Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 512.54

СОПРЯЖЕННО ПЛОТНЫЕ ПОДГРУППЫ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ЛИЕВА РАНГА 1

С. А. Зюбин, В. М. Левчук

Аннотация: Продолжительное время в различных группах вызывают интерес подгруппы, имеющие непустое пересечение с каждым классом сопряженных элементов группы. Авторы называют их сопряженно плотными и исследуют вопрос П.Ноймана об описании таких подгрупп в группах Шевалле над полем. В основной теореме статьи перечислены сопряженно плотные подгруппы групп Шевалле лиева ранга 1 над локально конечным полем.

Ключевые слова: группа Шевалле, локально конечное поле, сопряженно плотная подгруппа, параболическая подгруппа, мономиальная подгруппа

Введение. Подгруппа, имеющая непустое пересечение с каждым классом сопряженных элементов группы, названа в работе авторов [1] *сопряженно плотной* в группе (термин предложил В. М. Левчук). Такие подгруппы вызывают интерес в различных ситуациях. Так, в «Коуровской тетради» отмечается вопрос о существовании нециклической конечно определенной группы с циклической сопряженно плотной подгруппой [2, вопрос 8.8b]. П. Нойман высказал гипотезу о том, что любая неприводимая сопряженно плотная подгруппа группы $GL_n(K)$ над произвольным полем K совпадает с $GL_n(K)$, за одним исключением, когда $n = \operatorname{char} K = 2$ и K — квадратично замкнутое поле (т. е. с условием разрешимости в K всех квадратных уравнений над K) [2, вопрос 6.38a]. Пока гипотеза подтверждена только для групп $GL_2(K)$ над локально конечным полем K [1]. Из справедливости гипотезы вытекала бы в общем случае параболичность сопряженно плотных подгрупп группы $GL_n(K)$. В связи с этим П. Нойман ставит вопрос: «Насколько этот факт верен для подгрупп других групп лиева типа?» [2, вопрос 6.38b]. Основная в работе теорема отвечает на этот вопрос в классе локально конечных групп Шевалле лиева ранга 1.

Теорема 1. *Пусть $G(K)$ — группа Шевалле лиева ранга 1 над локально конечным полем K и H — ее сопряженно плотная подгруппа. Тогда либо H — параболическая подгруппа, либо $G(K)$ типа A_1, K — квадратично замкнутое поле характеристики 2 и H сопряжена с мономиальной подгруппой.*

Некоторые общие свойства сопряженно плотных подгрупп выявляют леммы 1–3. Для сопряженно плотных подгрупп групп Шевалле лиева ранга 1 над произвольным полем в пп. 2, 3 установлена вспомогательная теорема 2. Вместе с результатами из [3, 4] она редуцирует доказательство теоремы 1 к вопросу об

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код прооекта 03–01–00905).

условиях сопряженной плотности подгруппы $G(F)$ над подполем F (лемма 6). Для групп лиева типа A_1 теорема 1 доказана в [5], а для групп Сузуки — в [6]; см. также [7]. Доказательство теоремы 1 завершается в п. 4 рассмотрением унитарных групп и групп Ри.

1. В леммах 1–3 выявляются некоторые общие свойства сопряженно плотных подгрупп. В [1] отмечалась

Лемма 1. *Центр произвольной группы содержится в любой ее сопряженно плотной подгруппе.*

Доказательство. Нужно лишь заметить, что каждый элемент центра группы составляет ее отдельный класс сопряженных элементов.

Лемма 2. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G. Промежуточная подгруппа $K \leq H \leq G$ является сопряженно плотной в группе G тогда и только тогда, когда сопряженно плотна подгруппа H/K фактор-группы G/K.*

Доказательство. Допустим, что подгруппа H является сопряженно плотной в G. Это равносильно тому, что любой элемент g группы G сопряжен в ней с элементом из H. При $x \in G$ в фактор-группе G/K выполняется равенство $(gK)^{(xK)} = (g^x)K$. Поскольку включения $g^x \in H$ и $g^xK \in H/K$ могут выполняться лишь одновременно, то H/K является сопряженно плотной подгруппой в G/K.

Обратно, пусть H/K — сопряженно плотная подгруппа в G/K и $g \in G$. Тогда существует элемент $x \in G$ такой, что смежный класс $(gK)^{(xK)} = (g^x)K$ лежит в фактор-группе H/K. Отсюда $g^x \in HK = H$. Лемма доказана.

Леммы 1 и 2 показывают, что группа, являющаяся объединением возрастающего центрального ряда, не имеет собственной сопряженно плотной подгруппы. Известно также описание сопряженно плотных подгрупп конечной группы (см., например, [8, следствие 1.7.2; 6, лемма 1]).

Лемма 3. *Сопряженно плотная подгруппа конечной группы совпадает с самой группой.*

Доказательство. Из определения сопряженно плотной подгруппы H произвольной группы G вытекает, что G есть объединение всех подгрупп, сопряженных с H. Оценим порядок объединения, когда G — конечная группа:

$$|G| = \Big|\bigcup_{x\in G} H^x\Big| \leq (|H|-1)\cdot|G:N_G(H)|+1$$
$$\leq (|H|-1)\cdot|G:H|+1 = |G|-|G:H|+1 \leq |G|.$$

Как следует из приведенных соотношений, все неравенства в них являются равенствами. Отсюда $|G:H| = 1$ и $H = G$. Лемма доказана.

2. Далее $G(K)$ есть группа Шевалле лиева ранга 1 над произвольным (если не оговорено иное) полем K, т. е. типа A_1, ${}^2A_2$, ${}^2B_2$ или ${}^2G_2$. Через B обозначается подгруппа Бореля, совпадающая с полупрямым произведением унипотентной подгруппы U и диагональной подгруппы D, а через τ — мономиальный элемент, порождающий вместе с B группу $G(K)$; когда $G(K)$ — присоединенная группа Шевалле, можем предполагать, что $\tau^2 = 1$. Кроме того, $\tau^{-1}h\tau = h_1^{-1}$ $(h \in D)$, где $h_1 = \bar{h}$ при $G ={}^2 A_2$ и $h_1 = h$ в остальных случаях (см. [9, пп. 7.2, 13.7]).

Лемма 4. *Если два элемента подгруппы Бореля B сопряжены в $G(K)$, то по модулю U они мономиально сопряжены. Если какой-либо из элементов неединичен и лежит в U, то сопрягающий их элемент лежит в B.*

Доказательство. Элемент τ и D порождают мономиальную подгруппу группы $G(K)$. Поэтому разложение Брюа группы $G(K)$ дает равенство

$$G(K) = B\langle\tau\rangle B = B \cup (B\tau B). \tag{1}$$

Выберем в подгруппе Бореля $B = U \leftthreetimes D$ произвольный элемент δu ($\delta \in D$, $u \in U$). Диагональный сомножитель сопряженных с ним в B элементов, очевидно, также равен δ. Пусть $f = b\tau c$ ($b, c \in B$). Тогда включение $(\delta u)^f \in B$ равносильно включению $(\delta u)^b \in B \cap (\tau B \tau^{-1}) = D$ и, следовательно, $(\delta u)^{b\tau} = \delta^\tau$, а по модулю U выполняется равенство $(\delta u)^f = \delta^\tau$. Это доказывает первое утверждение леммы.

Допустим, что сопряжение $f^{-1}uf = u^f$ элементом $f \in G(K) \setminus B$ переводит элемент $u \in U$ в элемент из B. В силу (1) существуют элементы $b, c \in B$ с условием $f = b\tau c$, так что $(b\tau c)^{-1}u(b\tau c) = u^f$. Соотношения

$$c(u^f)c^{-1} = \tau^{-1}(b^{-1}ub)\tau \in B \cap (\tau^{-1}U\tau) = 1$$

показывают, что это возможно лишь при $u = 1 = u^f$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть H — подгруппа группы $G(K)$ и $H \cap U \neq 1$. Тогда $H \subset B$ или, с точностью до B-сопряжения H, выполнено условие*

$$H \cap U \neq 1, \quad H \cap (\tau^{-1}U\tau) \neq 1. \tag{2}$$

Доказательство. Если $H \cap U^g = 1$ для всех сопряженных с U подгрупп $U^g \neq U$, то $(H \cap U)^h \subset U$ ($h \in H$), откуда $H \cap U \triangleleft H$ и по лемме 4 $H \subset B$.

Предположим сейчас, что подгруппа H имеет неединичное пересечение с U и с какой-либо сопряженной подгруппой $U^g = g^{-1}Ug$ ($g \in G(K)$), отличной от U. Группа $G(K)$ действует сопряжениями на множестве всех сопряженных с U подгрупп как дважды транзитивная группа подстановок (см., например, [3, Б) и замечание 2]). Поэтому сопряжения элементами из нормализатора $N(U) = B$ действуют транзитивно на множестве сопряженных с U подгрупп, отличных от U. Таким образом, сопряжение подходящим элементом из B трансформирует подгруппу U^g в $\tau^{-1}U\tau$ и в то же время сохраняет условие $H \cap U \neq 1$. Следовательно, с точностью до сопряжения подгруппа H удовлетворяет условию (2). Лемма доказана.

Ранее лемма 5 отмечалась для групп $PSL_2(K)$ в [3, лемма 3] и для случая локально конечного поля K в [4, лемма 2]. В следующем пункте лемма 5 уточняется для сопряженно плотных подгрупп.

3. Группы Шевалле одного и того же нормального типа изоморфны фактор-группам универсальной группы Шевалле по ее центральным подгруппам и, с другой стороны, изоморфны центральным расширениям присоединенной группы Шевалле, центр которой единичен (см., например, [9, 12.1; 10, § 3]). Поэтому в силу лемм 1 и 2 доказательство теоремы 1 (аналогично и ответ на вопрос 6.38б П. Ноймана) достаточно получить только для присоединенных или только для универсальных групп Шевалле. Напомним, что стандартный гомоморфизм $t \mapsto h(t)$ ($t \in K^*$) мультипликативной группы K^* обратимых элементов поля K на диагональную подгруппу универсальной группы Шевалле лиева ранга 1 над K является изоморфизмом.

Далее предполагаем, что группа $G(K)$ совпадает с одной из групп

$$PSL_2(K), \quad PSU_3(K), \quad {}^2B_2(K), \quad {}^2G_2(K). \tag{3}$$

Группа Ри ${}^2G_2(K) = Re(K)$ выделяется как определенная подгруппа группы Шевалле типа G_2 над совершенным полем K характеристики 3, обладающим автоморфизмом θ с условием $3\theta^2 = 1$ [11]. Ее унипотентную подгруппу U представляют (см. [9, 13.6.4; 10, лемма 63]) произведениями $\alpha(t)\beta(u)\gamma(v)$ или тройками (t, u, v) над K, которые умножаются по правилу

$$(t, u, v)(t_1, u_1, v_1) = \big(t + t_1, u + u_1 - tt_1^{3\theta}, v + v_1 - t_1u + tt_1^{3\theta+1} - t^2t_1^{3\theta}\big).$$

В этом случае $(0, 0, K)$ — центр, а $(0, K, K)$ — коммутант подгруппы U. В группе Сузуки ${}^2B_2(K) = Sz(K)$, определяемой над совершенным полем K характеристики 2 с автоморфизмом θ, $2\theta^2 = 1$, подгруппу U представляют парами (t, u) над K с умножением

$$(t, u)(t_1, u_1) = (t + t_1, u + u_1 + t^{2\theta}t_1).$$

Унитарная группа $SU_3(K)$ определяется над полем K с автоморфизмом $\bar{\ }: t \mapsto \bar{t}$ $(t \in K)$ порядка 2. Здесь $h(t) = \mathrm{diag}(t,\ t^{-1}\bar{t},\ \bar{t}^{-1})$, а подгруппу U образуют матрицы

$$(t, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ u & \bar{t} & 1 \end{pmatrix} \quad (t, u \in K,\ u + \bar{u} = t\bar{t}).$$

Соответственно выбору $G(K)$ в (3) подгруппа U нильпотентна ступени нильпотентности c, равной $1, 2, 2$ или 3, а ее гиперцентральный ряд

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_c = U$$

совпадает, как и нижний центральный ряд, со стандартным центральным рядом [12, лемма 2].

Теорема 2. *Сопряженно плотная подгруппа H группы Шевалле $G(K)$ лиева ранга 1 над полем K с точностью до сопряжения либо совпадает с подгруппой Бореля B, либо удовлетворяет условию*

$$H \cap (Z_i \setminus Z_{i-1}) \neq \varnothing, \quad H \cap \tau(Z_c \setminus Z_{c-1})\tau \neq \varnothing \tag{4}$$

при $i = 1$ для $c = 1$ и при любом фиксированном i, $0 < i < c$, если $c > 1$.

Доказательство. Допустим вначале, что $H \subseteq B$. Подгруппа Бореля B является вместе с H сопряженно плотной. В силу леммы 4 обе подгруппы по модулю U совпадают, т. е. $UH = UD = B$. Лемма 4 показывает также, что все $G(K)$-сопряжения, оставляющие U на месте, — это в точности B-сопряжения. Поэтому любое пересечение $H \cap Z_i$ содержит представитель из каждого класса B-сопряженных элементов в Z_i в силу выбора H. Далее, замечаем, что отношение B-сопряженности на Z_1 совпадает с отношениями D- и H-сопряженности. В частности, $H \cap Z_1 \lhd B$. Учитывая, что по лемме 3 K есть бесконечное поле, получаем равенство $H \cap Z_1 = Z_1$, откуда $H \supset Z_1$. В случае, когда U — ступени нильпотентности $c > 1$, аналогично устанавливаем равенства $H \cap Z_i = Z_i$ для остальных значений i. (Равенства вытекают также из [13, теорема 1].) Таким образом, доказано включение $U \subset H$ и вместе с ним равенство $H = B$.

По лемме 5 остается рассмотреть случай, когда H — подгруппа с условием (2) и $c > 1$. В силу сопряженной плотности H можно считать, что

$H \cap \tau(Z_c \setminus Z_{c-1})\tau \neq \varnothing$ и, кроме того, для фиксированного произвольно $i,\ 0 < i < c$, пересечение $H \cap g(Z_i \setminus Z_{i-1})g^{-1}$ не содержится в $H \cap (\tau B \tau)$ при некотором $g \in G(K)$. Однако $\tau B \tau$-сопряжения действуют транзитивно на множестве сопряженных с U подгрупп, отличных от $\tau U \tau$. Заметим, что все члены гиперцентрального ряда подгруппы U являются B-инвариантными и по лемме 4 элементы из различных разностей $Z_j \setminus Z_{j-1}$ $(0 < j \leq c)$ не сопряжены ни в B, ни в $G(K)$. Следовательно, с точностью до $\tau B \tau$-сопряжения подгруппа H удовлетворяет условию (4). Лемма доказана.

С учетом результатов работ [3, 4] из теоремы 2 вытекает

Лемма 6. *Допустим, что K — локально конечное поле. Тогда всякая сопряженно плотная подгруппа H группы $G(K)$ совпадает с точностью до сопряжения либо с B, либо с нормализатором подгруппы $G(F)$ для некоторого подполя F поля K, либо $G(K) = A_1(K)$ и H — мономиальная подгруппа.*

Доказательство. При $G(K) = A_1(K)$ утверждение леммы непосредственно следует из [3, теорема 1] и теоремы 2. В силу теоремы 2 остается рассмотреть случай, когда $c > 1$ и выполнено условие

$$H \cap (U \setminus Z_{c-1}) \neq \varnothing, \quad H \cap Z(V) \neq 1, \tag{5}$$

где $V = \tau U \tau$ и $Z(V)$ — центр подгруппы V. Условие (5) идентично (4) из [4]. Поэтому для случая $G(K) = PSU_3(K))$ лемма вытекает сейчас из [4, теорема 3]. Далее замечаем, что любой элемент разности $U \setminus Z_{c-1}$ при $G(K) = Sz(K)$ есть элемент порядка 4, квадрат которого лежит в центре $Z(U) = Z_1$, а при $G(K) = Re(K)$ его порядок равен 9 и куб также лежит в $Z(U)$. Таким образом, $H \cap Z_1 \neq 1$. Следовательно, выполнено условие соответственно (2) или (3) из [4]; в этих случаях лемма вытекает из [4, теоремы 1 и 2]. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Отметим, что в группе Шевалле лиева ранга 1 над полем существуют только две с точностью до сопряжения параболические подгруппы — подгруппа Бореля B и сама группа. Неприводимые сопряженно плотные подгруппы групп $PSL_2(K)$ над локально конечным полем K описаны в [5]; тем самым, как показывает лемма 6, доказательство теоремы 1 для групп $PSL_2(K)$ завершено. Аналогично в [6] исследован случай групп Сузуки $Sz(K)$.

Рассмотрим оставшиеся группы. Нам потребуется

Лемма 7. *Если F — собственное подполе бесконечного локально конечного поля K и s — произвольное натуральное число, то существует элемент $t \in K$, для которого степени $t, t^2, \ldots, t^s$ не лежат в F.*

Доказательство. В силу локальной конечности поле K содержит конечное подполе P, не лежащее в F. Очевидно, что K содержит также конечные расширения подполя P как угодно большого конечного порядка. Поэтому можно считать, что $|P| = p^m > s^2$, где $p = \operatorname{char} K$. Покажем, что примитивный элемент t поля P удовлетворяет требованиям леммы. Предположим противное, т. е. $t^r \in F$ при каком-либо r, $1 \leq r \leq s$. Тогда $t^r \in P \cap F$. Полагая $|P \cap F| = p^k$, получаем $t^{r(p^k-1)} = 1$, так что число $r(p^k - 1)$ делится на $(p^m - 1)$, причем $k|m$. Следовательно, r делится на число $1 + p^k + p^{2k} + \ldots + p^{m-k}$. В частности,

$$r \geq 1 + p^k + p^{2k} + \ldots + p^{m-k} > p^{m-k} \geq p^{m/2} > s,$$

что противоречит неравенству $r \leq s$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Всякая сопряженно плотная подгруппа унитарной группы $PSU_3(K)$ над локально конечным полем K является параболической.*

Доказательство. Произвольная сопряженно плотная подгруппа H группы $PSU_3(K)$, не являющаяся подгруппой Бореля, по лемме 6 совпадает с точностью до сопряжения с подгруппой, содержащей с индексом 1 или 3 подгруппу $PSU_3(F)$ над некоторым подполем F. Покажем, что $F = K$.

Пусть, напротив, $F \neq K$. Тогда поле K бесконечно по лемме 3 и в силу леммы 7 существует элемент $t_1 \in K \setminus F$, для которого степени t_1, t_1^2, t_1^3 и t_1^9 не лежат в F. Ясно, что от элемента $t = t_1^3$ можем дополнительно требовать выполненным условие $\bar{t} \neq t$. В силу сопряженной плотности подгруппы H существует элемент $\alpha_1 \in PSU_3(F)$, сопряженный с $h(t)$. Прообраз α элемента α_1 при естественном гомоморфизме группы $SU_3(F)$ на $PSU_3(F)$ определен с точностью до умножения на элемент центра группы $SU_3(F)$, причем порядок центра делит 3. Поэтому в группе $SU_3(K)$ сопряжены матрицы α^3 и δ^3, где $\delta = \operatorname{diag}(t, \bar{t}t^{-1}, \bar{t}^{-1})$. Поскольку $t^9 \notin F$, не теряя общности, можно считать, что уже матрицы α и δ сопряжены в $SU_3(K)$ и, следовательно, имеют одинаковые наборы собственных значений.

Так как поле K локально конечно, матрица α лежит в группе $SU_3(P)$ над конечным подполем P поля F и является диагонализируемой над расширением P_t поля P степени 2 или 3. Допустим, что степень $[P_t : P]$ расширения равна 2. Тогда $\bar{x} = x^{|P|}$ $(x \in P_t)$. Следовательно, $t^{|P|} \in \{t^{|P|-1}, t^{-|P|}\}$, откуда либо $t^{|P|} = t^{|P|-1}$ и $t = 1$, либо $t^{|P|} = t^{-|P|}$ и $t^2 = 1$. В обоих случаях $t \in P \subset F$ вопреки выбору t. Пусть $[P_t : P] = 3$. Так как автоморфизм $^{-}$ действует нетривиально на P_t, то $|P| = q^2$ и, следовательно, $\{t^{q^2}, t^{q^4}\} = \{t^{-q^3}, t^{q^3-1}\}$. Отсюда вытекает равенство $t^{q+1} = 1$ и вместе с ним включение $t \in P \subset F$; противоречие. Таким образом, подполе F совпадает с K во всех случаях. Лемма доказана.

Лемма 9. *Всякая сопряженно плотная подгруппа группы Ри $Re(K)$ над локально конечным полем K является параболической.*

Доказательство. Исследуем произвольную сопряженно плотную подгруппу H группы $Re(K)$, не являющуюся подгруппой Бореля. В силу леммы 6 достаточно рассмотреть случай, когда подгруппа H совпадает с группой Ри $Re(F)$ над каким-либо подполем F; в группе $Re(K)$ подгруппа $Re(F)$ самонормализуема.

Предположим, что $F \neq K$ и $t \in K \setminus F$. В 7-мерном представлении [14, § 1] группа $Re(K)$ содержит диагональный элемент

$$h(t) = \operatorname{diag}(t^{\theta}, t^{\theta-1}, t^{2\theta-1}, 1, t^{1-2\theta}, t^{1-\theta}, t^{-\theta}).$$

Выберем элемент δ подгруппы $Re(F)$, сопряженный в $Re(K)$ с $h(t)$. В силу локальной конечности поля K матрица δ лежит в группе Ри $Re(P)$ над конечным подполем P порядка q поля F, причем

$$|Re(q)| = q^3(q-1)(q^3+1), \quad q = 3^{2n+1} \ (n \geq 0).$$

Характеристические многочлены матриц δ и $h(t)$ совпадают и равны некоторому многочлену $f(\lambda)$ степени 7 над P. Так как $h(t) \notin Re(F)$, матрица δ не является диагонализируемой ни над полем F, ни тем более над P. Следовательно, элемент t лежит в расширении поля P нечетной степени $s \leq 7$. Его мультипликативный порядок не делит число $q-1$. В то же время он делит наибольший общий делитель чисел q^3+1 и q^s-1, равный 2, в силу ограничений на s. Полученное противоречие доказывает равенство $F = K$. Лемма доказана.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зюбин С. А., Левчук В. М.* Сопряженно плотные подгруппы группы $GL_2(K)$ над локально-конечным полем K // Симметрия и дифференциальные уравнения: Тр. междунар. конф. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1999. С. 110–112.
2. *Коуровская тетрадь* (Нерешенные вопросы теории групп). 14-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.
3. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 4. С. 421–434.
4. *Нужин Я. Н.* О строении групп лиева типа ранга 1 // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 2. С. 149–158.
5. *Зюбин С. А.* Сопряженно плотные подгруппы группы $PSL_2(K)$ над локально конечным полем K // Сборник работ XXXIV научной студенческой конференции. Красноярск: КрасГУ, 2001. С. 64–69.
6. *Зюбин С. А.* Сопряженно плотные подгруппы группы Сузуки над локально конечным полем // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: ТГУ, 2001. Т. 3. С. 102–105.
7. *Зюбин С. А.* О сопряженно плотных подгруппах групп лиева типа ранга 1 // Междунар. семинар по теории групп: Тез. докл. Екатеринбург: УрГУ — ИММ УрО РАН, 2001. С. 83–84.
8. *Dixon J., Mortimer B.* Permutation groups. New York: Springer-Verl., 1991.
9. *Carter R.* Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972.
10. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
11. *Ree R.* A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (G_2) // Amer. J. Math. 1961. V. 83, N 3. P. 432–462.
12. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 141–161.
13. *Левчук В. М.* Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.
14. *Левчук В. М., Нужин Я. Н.* О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.

Статья поступила 14 мая 2002 г.

Зюбин Сергей Александрович
Томский политехнический университет, кафедра высшей математики,
пр. Ленина, 30, Томск 634050
szubin@yandex.ru

Левчук Владимир Михайлович
Красноярский гос. университет, кафедра алгебры и математической логики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
levchuk@lan.krasu.ru