^2 p_1\kappa g_{21}^{(0)}\right.$$
$$\left. - \alpha(\mu(\rho^2))g_{11}^{(0)} - \beta(\mu(\rho^2))\right)\omega\rho^2\varphi'(\mu(\rho^2)) - \omega(1-\omega)\rho p_1\kappa^{\gamma+1}g_{11}^{(0)}$$
$$+ \rho^{-1}(1-\omega)\kappa^{\gamma}\left(1 - \omega\rho^2 p_1\kappa g_{11}^{(0)}\right)\left(\gamma + \rho^2\varphi'(\mu(\rho^2))\right) = 0. \quad (34)$$

Решая систему уравнений (33), (34), получим (см. также (25), (31))

$$g_{11}^{(0)} = [\beta(\mu(\rho^2)) - \beta'(\mu(\rho^2)) + \rho^{-1}(\gamma-1)\kappa^{\gamma} + (1-\omega)^{-1}\rho\kappa^{\gamma}\varphi'(\mu(\rho^2))]$$
$$\times[-\alpha(\mu(\rho^2)) + \alpha'(\mu(\rho^2)) + \omega(1-\omega)^{-1}\rho^3 p_1\kappa^{\gamma+1}\varphi'(\mu(\rho^2)) + \omega\rho p_1\gamma\kappa^{\gamma+1}]^{-1}$$
$$= \left[\frac{1-\omega}{\omega^2\rho^3 p_1}\sum_{d=2}^{\gamma-1}(d-1)\kappa^d b_{\gamma-d-1} + \frac{(\gamma-1)\kappa^{\gamma}}{\omega\rho} + (1-\omega)^{-1}\rho\kappa^{\gamma}\varphi'(\mu(\rho^2))\right]g_{12}^{(0)}, \quad (35)$$

$$g_{21}^{(0)} = \frac{\omega}{\rho^2 p_1\kappa}\left\{-\frac{1-\omega}{\omega^2\rho^3 p_1}\sum_{d=1}^{\gamma-1}\kappa^d b_{\gamma-d-1} - \frac{\kappa^{\gamma}}{\omega\rho} + \left[\frac{1-\omega}{\omega\rho}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{d=1}^{\gamma}\kappa^d b_{\gamma-d} + \rho p_1\kappa^{\gamma+1}\right]g_{11}^{(0)}\right\}. \quad (36)$$

Таким образом, компонента $\Phi_+(\gamma,\lambda,\omega,\rho)$ T-л.к.ф. матрицы (1) имеет следующий вид:

$$\Phi_+(\gamma,\lambda,\omega,\rho) = (1-\kappa^{-1}e^{\lambda})^{-1}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22}\end{pmatrix},$$

где функции l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22} определяются равенствами (7), (9), (22), (23), а также равенствами (31), (32), (35), (36). Теорема доказана.

Замечание 1. При $n = \overline{1,\gamma}$ выполняется рекуррентная формула

$$b_n = \sum_{m=1}^{n}\alpha_m b_{n-m}, \quad b_0 = 1,$$

которая приводит b_n к виду

$$b_n = \sum_{l_1+2l_2+\dots+\gamma l_\gamma = n} C_{l_1+l_2+\dots+l_\gamma}(l_1,l_2,\dots,l_\gamma)\alpha_1^{l_1}\alpha_2^{l_2}\cdots\alpha_\gamma^{l_\gamma},$$

где

$$C_{l_1+l_2+\dots+l_\gamma}(l_1, l_2, \dots, l_\gamma) = \frac{(l_1 + l_2 + \dots + l_\gamma)!}{(l_1)!(l_2)!\dots(l_\gamma)!}$$

и суммирование распространено на все наборы целых неотрицательных чисел $(l_1, l_2, \dots, l_\gamma)$, для которых $\sum\limits_{m=1}^{\gamma} ml_m = n$.

Замечание 2. Значение производной $\varphi'(\mu(\rho^2))$ можно выразить через $\kappa(\rho)$ и $\kappa'(\rho)$. Действительно, дифференцируя обе части тождества $\varphi(\mu(\rho^2)) = \rho^{-2}$, получим

$$\sum_{d=-\infty}^{1} d\kappa^{d-1}(\rho)\kappa'(\rho)p_d = -2\rho^{-3}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi'(\mu(\rho^2)) = \sum_{d=-\infty}^{1} d\kappa^{d}(\rho)p_d = \frac{-2k(\rho)}{\rho^3\kappa'(\rho)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лугавов В. С., Рогозин Б. А.* Факторизационные представления для времен пребывания полумарковских блужданий // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 389–406.
2. *Пресман Э. Л.* Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 4. С. 861–900.
3. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 9 января 2003 г.

Лугавов Вячеслав Семенович
Курганский военный институт Пограничной службы Российской Федерации, кафедра математики и информатики, Курган 640016
vestline@kurgan.isp.ru