Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 519.542

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ГРУППЫ $O_{10}^{+}(2)$ ПО ЕЕ СПЕКТРУ

М. А. Гречкосеева

Аннотация: Доказывается, что если множество порядков элементов некоторой конечной группы G совпадает с множеством порядков элементов группы $D = O_{10}^{+}(2)$, то группа G изоморфна группе D. Другими словами, показано, что конечная простая ортогональная группа $O_{10}^{+}(2)$ распознаваема по ее спектру.

Ключевые слова: распознавание по спектру, конечная ортогональная группа

Для конечной группы G обозначим через $\omega(G)$ ее спектр, т. е. множество порядков ее элементов. Через $h(G)$ обозначим число попарно неизоморфных конечных групп H, для которых $\omega(H) = \omega(G)$. Группа G называется *распознаваемой по* $\omega(G)$ (короче, *распознаваемой*), если $h(G) = 1$. Список конечных простых групп, для которых известно, распознаваемы они или нет, содержится в [1]. В частности, в [2, 3] доказано, что $h(G) = 2$ для групп G, изоморфных $O_8^{+}(2)$, $O_7(3)$, $O_8^{+}(3)$, и что группы $O_8^{-}(2)$, $O_{10}^{-}(2)$ распознаваемы. Цель настоящей работы — доказать распознаваемость еще одной ортогональной группы.

Теорема. *Конечная простая группа $O_{10}^{+}(2)$ распознаваема по ее спектру.*

§ 1. Предварительные результаты

Множество $\omega(G)$ конечной группы G замкнуто относительно делимости и однозначно определено множеством $\mu(G)$ тех элементов из $\omega(G)$, которые являются максимальными относительно делимости. Кроме того, множество $\omega(G)$ определяет граф Грюнберга — Кегеля $GK(G)$, вершинами которого служат все простые делители порядка группы G, и два простых числа p и q смежны, если G содержит элемент порядка $p\,q$. Обозначим через $s(G)$ число компонент связности графа $GK(G)$ и через $\pi_i = \pi_i(G)$, $i = 1, \dots, s(G)$, — i-ю компоненту связности. Если группа G имеет четный порядок, то положим $2 \in \pi_1$. Обозначим через $\mu_i = \mu_i(G)$ (соответственно через $\omega_i = \omega_i(G)$) множество чисел $n \in \mu(G)$ ($n \in \omega(G)$) таких, что каждый простой делитель числа n принадлежит π_i.

Лемма 1 (Грюнберг — Кегель). *Если G — конечная группа с несвязным графом $GK(G)$, то выполняется одно из следующих условий:*

1) *$s(G) = 2$, G — группа Фробениуса;*

2) *$s(G) = 2$, $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы в G, B — нормальная подгруппа в BC и AB, BC — группы Фробениуса;*

3) *существует такая неабелева простая группа P, что $P \leq \overline{G} = G/N \leq \mathrm{Aut}(P)$ для некоторой нильпотентной нормальной $\pi_1(G)$-подгруппы N из G*

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (грант УР.04.01.031).

и группа $\overline{G}/P$ *является* $\pi_1(G)$*-подгруппой; более того, граф* $GK(P)$ *несвязен,* $s(P) \geq s(G)$*, и для любого числа* i*,* $2 \leq i \leq s(G)$*, существует* j*,* $2 \leq j \leq s(P)$*, такое, что* $\omega_i(G) = \omega_j(P)$.

Доказательство. См. [4].

Лемма 2. *Пусть* P *— конечная простая группа с несвязным графом* $GK(P)$*. Тогда* $|\mu_i(P)| = 1$ *для* $2 \leq i \leq s(P)$*. Обозначим через* $n_i = n_i(P)$ *единственный элемент в* $\mu_i(P)$*,* $i \geq 2$*. Тогда* P*,* $\pi_1(P)$ *и* $n_i(P)$*,* $2 \leq i \leq s(P)$*, будут такими, как в табл.* 1a–1c *из* [1].

Доказательство. См. [1, лемма 2].

Лемма 3. *Пусть* G *— конечная группа,* $N \lhd G$*,* G/N *— группа Фробениуса с ядром* F *и циклическим дополнением* C*. Если* $(|F|, |N|) = 1$ *и* F *не содержится в* $NC_G(N)/N$*, то* $p|C| \in \omega(G)$ *для некоторого простого делителя* p *числа* $|N|$.

Доказательство. См. [3, лемма 1].

Лемма 4. *Пусть* G *— конечная группа,* $N \lhd G$*,* G/N *— группа Фробениуса с ядром* F *и циклическим дополнением* C*. Если полный прообраз подгруппы* F *в* G *является группой Фробениуса, то*

$$n \cdot \prod_{p \in \pi(N)} p \in \omega(G).$$

Доказательство. См. [5, лемма 1.4].

Обозначим группу $O_{10}^{+}(2)$ через D.

Лемма 5. *Для группы* D *верны следующие утверждения:*
1) $\mu(D) = \{24, 31, 42, 45, 51, 60\}$;
2) $s(D) = 2$, $n_2(D) = 31$;
3) $\mathrm{Aut}(D) = D \cdot 2$ *и* $34 \in \mathrm{Aut}(D)$.

Доказательство. См. [6].

Лемма 6. 1. *Группа* D *содержит подгруппу Фробениуса порядка* $2^{10} \cdot 31$ *с циклическим дополнением порядка* 31.

2. *Группа* D *содержит подгруппу Фробениуса порядка* $17 \cdot 8$ *с циклическим дополнением порядка* 8.

3. *Группы* $A_4(2)$*,* $A_5(2)$ *и* $A_1(31)$ *содержат подгруппу Фробениуса порядка* $31 \cdot 5$ *с циклическим дополнением порядка* 5.

Доказательство. Будем рассматривать группу D' — группу Шевалле $D_5(2)$, изоморфную группе D. Обозначения, касающиеся структуры групп Шевалле, взяты из [7].

1. Рассмотрим в группе D' параболическую подгруппу P_5. По лемме о разложении Леви (см. [8, гл. 8, § 5, теорема 2]) группа $P_5 = U_5 : L_5$, где $U_5 = \left\langle X_r \mid r \in \overline{\Phi_5^+} \right\rangle$ — унипотентная подгруппа порядка 2^{10}, $L_5 = \langle X_r \mid r \in \Phi_5 \rangle$ — подгруппа, изоморфная группе Шевалле $A_4(2)$. В группе L_5 есть элемент x порядка 31. Если группа $\langle U_5, x\rangle$ не является группой Фробениуса, то в группе D есть элемент порядка $31 \cdot 2$, что противоречит п. 1 леммы 5.

2. Из классификации максимальных торов в группах Шевалле, полученной в частях E, G книги [9], следует, что в группе D' есть тор T порядка 17 и в нормализаторе этого тора в группе D' есть элемент y порядка 8. Если группа

$\langle T, y\rangle$ не является группой Фробениуса, то в группе D есть элемент порядка $17 \cdot 2$, что противоречит п. 1 леммы 5.

3. Из той же классификации следует, что в группе $A_4(2)$ есть тор S порядка 31 и элемент z порядка 5, нормализующий этот тор. Так как $31 \in \mu(A_4(2))$ (см., например, [1, табл. 1a]), группа $\langle S, z\rangle$ является группой Фробениуса. Такая же группа Фробениуса лежит и в группе $A_5(2)$, содержащей группу $A_4(2)$.

В группе $A_1(31)$ элемент $h \in H$ порядка 5 нормализует корневую группу X_r порядка 31. Группа $\langle X_r, h\rangle$ является группой Фробениуса, так как $31 \in \mu(A_1(31))$ (см., например, [1, табл. 1b]).

Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть H — конечная группа такая, что $\omega(H) = \omega(D)$.

Лемма 7. *Для группы H имеет место случай* 3 *леммы* 1, *причем $P = D$.*

Доказательство. По лемме 5 группа H удовлетворяет условиям леммы 1.

Пусть для группы H выполнен случай 1 леммы 3. Тогда по лемме 5 из [1] в графе $GK(H) = GK(D)$ есть две компоненты связности, первая из которых является полным графом, а вторая либо представляет собой полный граф, либо получена из полного графа удалением ребра $(3, 5)$.

Заметим, что в графе $GK(D)$ две компоненты связности, причем компонента $\pi_2(D)$ является полным графом, а компонента $\pi_1(D)$ содержит ребро $(3, 5)$, но не является полным графом (например, в ней нет ребра $(2, 17)$). Таким образом, группа H не группа Фробениуса.

Пусть выполнен случай 2 леммы 3. Тогда по лемме 7 из [1] в графе $GK(H) = GK(D)$ есть две компоненты связности, являющиеся полными графами. Это противоречит описанию графа $GK(D)$, сделанному выше.

Итак, в табл. 1a–1c из [1] существует такая неабелева простая группа P, что $P \leq H/N \leq \mathrm{Aut}(P)$, для некоторой нормальной $\pi_1(P)$-подгруппы N из H. Кроме того, существует такое j, $2 \leq j \leq s(P)$, что $n_j(P) = n_2(D) = 31$ и $\omega(P) \subseteq \omega(D)$.

Предположим вначале, что P не принадлежит ни одной из бесконечных серий групп в табл. 1a–1c из [1] и $31 \in \mu(P)$. Тогда группа P совпадает с одной из следующих групп: F_2, F_3, $O'N$, LyS и J_4. Но спектр любой из этих групп не содержится в множестве $\omega(D)$.

Для каждой группы P, принадлежащей бесконечной серии групп, рассмотрим уравнение $n_j(P) = 31$, $j > 1$. Это уравнение решается однотипно для всех серий, и способы решения проиллюстрированы в двух следующих примерах.

Предположим, что $P = A_n$. Тогда $31 \in \omega(A_n)$, а значит, $n \geq 31$ и $11 \in \omega(A_n) \subseteq \omega(H)$, что противоречит п. 1 леммы 5.

Предположим, что $P = {}^2A_{p-1}(q)$, где p — нечетное простое число, q — степень простого числа. Тогда

$$n_2(P) = (q^p + 1)/((q + 1)(p, q + 1)) = 31.$$

Докажем, что это равенство не выполнено ни для каких q и p. Если $(p, q+1) = 1$, то $q^p - 31q = 30$, следовательно, $q \in \{2, 3, 5\}$, но, очевидно, уравнения $2^p = 92$, $3^p = 123$ и $5^p = 185$ не имеют решений. Если $(p, q + 1) = p$, то $q \geq p - 1$.

Рассмотрим отдельно случаи $p = 3$ и $p \geq 5$. В первом случае $q^2 - q - 92 = 0$, что неверно. Во втором случае достаточно доказать, что

$$f_p(q) = \frac{q^p + 1}{q + 1} - 31(q + 1) > 0$$

при $q \geq 4$. Это верно, так как $f_p \geq f_5$ и выполнены следующие неравенства: $f_5(4) > 0$, $f_5'(4) > 0$ и $f_5''(q) > 0$ при $q \geq 4$.

Неразрешимость уравнения $n_j(P) = 31$, $j > 1$, позволяет отбросить все простые группы P в табл. 1a–1c, кроме следующих:

$$A_1(31), \quad A_1(61), \quad A_1(32), \quad A_5(2), \quad A_4(2),$$

$$C_5(2), \quad D_5(2) \simeq D, \quad D_6(2), \quad G_2(5), \quad {}^2B_2(32).$$

Группа P не равна $A_1(61)$, так как иначе $61 \in \omega(H)$, не равна $A_1(32)$, $C_5(2)$, $D_6(2)$, так как иначе $11 \in \omega(H)$. Кроме того, $25 \in \omega({}^2B_2(32))$ (см., например, [1, табл. 1c]) и $25 \in \omega(G_2(5))$ (см. [6, лемма 2.3, п. a]), поэтому $P \neq {}^2B_2(32)$ и $P \neq G_2(5)$.

Пусть P равна $A_4(2)$, $A_5(2)$ или $A_1(31)$. Тогда $17 \notin \omega(\mathrm{Aut}(P))$, но $17 \in \omega(H)$, следовательно, $17 \in \omega(N)$. Обозначим через H_0 полный прообраз группы P в H. По п. 3 леммы 6 в группе P есть подгруппа Фробениуса K с ядром F порядка 31 и циклическим дополнением порядка 5. Кроме того, $n_2(P) = n_2(H) = 31$, и, следовательно, полный прообраз группы F в H_0 — группа Фробениуса с ядром N и дополнением F. Таким образом, полный прообраз группы K в группе H_0 удовлетворяет условиям леммы 4, и, следовательно,

$$17 \cdot 5 \in \omega(H_0) \subseteq \omega(H),$$

что противоречит п. 1 леммы 5. Лемма доказана.

Итак, в группе H есть нормальная π_1-подгруппа N такая, что

$$D \leq H/N \leq \mathrm{Aut}(D).$$

Лемма 8. *Группа N тривиальна.*

Доказательство. Обозначим через H_0 полный прообраз группы P в H. Если группа N отлична от 1, то можно считать, что N — элементарная абелева p-группа, где $p \in \{2, 3, 5, 7, 17\}$ (см., например, доказательство предложения 3.1 из [6]). Кроме того, так как $s(H) > 1$, цетрализатор группы N в H_0 равен N.

Пусть $p = 2$. Рассмотрим в P подгруппу Фробениуса порядка $17 \cdot 8$ из п. 2 леммы 6. Ее полный прообраз в группе H_0 и группа N удовлетворяют условию леммы 3, и, следовательно, $8 \cdot 2 \in \omega(H_0) \subseteq \omega(H)$.

Если $p \neq 2$, то, рассматривая в P подгруппу Фробениуса порядка $2^{10} \cdot 31$ из п. 1 леммы 6 и применяя лемму 3, получим, что $p \cdot 31 \in \omega(H)$.

В любом случае приходим к противоречию с п. 1 леммы 5. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что H совпадает с D. Если $H \neq D$, то по п. 3 леммы 5 будет $H = \mathrm{Aut}(D)$ и $34 \in \omega(H)$. Противоречие с п. 1 той же леммы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.

2. *Shi W., Tang C. J.* A characterization of some orthogonal groups // Prog. Nat. Sci. 1997. V. 7, N 2. P. 155–162.

3. *Мазуров В. Д.* Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.

4. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.

5. *Васильев А. В.* Распознаваемость групп $G_2(3^n)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 130–142.

6. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

7. *Гречкосеева М. А.* О минимальных подстановочных представлениях классических простых групп // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 559–583.

8. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972.

9. Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир. 1973.

Статья поступила 10 апреля 2003 г.

Гречкосеева Мария Александровна
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
grechkoseeva@gorodok.net