Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.55

СУБКВАДРАТИЧНОСТЬ УСРЕДНЕННОЙ ФУНКЦИИ ДЕНА ДЛЯ СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. Г. Кукина, В. А. Романьков

Аннотация: Доказано, что для свободных абелевых групп конечного ранга в стандартном представлении усредненная функция Дена субквадратична.

Ключевые слова: усредненная функция Дена, изопериметрическая функция, свободная абелева группа, плоская кристаллографическая группа, граф Кэли

Введение. Пусть $G = F_r/R$ — конечно определенная группа, представленная как фактор-группа свободной группы F_r конечного ранга r от множества свободных порождающих $X_r = \{x_1, \dots, x_r\}$ по нормальной подгруппе $R = ncl(r_1, \dots, r_m)$. Обозначим через $\mathfrak{P}(G) = \langle x_1, \dots, x_r \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ соответствующее представление группы G через порождающие элементы и определяющие соотношения. Любое (не обязательно редуцированное) слово w в алфавите X_r определяет элемент группы F_r. Через $|w|$ мы обозначаем его длину. Естественный гомоморфизм $\phi : F_r \to G$ позволяет говорить о значении слова w в группе G. В частности, запись $w =_G v$ означает, что значения слов w, v в группе G совпадают.

Очевидно, что равенство $w =_G 1$ и включение $w \in R$ равносильны. Они эквивалентны тому, что в группе F_r существует запись вида

$$w = g_1 g_2 \dots g_p, \tag{1}$$

где $g_i = \left(r_{i_j}^{\varepsilon_i}\right)^{f_i}$ для некоторого $f_i \in F_r$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $i_j \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, p\}$. Как обычно, запись g^f означает сопряжение $f^{-1} g f$.

Определение 1. *Площадью S_w слова $w =_G 1$ относительно представления* $\mathfrak{P}(G)$ называется наименьшее значение p, для которого существует запись вида (1).

Определим $\Omega_k = \{w =_G 1 \mid |w| \le k\}$ — множество слов алфавита X_r, значения которых в группе G равны 1, а длина не превосходит фиксированного числа k.

Определение 2. *Функцией Дена группы G относительно представления* $\mathfrak{P}(G)$ называется функция

$$D(k) = \max_{w \in \Omega_k} S_w. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00674) и гранта Минобразования РФ (код проекта Е–02–1.0–191).

Назовем две функции f и g *эквивалентными*, если существуют положительные константы a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 такие, что для любого n верно

$$a_1 f(c_1 n) + b_1 n + d_1 \leq g(n) \leq a_2 f(c_2 n) + b_2 n + d_2.$$

Известно (см. [1]), что функции Дена группы G относительно двух различных представлений $\mathfrak{P}(G)$, $\mathfrak{Q}(G)$ эквивалентны. А это означает, что имеет смысл говорить о функции Дена группы G (не поясняя, в каком представлении рассматривается группа). Известно также (см. [2]), что линейность функции Дена эквивалентна тому, что группа гиперболическая.

По теореме А. Ю. Ольшанского [3] (см. также [4, 5]) если функция Дена субквадратична, то группа гиперболическая.

Известно [1], что функция Дена группы $\mathbb{Z}^r$ при $r \geq 2$ квадратична.

Следующее определение встречается в работе М. Громова [6].

Определение 3. *Усредненной функцией Дена группы G относительно представления* $\mathfrak{P}(G)$ называется функция

$$\sigma(k) = \frac{\sum\limits_{w \in \Omega_k} S_w}{\operatorname{card} \Omega_k}. \tag{3}$$

Рассмотрим два представления группы G:

$$\mathfrak{P}_R(G) = \langle x_1, x_2, \dots x_r \mid r_1, r_2, \dots r_m \rangle, \quad \mathfrak{P}_Q(G) = \langle x_1, x_2, \dots x_r \mid q_1, q_2, \dots q_k \rangle.$$

Тогда для любого слова w алфавита X_r, $w =_G 1$, можно ввести S_w^R — площадь слова w в первом представлении — и S_w^Q — площадь слова w во втором представлении. Обозначим $C = \max\limits_i S_{r_i}^Q$. Тогда понятно, что для любого слова w, задающего единицу в группе G, будет $S_w^Q \leq C S_w^R$. А так как длина слова в обоих представлениях одинакова (одно и то же множество порождающих), то усредненные функции Дена для таких двух представлений эквивалентны.

Следовательно, имеет смысл говорить об усредненной функции Дена группы G относительно порождающего множества X_r.

В нашей статье мы рассматриваем свободные абелевы группы $\mathbb{Z}^r$ с естественным представлением:

$$\mathfrak{P}(\mathbb{Z}^r) = \big\langle x_1, x_2, \dots, x_r \mid x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1} \ (1 \leq i < j \leq r) \big\rangle.$$

Каждому элементу множества Ω_k можно сопоставить замкнутую ориентированную ломаную на графе Кэли длины не больше k с началом (и концом) в единице.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. *Для свободных абелевых групп в естественном представлении $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}^r)$ усредненная функция Дена субквадратична, т. е.*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sigma(k)}{k^2} = 0.$$

В статье [6] М. Громов высказал это утверждение без доказательства (и без ограничения на представление).

Кроме того, в последней части работы доказывается

Предложение. *Для плоских кристаллографических групп с графом Кэли, соответствующим регулярному замощению плоскости, усредненная функция*
Дена субквадратична.

Авторы глубоко признательны рецензенту за ценные замечания и исправления.

Идея доказательства. Граф Кэли свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^r$ ранга r в ее естественном представлении $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}^r)$ реализуем как целочисленную решетку в r-мерном евклидовом пространстве.

Для этого зафиксируем декартову систему координат $Os_1s_2\dots s_r$. В начало системы координат поместим вершину графа Кэли, соответствующую единице; ребра, соответствующие порождающему x_i, пустим параллельно оси Os_i.

Примечание. Введенная система координат имеет естественный смысл: $(s_1,\dots,s_r)\leftrightarrow x_1^{s_1}x_2^{s_2}\dots x_r^{s_r}$.

Выделим в пространстве куб $K_N=[-N;N]^r=\{(s_1,\dots,s_r)\mid |s_i|\le N\ (1\le i\le r)\}$, для которого величина N будет определена далее, и докажем, что справедливы следующие утверждения.

1. Площадь тех замкнутых ломаных длины n, которые не выходят за границу куба K_N, имеет порядок $o(n^2)$.

2. За границу куба K_N выходит «мало» ломаных длины n, т. е. отношение числа выходящих за границу замкнутых ломаных длины n к числу всех замкнутых ломаных длины n (или просто вероятность выхода за границу K_N замкнутой n-звенной ломаной) есть $o(1)$.

Тогда получим следующую оценку: $\sigma(n)\le o(n^2)p_1+C_1n^2p_2$, где p_1 — вероятность того, что ломаная длины n останется в кубе K_N, p_2 — вероятность того, что эта ломаная выйдет за пределы куба K_N, C_1n^2 — максимальная площадь, которая может быть ограничена замкнутой ломаной с не более чем n звеньями. Отсюда следует оценка $\sigma(n)\le o(n^2)+o(n^2)$, что и требовалось.

Ограничение площади.

Лемма об ограниченности площади. *Пусть ломаная, соответствующая слову $w=_{\mathbb{Z}^r}1$ длины n, не выходит за пределы r-мерного куба $K_N=[-N;N]^r$. Тогда площадь слова w в группе $\mathbb{Z}^r$ не превосходит $(r-1)Nn$.*

Доказательство. Каждому элементу $g\in\mathbb{Z}^r$ сопоставим «стандартную запись» — слово $x_1^{s_1}x_2^{s_2}\dots x_r^{s_r}$. Пусть $w=y_1y_2\dots y_n$, где y_i $(1\le i\le n)$ — порождающий или обратный к нему элемент. Пусть w_i — «стандартная запись» элемента $y_1y_2\dots y_i$ для всех $0<i<n$. Для удобства введем еще два пустых слова w_0 и w_n. Запишем новое слово, площадь которого, очевидно, равна площади старого:

$$w'=\big(w_0y_1w_1^{-1}\big)\big(w_1y_2w_2^{-1}\big)\big(w_2\dots w_{n-1}^{-1}\big)\big(w_{n-1}y_nw_n^{-1}\big).$$

Здесь n подслов вида $v_i=w_{i-1}y_iw_i^{-1}$. Заметим, что $v_i=_{\mathbb{Z}^r}1$. Понятно, что $S_w\le\sum S_{v_i}$.

Остается доказать, что $S_{v_i}\le(r-1)N$. Предположим, что $y_i=x_j^{\varepsilon}, \varepsilon\in\{\pm1\}$. Пусть $w_{i-1}=x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}$. Распишем подробнее слово

$$v_i=x_1^{s_1}\dots x_r^{s_r}\cdot x_j^{\varepsilon}\cdot x_r^{-s_r}\dots x_{j+1}^{-s_{j+1}}x_j^{-s_j-\varepsilon}x_{j-1}^{-s_{j-1}}\dots x_1^{-s_1}.$$

Очевидно, что

$$S_{v_i}\le\sum_{t=j+1}^{r}|s_t|\le(r-j)N\le(r-1)N,$$

так как из того, что ломаная лежит в кубе $K_N = [-N; N]^r$, следует, что $|s_t| \le N$. Утверждение доказано.

Ограничение вероятности выхода за куб. Нам понадобится хорошо известная (см. [7])

Лемма Колмогорова. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *— последовательность независимых случайных величин,* $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 < \infty$ $\forall n$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. *Тогда*

$$p\{\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge N\} \le \frac{DS_n}{N^2}.$$

Говоря об 1-мерной ломаной, будем иметь в виду ломаную с вершинами в целых точках числовой прямой, начинающуюся в нуле. На множестве всех 1-мерных ломаных введем классическую вероятностную меру.

Вероятность того, что произвольная 1-мерная ломаная с числом звеньев m выйдет за пределы полосы $\{|y| \le N\}$, не больше чем $\frac{m}{N^2}$.

Действительно, пусть в лемме Колмогорова ξ_n — случайная величина, определяющая направление движения n-го звена, т. е. $\xi_n = 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ и $\xi_n = -1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Тогда $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$ и $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ — координата конца n-го звена. Дисперсия суммы независимых величин равна сумме их дисперсий, значит, $DS_n = n$.

Поэтому за пределы полосы $\{|y| \le N\}$ выходит не больше чем $2^m \frac{m}{N^2}$ ломаных длины m.

Обозначим количество замкнутых 1-мерных ломаных длины m, выходящих за пределы полосы $\{|y| \le N\}$, через Z_m, а количество всех замкнутых 1-мерных ломаных длины m — через Y_m. Тогда

$$Z_m \le 2^m \frac{m}{N^2}, \quad Y_m = C_m^{\frac{m}{2}}.$$

Из формулы Стирлинга $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \to 1$ (см. [8]) следует, что

$$Y_m \ge C_0 \frac{2^m}{\sqrt{m}}.$$

Вероятность выхода m-звенной 1-мерной ломаной за пределы полосы $\{|y| \le N\}$ равна

$$\frac{Z_m}{Y_m} \le \frac{m^{\frac{3}{2}}}{C_0 N^2}.$$

Рассмотрим n-звенную r-мерную замкнутую ломаную. Проектируя ее на i-ю координату, получим 1-мерную замкнутую ломаную длины $m \le n$. Заметим, что количество r-мерных ломаных, переходящих в данную 1-мерную ломаную, одинаково для всех 1-мерных ломаных (обозначим это количество через a_m). Действительно, оставшиеся (ортогональные оси s_i) звенья образуют $(r-1)$-мерную $(n-m)$-звенную замкнутую ломаную и звенья двух ломаных (1-мерной и $(r-1)$-мерной) перемешаны в произвольном порядке (совершенно не зависящем от звеньев этих ломаных). Пусть $P_{n,N}$ — вероятность того, что

n-звенная r-мерная замкнутая ломаная выйдет за пределы полосы $\{|s_i| \leq N\}$. Тогда

$$P_{n,N} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{n} a_m Z_m}{\sum\limits_{m=0}^{n} a_m Y_m}.$$

Заметим, что

$$a_m Z_m \leq a_m Y_m \frac{m^{\frac{3}{2}}}{C_0 N^2} \leq a_m Y_m \frac{n^{\frac{3}{2}}}{C_0 N^2}.$$

Таким образом,

$$P_{n,N} \leq \frac{n^{\frac{3}{2}}}{C_0 N^2}.$$

Заметим, что количество ломаных, выходящих за r-мерный куб $K_N = [-N; N]^r$, меньше суммы количеств ломаных, выходящих за пределы отрезка $[-N; N]$ по одной координате (так как бывают ломаные, которые выходят за пределы этого отрезка по нескольким координатам). Поскольку все координаты равноправны, вероятность того, что n-звенная замкнутая ломаная выйдет за пределы r-мерного куба K_N, не больше чем $rP_{n,N}$.

Окончание доказательства теоремы. Пусть $\tau(n)$ — среднее арифметическое площадей слов длины n. Площадь слова длины n не превосходит $C_1 n^2$. Имеем

$$\tau(n) \leq (r-1)Nn + r\frac{C_1 n^{\frac{7}{2}}}{C_0 N^2.}$$

Положим $N = n^{\frac{5}{6}}$. Тогда

$$\tau(n) \leq \left(r - 1 + r\frac{C_1}{C_0}\right) n^{\frac{11}{6}} = Cn^{\frac{11}{6}}$$

и

$$\sigma(n) = \sum_{i=1}^{n} p^{(i)} \tau(i),$$

где $p^{(i)}$ — вероятность того, что ломаная из Ω_n имеет длину i. Следовательно, $\sigma(n) \leq Cn^{\frac{11}{6}}$.

Теорема доказана.

О некоторых плоских кристаллографических группах. Известно [1], что порядок функции Дена не меняется при конечных расширениях. Следовательно, любое конечное расширение свободной конечно порожденной абелевой группы имеет квадратичную функцию Дена. В частности, плоские кристаллографические группы, которые являются конечными расширениями $\mathbb{Z}^2$, имеют квадратичную функцию Дена.

В этой части статьи рассмотрим группы G с такой системой порождающих X, что граф Кэли $\Gamma(G, X)$ соответствует одному из регулярных замощений плоскости (правильными треугольниками, квадратами или шестиугольниками).

Все такие группы плоские кристаллографические. Согласно классической теореме Федорова всего существует 17 плоских кристаллографических групп. Четырнадцать из них в некоторой системе порождающих имеют один из указанных графов Кэли, оставшиеся три — нет (см. [9]).

Эти три группы (в обозначениях из [10]) таковы:

$$p4m = \big\langle r_1, r_2, r_3 \mid r_1^2, r_2^2, r_3^2, (r_1r_2)^4, (r_2r_3)^4, (r_3r_1)^2 \big\rangle;$$

$$p31m = \langle r, s \mid s^3, r^3, (s^{-1}rsr)^3 \rangle;$$

$$p6m = \big\langle r_1, r_2, r_3 \mid r_1^2, r_2^2, r_3^2, (r_1r_2)^3, (r_2r_3)^6, (r_3r_1)^2 \big\rangle.$$

Выберем определяющие соотношения в группах G с такой системой порождающих X, что граф Кэли $\Gamma(G, X)$ соответствует одному из регулярных замощений плоскости, следующим образом. Возьмем все слова, которые соответствуют обходам одной клетки (т. е. квадрата, треугольника или шестиугольника), с началом и концом в единице.

При таком выборе определяющих соотношений легко ограничить площадь слова, представленного замкнутой ломаной. Если ломаная простая (или «петля»), то ее площадь не больше количества клеток, заключенных внутри нее. Если же ломаная не простая, то она распадается на несколько «петель» и несколько «хвостов» (произвольным образом). Площадь такой ломаной не больше суммы количеств клеток, ограниченных каждой «петлей».

Как было показано во введении, усредненная функция Дена не зависит от выбора определяющих соотношений. Поэтому дальше будем подразумевать, что определяющие соотношения выбраны указанным образом.

Доказательство предложения, сформулированного во введении, похоже на доказательство основной теоремы в случае $r = 2$.

Во-первых, введем систему координат Oxy. Начало координат выберем в вершине графа Кэли, соответствующей единице группы. Для квадратов оси идут вдоль сторон квадрата. Для треугольников одна ось (Ox) идет вдоль стороны треугольника, а другая (Oy) — перпендикулярно ей (по медиане того треугольника, стороны которого не лежат на оси Ox). Единичные отрезки на осях отметим при первом пересечении осей с решеткой (т. е. для треугольников масштабы разные). Для шестиугольников «дорисовываем» замощение до замощения из треугольников и вводим числовые оси в точности так же, как это введено для треугольников.

Ось Ox будем называть горизонтальной, а ось Oy — вертикальной.

Во-вторых, ограничим площадь ломаных, заключенных в квадрате $\{|x| \leq N,\ |y| \leq N\}$.

Если замкнутая ломаная имеет длину n и не выходит за пределы квадрата $\{|x| \leq N,\ |y| \leq N\}$, то ее площадь не превосходит CnN.

В случае «квадратов» «стандартной записью» элемента g будет слово, прочитанное сначала вдоль оси Ox, а потом вдоль оси Oy. Понятно, что ограничение $S_w \leq nN$ доказывается аналогично соответствующему доказательству в теореме.

В случае «треугольников» «стандартной записью» элемента g будет слово, прочитанное сначала по тем ребрам графа Кэли, которые лежат на прямой, находящейся под углом $\frac{\pi}{6}$ с осью Ox, а потом вдоль оси Ox. Тогда легко доказывается неравенство $S_w \leq 2nN$.

Ломаную на графе из шестиугольников рассматриваем как частный случай ломаной на графе из треугольников, причем на графе из шестиугольников у нее площадь меньше (в 6 раз), чем на графе из треугольников. Значит, неравенство $S_w \leq 2nN$ также справедливо.

В-третьих, ограничим вероятность выхода за квадрат $\{|x| \leq N, |y| \leq N\}$.

Понятно, что для групп с «квадратным» графом Кэли все аналогично группе $\mathbb{Z}^2$.

Рассмотрим группы с «треугольным» или «шестиугольным» графом Кэли. Заметим, что вероятность того, что замкнутая ломаная выйдет за пределы квадрата $\{|x| \leq N, |y| \leq N\}$, меньше, чем вероятность того, что ломаная выйдет за пределы шестиугольника

$$\{(N,0),(N/2,N),(-N/2,N),(-N,0),(-N/2,-N),(N/2,-N)\}.$$

А эта вероятность не превосходит суммы вероятностей выхода за полосы $\{|y| \leq N\}$ и двух полос, полученных из нее поворотом на $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ (стороны этих трех полос в точности идут по параллельным сторонам шестиугольника), так как могут быть такие ломаные, которые выходят за пределы нескольких из этих полос.

Поскольку полосы симметричны, вероятности выхода за них одинаковы. Значит, вероятность того, что ломаная выйдет за пределы квадрата $\{|x| \leq N$, $|y| \leq N\}$, не превосходит утроенной вероятности того, что ломаная выйдет за пределы полосы $\{|y| \leq N\}$.

Повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы, завершаем доказательство предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Epstein D. B. A., Cannon J. W., Holt D. F., Levy S. V. F, Paterson M. S., Thurston W. P.* Word Processing in Groups. Boston: Jones and Bartlett, 1992.
2. *Лысенок И. Г.* О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 4. С. 814–832.
3. *Ol'shanskii A. Yu.* Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality // Internat. J. Algebra Comput. 1991. V. 1. P. 281–290.
4. *Bouditch B.* A short proof that a subquadratic isoperimetric inequality implies a linear one // Michigan J. Math. 1995. V. 42. P. 103–107.
5. *Papasoglou P.* On the subquadratic isoperimetric inequality // Geometric Group Theory. Boston: Jones and Bartlett, 1995. P. 149–158.
6. *Gromov M.* Asymptotic invariants of infinite groups // Geometric Group Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 1–295. (LMS Lecture Notes; 182).
7. *Ламперти Дж.* Вероятность. М.: Наука, 1973.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 1.
9. *Беленкова Ж. Т., Романьков В. А.* Регулярные графы Кэли / Ред. журн. «Сиб. мат. журн.» Новосибирск, 1997. 37 С. Деп. в ВИНИТИ, № 802-В97.
10. *Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 23 апреля 2002 г.,

Кукина Екатерина Георгиевна, Романьков Виталий Анатольевич
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
kukin@math.omsu.omskreg.ru, romankov@math.omsu.omskreg.ru