Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.54

ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^n$ И ИХ МЕТРИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ

Ю. Г. Решетняк

Аннотация: Рассматриваются квазиизометрические отображения областей в многомерных евклидовых пространствах. Устанавливается, что с точностью до изометрии пространства отображение зависит непрерывно в смысле топологии классов Соболева от своего метрического тензора. В пространстве метрических тензоров берется топология, определяемая посредством сходимости почти всюду. Показано, что если метрический тензор отображения непрерывен, то длина образа спрямляемой кривой определяется той же формулой, что и в случае отображений с непрерывными производными. (Непрерывность метрического тензора отображения не влечет непрерывность его производных.)

Ключевые слова: квазиизометрическое отображение, метрический тензор, локально слабая сходимость якобианов, полунепрерывность функционалов вариационного исчисления

Пусть U — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ принадлежит какому-либо соболевскому классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, и пусть $\nabla f(x) = f'(x)$ — матрица Якоби отображения f. Эта матрица определена для почти всех $x \in U$. Для произвольной $n \times n$-матрицы A пусть A^* — транспонированная матрица A. Матричная функция $G_f(x) = [\nabla f(x)]^* \nabla f(x)$ называется *метрическим тензором* или *тензором Коши — Грина отображения* f.

Если функция f принадлежит классу $\mathscr{C}^3$, т. е. такова, что все ее частные производные не выше третьего порядка определены и непрерывны в U, то метрический тензор отображения f принадлежит классу $\mathscr{C}^2$. В работе [1] показано, что если для отображений f и g класса $\mathscr{C}^3$ области U пространства $\mathbb{R}^n$ метрические тензоры этих отображений близки, то с точностью до изометрии и сами отображения близки друг к другу, т. е. существует изометрическое отображение φ пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что разность $\varphi \circ f - g$ близка к нулю. При этом близость в [1] определяется посредством норм, включающих производные второго порядка для метрических тензоров и третьего порядка для самих отображений. Возникает вопрос: можно ли утверждать, что отображения f и g, с точностью до изометрии, близки одна к другой, если G_f и G_g близки в смысле топологии пространства L_p, а близость отображений определяется в топологии соответствующих соболевских пространств? В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос для случая, когда рассматриваемые отображения являются квазиизометрическими. Необходимые определения и точные формулировки приводятся ниже. Основной результат настоящей статьи содержится в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01009) и программы «Университеты России» (код проекта 04.01.0590).

теореме 1. Доказательство использует некоторые известные результаты вариационного исчисления, в частности, теорему о слабой непрерывности интеграла от якобиана, доказанную в работе [2], и теорему о полунепрерывности функционалов вариационного исчисления, установленную в статье [3]. Применяются также некоторые известные результаты метрической теории пространственных отображений, доказательства которых приводятся в [4, 5].

Заключительная часть данной статьи посвящена изучению отображений, у которых метрический тензор $G_f(x)$ есть непрерывная функция. Этому условию удовлетворяет любое отображение класса $\mathscr{C}^1$, но, вообще говоря, из непрерывности $G_f(x)$ не следует, что $f \in \mathscr{C}^1$. Отображения с непрерывным метрическим тензором мы называем СМТ-*отображениями.* Доказывается, что для произвольного СМТ-отображения длина образа спрямляемой кривой может вычисляться с помощью метрического тензора по той же формуле, что и в случае отображений класса $\mathscr{C}^1$. Этот результат представляет собой часть некоторого первоначального плана, которая в дальнейшем оказалась невостребованной. Автор счел возможным включить данное утверждение в эту статью, поскольку в рассматриваемой здесь общей ситуации оно, по-видимому, не может быть получено простой ссылкой на классические теоремы математического анализа, как это имеет место в случае отображений класса $\mathscr{C}^1$.

§ 1. Обозначения и терминология

1. Далее $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, — вещественные числа. Для произвольных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ символ $\langle x, y\rangle$ означает их скалярное произведение, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — длина вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Множество всех квадратных матриц $X = (x_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ порядка n, элементы которых суть вещественные числа, будем обозначать символом $\mathbb{R}^{n,n}$, $\det X$ — определитель матрицы $X \in \mathbb{R}^{n,n}$. Выражение Xt, где $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ а $t \in \mathbb{R}^n$, означает произведение матрицы X на вектор t, определяемое обычным образом. Единичная матрица порядка n обозначается символом I_n, $\mathrm{I}_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Если $X \in \mathbb{R}^{n,n}$, то X^* — транспонированная матрица X. Для любых $t, u \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\langle Xt, u\rangle = \langle t, X^* u\rangle.$$

Множество всех симметрических матриц $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ обозначим символом $\mathbb{S}(n)$. Выражение $\mathbb{S}^+(n)$ далее означает множество всех положительно определенных симметрических матриц $X \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Обозначим через $\mathbb{O}(n)$ совокупность всех ортогональных матриц порядка n. Группа изометрических преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ обозначается символом $\mathbb{D}_n$. Если $\varphi \in \mathbb{D}_n$, то $\varphi(x) = a + Px$, где $a \in \mathbb{R}^n$, а $P \in \mathbb{O}(n)$.

Для $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ пусть $\|X\|$ — операторная норма матрицы X, т. е. $\|X\| = \sup\limits_{|t|\leq 1} |Xt|$. Для всякого вектора $t \in \mathbb{R}^n$ имеем $|Xt| \leq \|X\||t|$. Для любых $X, Y \in \mathbb{R}^{n,n}$ выполняется неравенство $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$. Если $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ и $\det X \neq 0$, то полагаем $K(x) = \frac{\|X\|^n}{|\det X|}$. Из определения следует, что

$$|X|^n \leq K(X)|\det X|.$$

2. Пусть даны точка $a \in \mathbb{R}^n$ и число $r > 0$. Тогда выражения $B(a,r)$, $\overline{B}(a,r)$, $S(a,r)$ означают соответственно открытый шар, замкнутый шар и сферу в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром a и радиусом r.

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что множество E *лежит строго внутри* U, если его замыкание $\overline{E}$ компактно и содержится в U. Если эти условия выполнены, то будем писать $E \Subset U$.

Символ $\mathrm{mes}_n(E)$ далее означает n-мерную меру Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется областью, если U — связное открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$.

3. Мы будем рассматривать функции со значениями в некотором конечномерном нормированном векторном пространстве $\mathbb{X}$. Приведем определения классов L_p для данного общего случая. (Далее потребуются только случаи, когда $\mathbb{X}$ есть одно из пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^{n,n}$, но, чтобы не рассматривать каждый из этих случаев отдельно, целесообразно вести рассуждения в общей форме.)

Символом $|x|$ будем обозначать норму вектора $x \in \mathbb{X}$. Предположим, что $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N$ — базис пространства $\mathbb{X}$. Всякое отображение $f : U \to \mathbb{X}$ допускает представление $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(x)\mathbf{u}_i$, где f_i — вещественные функции. Будем говорить, что отображение f *измеримо*, если каждая из вещественных функций f_i измерима. Пусть $A \subset U$ — измеримое множество. Для $p \geq 1$ полагаем

$$\|f\|_{L_p(A)} = \left\{ \int\limits_A |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Будем говорить, что функция $f : U \to \mathbb{X}$ интегрируема по измеримому множеству $A \subset U$, если каждая из функций f_i интегрируема по A. В этом случае мы полагаем

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int\limits_A f_i(x)\, dx \right\} \mathbf{u}_i.$$

Класс измеримых функций со значениями в пространстве $\mathbb{X}$, как и класс интегрируемых по $A \subset U$ функций, и значение интеграла функции по множеству A не зависят от выбора базиса $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N$ пространства $\mathbb{X}$.

Если для всякого измеримого множества $E \Subset U$ величина $\|f\|_{L_p(E)}$ конечна, то будем говорить, что f — *функция класса* $L_{p,\mathrm{loc}}(U)$.

4. Говорят, что функция $f : U \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $\mathscr{C}^r(U)$, где $r \geq 1$ — целое число, если f имеет в U все частные производные порядка не выше r, причем эти производные непрерывны в U. Если $f \in \mathscr{C}^r(U)$ для всех r, то говорят, что $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$.

Функция $\varphi : U \to \mathbb{R}$ называется *финитной* в U, если существует компактное множество $A \subset U$ такое, что $\varphi(x) = 0$ при $x \notin A$. Совокупность всех непрерывных финитных относительно области U вещественных функций обозначается символом $\mathscr{C}_0(U)$. Полагаем также $\mathscr{C}_0^r(U) = \mathscr{C}^r(U) \cap \mathscr{C}_0(U)$, $\mathscr{C}_0^\infty(U) = \mathscr{C}^\infty(U) \cap \mathscr{C}_0(U)$.

Будем говорить, что отображение

$$f : x \in U \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$, где $p \geq 1$, если каждая из компонент f_i вектор-функции f имеет в U обобщенные в смысле С. Л. Соболева первые производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$, причем все эти производные принадлежат классу $L_{p,\mathrm{loc}}(U)$. Если $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$, то для почти всех $x \in U$ определена матрица $f'(x)$ — матрица Якоби отображения f. Определитель матрицы $f'(x)$ обозначается здесь символом $J(x, f)$. Естественно называть $J(x, f)$ *якобианом отображения f в точке x*. В общем случае мы можем утверждать только, что функция $x \mapsto J(x, f)$ измерима и определена на множестве U почти всюду.

Будем говорить, что функция f *принадлежит классу* $W^1_p(U)$, где $p \geq 1$, если элементы матричной функции $f'(x)$ суть вещественные функции класса $L_p(U)$. В множестве $W^1_p(U)$ определим некоторую норму следующим способом.

Зададим произвольно неотрицательную функцию $w(x)$ класса $\mathscr{C}^\infty_0(U)$ такую, что

$$\int\limits_U w(x)\,dx = 1.$$

Для отображения $f : U \to \mathbb{R}^n$ класса $W^1_p(U)$ полагаем

$$\|f\|_{L^1_p(U)} = \left\{\int\limits_U |f'(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_{W^1_p(U)} = \left|\int\limits_U f(x)w(x)\,dx\right| + \|f\|_{L^1_p(U)}.$$

Множество $W^1_p(U)$ с нормой, введенной указанным способом, представляет собой банахово пространство. Нормы, получаемые при различном выборе функции $w(x)$, эквивалентны.

5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ — измеримая функция. Будем говорить, что Φ *неотрицательна на множестве* E, если $\Phi(x) \geq 0$ для почти всех $x \in E$. Если $\Phi(x) \leq 0$ для почти всех $x \in E$, то будем говорить, что Φ *неположительна на множестве* E. Будем говорить, что Φ — *функция постоянного знака на множестве* E, если Φ либо неотрицательна, либо неположительна на множестве E.

Если $f : U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$, то для почти всех $x \in U$ определена матрица $G_f(x) = [f'(x)]^* f'(x)$, которую будем называть *метрическим тензором отображения* f. Имеем $\det G_f(x) = [J(x, f)]^2$.

Опишем некоторые классы отображений областей пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если f непрерывно и принадлежит классу $W^1_{n,\mathrm{loc}}(U)$, якобиан $J(x, f)$ отображения f имеет постоянный знак (т. е. либо $J(x, f) \geq 0$ почти всюду в U, либо $J(x, f) \leq 0$ почти всюду в U) и существует постоянная $K < \infty$ такая, что для почти всех $x \in U$ выполняется неравенство

$$|f'(x)|^n \leq K|J(x, f)|. \tag{1.1}$$

Символ $K(f, U)$ (или просто $K(f)$) означает наименьшую из таких постоянных K. Всякое отображение с ограниченным искажением является открытым дискретным отображением. При этом существует множество $B_f \subset U$ меры нуль такое, что всякая точка $x \notin B_f$ имеет окрестность, на которой f взаимно однозначно.

Если $f : U \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением, не являющееся тождественно постоянным, то для почти всех $x \in U$ якобиан $J(x, f)$ отличен от нуля [5]. В этом случае метрический тензор $G_f(x)$ принадлежит $\mathbb{S}^+(n)$ для почти всех $x \in U$. Пусть $0 < \lambda_1^2 \le \lambda_2^2 \le \dots \le \lambda_n^2$ — собственные числа матрицы $G_f(x)$. Имеем $\det G_f(x) = |J(x,f)|^2 = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ называется *квазиизометрическим*, если f принадлежит классу $W^1_{1,\mathrm{loc}}(U)$, якобиан отображения f имеет в U постоянный знак и существует такое конечное число $L \ge 1$, что матрица $f'(x)$ для почти всех $x \in U$ удовлетворяет условию: для всякого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{L}|\xi| \le |f'(x)\xi| \le L|\xi|. \tag{1.2}$$

Наименьшее из таких чисел L далее обозначается одним из символов $L(f,U)$, $L(f)$ или просто L_f и называется *коэффициентом квазиизометричности* f.

Всякое квазиизометрическое отображение является отображением с ограниченным искажением [4, 5]. Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$ — квазиизометрическое отображение. Тогда если $L_f < 2^{1/2n-2}$, то f является локально топологическим отображением. Справедливость этого утверждения установлена в работе [6]. (Доказательство приводится также и в монографии [4].)

Отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ назовем *отображением с непрерывным метрическим тензором* или, короче, CMT-*отображением*, если f удовлетворяет следующим условиям:

1) f непрерывно и принадлежит классу $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(U)$;

2) якобиан отображения f имеет постоянный знак на всякой связной компоненте множества U;

3) существует непрерывная матричная функция $G_f : U \in \mathbb{S}^+(n)$ такая, что

$$[f'(x)]^* f'(x) = G_f(x) \tag{1.3}$$

для почти всех $x \in U$.

Если $f : U \to \mathbb{R}^n$ — CMT-отображение, то его метрическим тензором мы будем называть всегда именно ту определенную всюду непрерывную матричную функцию $G_f(x)$, которая указана в данном определении.

Если вектор-функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathscr{C}^1$ и $J(x,f) \ne 0$ для всех $x \in U$, то f есть CMT-отображение. Обратное, однако, неверно. Соответствующий пример приводится в § 3.

§ 2. Устойчивость квазиизометрических отображений относительно вариации метрического тензора

Лемма 1. *Пусть U — выпуклое открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}^k$ — непрерывное отображение класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(U)$. Предположим, что существует постоянная $L < \infty$ такая, что для почти всех $x \in U$ выполняется неравенство $|f'(x)| \le L$. Тогда для любых $x, y \in U$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|. \tag{2.1}$$

Доказательство этого простого утверждения приводится, например, в [4].

Пусть $(f_\nu : U \to \mathbb{R})_{\nu\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$. Будем говорить, что данная последовательность *ограничена в* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$, если для всякого компактного множества $A \subset U$ существует постоянная $R(A) < \infty$ такая, что при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\|f_\nu\|_{L_1(A)} + \|f'_\nu\|_{L_p(A)} < R(A).$$

Предположим, что последовательность функций $(f_\nu : U \to \mathbb{R})_{\nu\in\mathbb{N}}$ класса $L_{1,\mathrm{loc}}(U)$ ограничена в $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$ и функция $f_0 : U \to \mathbb{R}$ класса $L_{1,\mathrm{loc}}(U)$ такова, что для всякого компактного $A \subset U$ величина $\|f_\nu - f_0\|_{L_1(A)}$ стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Тогда предельная функция f_0 принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$. (Доказательство см., например, в [6, гл. 1, теорема 2.4].) Производные $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}$ сходятся локально слабо к производным предельной функции f_0 в том смысле, что для всякой функции $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(U)$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство

$$\int\limits_U \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_U \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Действительно, при $\nu \to \infty$ имеем

$$\int\limits_U \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_U f_\nu(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \to -\int\limits_U f_0(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx$$
$$= \int\limits_U \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Равенство (2.2) выполняется для всякой функции $\varphi \in \mathscr{C}_0(U)$, но это более сильное утверждение далее не потребуется.

Основная лемма. *Пусть $(f_\nu : U \to \mathbb{R}^n)_{\nu\in\mathbb{N}}$ — последовательность отображений класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, где $p > n$, области U пространства $\mathbb{R}^n$, локально ограниченная в $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, причем якобиан каждого из отображений f_ν неотрицателен в области U. Предположим, что при $\nu \to \infty$ функции f_ν сходятся в $L_{1,\mathrm{loc}}(U)$ к некоторой вектор-функции $f_0 : U \to \mathbb{R}^n$, а их метрические тензоры $G_{f_\nu}(x)$ сходятся почти всюду в U к некоторой матричной функции $G_0(x)$. Тогда если $\det G_0(x) > 0$ для почти всех $x \in U$, то матричная функция $G_0(x)$ является метрическим тензором предельного отображения f_0, т. е. для почти всех $x \in U$ имеет место равенство $G_0(x) = G_{f_0}(x) = [f_0'(x)]^* f_0'(x)$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Тогда $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$ и для почти всех $x \in U$ определены неотрицательные квадратичные формы $Q_x(\xi)$ и $\widetilde{Q}_x(\xi)$, где $Q_x(\xi) = |f_0'(x)\xi|^2 = \langle G_{f_0}(x)\xi, \xi\rangle$ и $\widetilde{Q}_x(\xi) = \langle G_0(x)\xi, \xi\rangle$.

Матрица квадратичной формы Q_x является метрическим тензором отображения f_0 в точке x, матрица квадратичной формы $\widetilde{Q}_x$ — предел $G_0(x)$ метрических тензоров отображений f_ν. Лемма будет доказана, если мы установим, что квадратичные формы Q_x и $\widetilde{Q}_x$ совпадают для почти всех $x \in U$.

Согласно теореме о локально слабой сходимости якобианов [2, теорема 2] для всякой функции $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(U)$ имеет место равенство

$$\int\limits_U J(x, f_0)\varphi(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_U J(x, f_\nu)\varphi(x)\,dx.$$

При каждом m имеем $J(x, f_\nu) = \sqrt{\det G_{f_\nu}}$. Согласно условию леммы $G_{f_\nu}(x) \to G_0(x)$ для почти всех $x \in U$. Функция $\sqrt{\det G_{f_\nu}}(x)$ при каждом m мажорируется суммой $n!$ слагаемых вида $\sqrt{\left|g^{(m)}_{1i_1}(x)g^{(m)}_{2i_2}(x)\ldots g^{(m)}_{mi_\nu}(x)\right|}$. Из условий леммы следует, что каждая из функций $\sqrt{|g^{(m)}_{ki_k}(x)|}$ интегрируема в степени $p > n$, причем для всякого компактного множества $A \subset U$ последовательность интегралов

$$\int\limits_A \Big[\sqrt{|g^{(m)}_{ki_k}(x)|}\Big]^p\,dx, \quad m = 1, 2, \dots,$$

является ограниченной. Если $A \subset U$ — компактное множество такое, что $\varphi(x) = 0$ при $x \notin A$, то из сказанного вытекает, что ограничена сверху также и последовательность интегралов

$$\int\limits_A \big[\sqrt{\det G_{f_\nu}}\big]^{p/n}|\varphi(x)|^{p/n}\,dx = \int\limits_U \big[\sqrt{\det G_{f_\nu}}\big]^{p/n}|\varphi(x)|^{p/n}\,dx,$$

$m = 1, 2, \dots$. Так как $p/n > 1$ и при $m \to \infty$

$$\sqrt{\det G_{f_\nu}}(x) \to \sqrt{\det G_0}(x)$$

для почти всех $x \in U$, отсюда следует, что при $m \to \infty$

$$\int\limits_U J(x, f_\nu)\varphi(x)\,dx = \int\limits_U \sqrt{\det G_\nu}\varphi(x)\,dx \to \int\limits_U \sqrt{\det G_0}\varphi(x)\,dx.$$

Значит, для всякой функции $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(U)$ выполняется равенство

$$\int\limits_U \sqrt{\det G_0(x)}\varphi(x)\,dx = \int\limits_U J(x, f_0)\varphi(x)\,dx = \int\limits_U \sqrt{\det G_{f_0}(x)}\varphi(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\det G_0(x) = \det G_{f_0}(x) \tag{2.3}$$

для почти всех $x \in U$. Обозначим через E'_0 множество тех $x \in U$, для которых либо левая, либо правая часть равенства (2.3) не определена, либо они обе определены, но равенство не выполняется. Пусть E''_0 — множество тех $x \in U$, для которых не выполняется неравенство $\det G_0(x) > 0$. Тогда $E_0 = E' \cup E''$ — множество меры нуль.

Зададим произвольно единичный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ и неотрицательную функцию $\varphi(x)$ класса $\mathscr{C}_0(U)$. Пусть

$$G_{f_\nu}(x) = \big(g^{(\nu)}_{ij}(x)\big)_{i,j=1,2,\dots,n} \quad \text{и} \quad G_0(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1,2,\dots,n}.$$

Функции $g^{(\nu)}_{ij}(x)$, $\nu = 1, 2, \dots$, принадлежат классу $L_{p/2,\mathrm{loc}}$ и при $\nu \to \infty$ сходятся почти всюду к функции $g_{ij}(x)$. Последовательность $g^{(\nu)}_{ij}(x)$, $\nu = 1, 2, \dots$, является ограниченной в $L_{p/2,\mathrm{loc}}(U)$. Отсюда вытекает, что для всякой функции $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(U)$ при $\nu \to \infty$ имеет место сходимость

$$\int\limits_U \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g^{(\nu)}_{ij}(x)\xi_i\xi_j\varphi(x)\,dx \to \int\limits_U \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(x)\xi_i\xi_j\varphi(x)\,dx.$$

Теперь заметим, что в первом интеграле здесь подынтегральное выражение равно $\langle G_{f_\nu}(x)\xi, \xi\rangle\varphi(x) = |f'_\nu(x)\xi|^2\varphi(x)$, а во втором оно равно $\langle G_0(x)\xi, \xi\rangle\varphi(x)$. Функция $X \in \mathbb{R}^{n,n} \mapsto |X\xi|^2$, как легко проверяется, является выпуклой в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n,n}$. При $\nu \to \infty$ матричные функции $f'_\nu(x)$, как показано выше, локально слабо сходятся к $f_0'(x)$. Применяя теорему о полунепрерывности функционалов вариационного исчисления, доказанную в работе [3], получим, что имеет место неравенство

$$\int\limits_U |f_0'(x)\xi|^2\varphi(x)\,dx \leq \varliminf_{\nu\to\infty}\int\limits_U |f_\nu'(x)\xi|^2\varphi(x)\,dx.$$

Интеграл в правой части этого неравенства равен

$$\int\limits_U \langle G_{f_\nu}(x)\xi,\xi\rangle\varphi(x)\,dx$$

и при $\nu\to\infty$ стремится к пределу, равному

$$\int\limits_U \langle G_0(x)\xi,\xi\rangle\varphi(x)\,dx.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\int\limits_U |f_0'(x)\xi|^2\varphi(x)\,dx \leq \int\limits_U \langle G_0(x)\xi,\xi\rangle\varphi(x)\,dx.$$

Так как неотрицательная функция $\varphi(x)$ здесь выбрана произвольно, то для всякого единичного вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$ для почти всех $x\in U$ выполняется неравенство

$$|f_0'(x)\xi|^2 \leq \langle G_0(x)\xi,\xi\rangle. \tag{2.4}$$

Пусть R — счетное множество точек единичной сферы $S(0,1)$ пространства $\mathbb{R}^n$, всюду плотное в $S(0,1)$, и $r\mapsto\xi_r$ — биективное отображение $\mathbb{N}$ на R. Обозначим через $E_r\subset U$ множество тех точек $x\in U$, для которых либо одна из величин $|f_0'(x)\xi|^2$ и $\langle G_0(x)\xi,\xi\rangle$ не определена, либо они обе определены, но неравенство (2.4) для $\xi=\xi_r$ не выполняется. По доказанному E_r — множество меры нуль. Пусть $E=\bigcup\limits_{r=0}^{\infty}E_r$. Мера множества E равна нулю. Возьмем произвольно $x\in U\setminus E$. Определены квадратичные формы $Q_x(\xi)=\langle G_{f_0}(x)\xi,\xi\rangle$ и $\widetilde{Q}_x(\xi)=\langle G_0(x)\xi,\xi\rangle$. Так как $x\notin E_0$, то для данного x выполняется равенство

$$[J(x,f_0)]^2=\det G_0(x).$$

С другой стороны, для этого x для всякого $\xi\in R$ имеет место неравенство $Q_x(\xi)\leq\widetilde{Q}_x(\xi)$. Так как левая и правая части этого неравенства суть непрерывные функции ξ и множество R всюду плотно на сфере $S(0,1)$, то для данного $x\in U$ имеем

$$Q_x(\xi)\leq\widetilde{Q}_x(\xi) \tag{2.5}$$

для любого единичного вектора ξ. Согласно условию $\det G_0(x)\neq 0$ и, значит, квадратичная форма $\widetilde{Q}_x(\xi)$ является положительно определенной. Так как определители форм $\widetilde{Q}_x$ и Q_x совпадают, из соотношения (2.5) следует, что эти формы совпадают. Лемма доказана. □

Пусть U — область в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что U *удовлетворяет условию достижимости*, если существуют точка $a\in U$ и число $D<\infty$ такое, что для любой точки $x\in U$ существует спрямляемая кривая, содержащаяся в области U, соединяющая точку a с точкой x и такая, что длина этой кривой не превосходит D.

Теорема 1. *Пусть область U в пространстве $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию достижимости.*

Предположим, что дана последовательность $(f_\nu : U \to \mathbb{R}^n)_{\nu\in\mathbb{N}}$ квазиизометрических отображений области U, удовлетворяющая следующим условиям:

а) *существует постоянная $L < \infty$ такая, что $L(f_\nu) \le L$ при каждом $\nu \in \mathbb{N}$;*

б) *метрические тензоры $G_{f_\nu}(x)$ сходятся почти всюду в U к некоторой матричной функции $G_0(x)$.*

Тогда найдется квазиизометрическое отображение $f_0 : U \to \mathbb{R}^n$ такое, что матричная функция G_0 является метрическим тензором отображения f_0 и существует последовательность $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ изометрических отображений пространства $\mathbb{R}^n$, для которой для всякого $p > 1$ выполняется соотношение

$$\left\|\varphi_\nu^{-1} \circ f_\nu - f_0\right\|_{W_p^1(U)} \to 0 \tag{2.6}$$

при $\nu \to \infty$.

Доказательство. Будем считать функции f_ν такими, что $J(x, f_\nu) \ge 0$ при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ почти всюду в U и $f_\nu(a) = 0$, где a — центр данной области $U \in J(d, D)$. Общий случай, очевидно, сводится к этому заменой f_ν на функцию $\tau_\nu \circ f_\nu$, где $\tau_\nu(y) = Q(y - f_\nu(a))$ и Q — ортогональная матрица такая, что $\det Q = -1$, если якобиан f_ν неположителен в U, и $\det Q = 1$, если этот якобиан в U неотрицателен.

Отображения f_ν непрерывны. Из условия теоремы вытекает, что при каждом ν для почти всех $x \in U$ имеет место неравенство $\|f_\nu'(x)\| \le L$. В силу леммы 1 отсюда вытекает, что для всякой точки $x \in U$ выполняется неравенство $|f_\nu(x)| \le LD$. На каждом компактном множестве $A \subset U$ последовательность f_ν равностепенно равномерно непрерывна, как следует из леммы 1.

Пусть $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательность открытых множеств такая, что $U_m \Subset U_{m+1}$ при каждом m и справедливо равенство $U = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} U_m$. Положим $V_m = U \setminus \overline{U}_m$. Последовательность множеств $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ убывает, и их пересечение пусто. Отсюда $\mathrm{mes}_n(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Так как при каждом ν для почти всех $x \in U$ выполняется неравенство $\|f_\nu'(x)\| \le L$, для всякого $p \ge 1$ имеем

$$\|f_\nu'\|_{L_p(U)} \le L\{\mathrm{mes}_n(U)\}^{1/p}. \tag{2.7}$$

Последовательность $(f_\nu')_{\nu\in\mathbb{N}}$, таким образом, ограничена в $L_p(U)$, и, значит, последовательность вектор-функций $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ является ограниченной в $W_p^1(U)$ для всякого $p > 1$.

При каждом $m \in \mathbb{N}$ замыкание множества U_m компактно и содержится в U. В силу леммы 1 отсюда вытекает, что последовательность функций f_ν равностепенно равномерно непрерывна на каждом из множеств U_m. Применяя теорему Арцела в сочетании с классической диагональной конструкцией, получим, что из последовательности $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ можно извлечь подпоследовательность (f_{ν_k}), $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k < \dots$, равномерно сходящуюся на каждом из множеств U_m. Так как U — объединение множеств U_m, для всякого $x \in U$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} f_{\nu_k}(x) = f_0(x)$. Тем самым определено некоторое отображение $f_0 : U \to \mathbb{R}^n$. Для всякого m вектор-функция f_0 непрерывна на множестве U_m как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Отсюда, очевидно, следует, что функция f_0 непрерывна на множестве U. Поскольку последовательность функций $(f_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ в силу неравенства (2.7) ограничена в $W_p^1(U)$, каково бы ни было $p > 1$, то $f_0 \in W_p^1(U)$ для всех $p > 1$.

Покажем, что построенная вектор-функция f_0 и есть искомая. Последовательность функций $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, а значит, и ее подпоследовательность $(f_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ограничены в $W_p^1(U)$, каково бы ни было $p>1$. Матричные функции G_{f_ν} сходятся к матричной функции G_0 почти всюду, и так как элементы матриц G_{f_ν} образуют последовательности, ограниченные в $L_\infty(U)$, матричные функции G_{f_ν} сходятся к G_0 в $L_p(U)$ при всяком $p>1$. Каждое из отображений f_ν является квазиизометрическим. При этом $L(f_\nu)\le L=\mathrm{const}<\infty$ для всех ν. Следовательно, при каждом ν для почти всех $x\in U$ для любого вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$ имеем неравенства $|\xi|/L\le|f'_\nu(x)\xi|\le L|\xi|$, и, значит, для почти всех $x\in U$ для всякого вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$|\xi|^2/L^2\le\langle G_{f_\nu}(x)\xi,\xi\rangle\le L^2|\xi|^2.$$

Пусть E_ν — множество тех $x\in U$, для которых эти неравенства не выполняются хотя бы для одного $\xi\in\mathbb{R}^n$, E_0 — множество тех $x\in U$, для которых $G_{f_\nu}(x)$ не стремится к $G_0(x)$. Объединение E множеств $\{E_0,E_1,E_2,\dots\}$ является множеством меры нуль, и для всякого $x\notin E$ выполняются неравенства

$$|\xi|^2/L^2\le\langle G_0(x)\xi,\xi\rangle\le L^2|\xi|^2.$$

В частности, мы получаем, что квадратичная форма $\langle G_0(x)\xi,\xi\rangle$ является положительно определенной для почти всех $x\in U$.

Из доказанного видно, что для последовательности $(f_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ выполнены все условия основной леммы и, значит, матричная функция $G_0(x)$ является метрическим тензором отображения f_0. Таким образом, отображения f_{ν_k} для каждого $p>1$ сходятся слабо в $W_p^1(U)$ к отображению f_0, а метрические тензоры отображений f_{ν_k} сходятся в $L_{p/2}(U_m)$ к метрическому тензору отображения f_0 при каждом m. Теорема 4 статьи [2] теперь позволяет заключить, что f_{ν_k} при $k\to\infty$ сходится к f_0 в $W_p^1(U_m)$ при $k\to\infty$ для всякого номера m.

Докажем, что на самом деле $f_{\nu_k}\to f_0$ в $W_p^1(U)$ при $k\to\infty$. Действительно, функции f'_{ν_k} сходятся по мере к функции f_0' на каждом из множеств U_m, а потому и на всем множестве U. Имеем $|f'_{\nu_k}|\le L=\mathrm{const}<\infty$ для почти всех $x\in U$. Так как $\operatorname{mes}U<\infty$, в силу теоремы Лебега отсюда вытекает, что

$$\int\limits_{\widetilde{U}}\left|f'_{\nu_k}-f'_0\right|^p dx\to 0$$

при $k\to\infty$ и, значит, $\|f_{\nu_k}-f_0\|_{L_1^1(U)}\to 0$ при $k\to\infty$. Первое слагаемое в выражении для нормы в $W_p^1(U)$, которое приводится выше, стремится к нулю в силу того, что функции f_{ν_k} сходятся к функции f_0 при $k\to\infty$ почти всюду.

Фиксируем произвольно значение $p>n$ и для $\nu\in\mathbb{N}$ положим

$$\delta_\nu=\inf_{\varphi\in\mathbb{D}_n}\|\varphi\circ f_\nu-f_0\|_{L_p^1(U)}.$$

Покажем, что $\delta_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$. Предположим, что это не так. Тогда $\Delta=\varlimsup\limits_{\nu\to\infty}\delta_\nu>0$. Пусть последовательность номеров $(\nu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ такова, что $\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_m<\dots$ и $\delta_{\nu_m}\to\Delta$ при $\nu\to\infty$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\delta_{\nu_m}>\varepsilon=\Delta/2>0$ при каждом m. Применяя предыдущие рассуждения к последовательности отображений $\tilde f_m=f_{\nu_m}$, $m=1,2,\dots$, получим некоторую подпоследовательность, сходящуюся в $W_p^1(U)$ к некоторому отображению $\tilde f_0$. Простоты ради будем считать, что $\tilde f_m=f_{\nu_m}$ и есть требуемая подпоследовательность. Это, очевидно, не умаляет общности. Матричная функция $G_0(x)$ является метрическим тензором отображения $\tilde{f}_0$. Таким образом, мы получаем квазиизометрические отображения f_0 и $\tilde{f}_0$ области U в $\mathbb{R}^n$, метрические тензоры которых совпадают. Теорема 3 работы [2] позволяет заключить, что существует мёбиусово отображение θ такое, что $\tilde{f}_0 = \theta \circ f_0$. Для почти всех $x \in U$ имеем

$$G_0(x) = \left[\tilde{f}_0'(x)\right]^* \tilde{f}_0'(x) = \left[f_0'(x)\right]^* [\theta'(x)]^* \theta'(x) f_0'(x).$$

Так как θ — мёбиусово отображение, то $[\theta'(x)]^*\theta'(x) = \lambda(x)\mathrm{I}_n$ и, следовательно, для почти всех $x \in U$ выполняется равенство

$$G_0(x) = \lambda(x)[f_0'(x)]^*\mathrm{I}_n f_0'(x) = \lambda(x)G_0(x).$$

Отсюда вытекает, что $\lambda(x) \equiv 1$ и, значит, для всех $x \in U$ матрица $\theta'(x)$ ортогональна. Следовательно, θ — изометрия пространства $\mathbb{R}^n$.

Согласно определению δ_{ν_m} при каждом m будет

$$\delta_{\nu_m} = \inf_{\varphi \in \mathbb{D}_n} \|\varphi \circ f_{\nu_m} - f_0\|_{L_p^1(U)},$$

тем самым при каждом m найдется $\varphi_m \in \mathbb{D}_n$ такое, что

$$\|\varphi_m \circ f_{\nu_m} - f_0\|_{L_p^1(U)} < \delta_{\nu_m} + 1/m.$$

Имеем $f_0 = \theta^{-1} \circ \tilde{f}_0$. Следующее равенство верно для всякой точки $x \in U$, для которой определены все величины, стоящие в обеих частях этого равенства:

$$\left\|\varphi_m' f_{\nu_m}'(x) - \tilde{f}_0'(x)\right\| = \left\|\varphi_m' f_{\nu_m}'(x) - \theta' f_0'(x)\right\| = \left\|[\theta']^{-1}\varphi_m' f_{\nu_m}'(x) - f_0'(x)\right\|.$$

Это позволяет заключить, что

$$\begin{aligned}\|\varphi_m \circ f_{\nu_m} - \tilde{f}_0\|_{L_p^1(U)} &= \left\|\varphi_m' f_{\nu_m}' - \tilde{f}_0'\right\|_{L_p(U)} \\ &= \left\|[\theta']^{-1}\varphi_m' f_{\nu_m}' - f_0'\right\|_{L_p(U)} = \|\theta^{-1} \circ \varphi_m \circ f_{\nu_m} - f_0\|_{L_p^1(U)} \geq \delta_{\nu_m} + 1/m.\end{aligned}$$

Так как $\|\varphi_m \circ f_{\nu_m} - \tilde{f}_0\|_{L_p^1(U)} \to 0$ при $m \to \infty$, то из доказанных неравенств следует, что $\Delta_m \to 0$ и, значит, $\Delta = \varlimsup\limits_{\nu \to \infty} \delta_\nu = 0$. Согласно определению величины δ_ν для каждого номера $\nu \in \mathbb{N}$ найдется отображение $\varphi_\nu \in \mathbb{D}_n$ такое, что $\|\varphi_\nu \circ f_{\nu_m} - f_0\|_{L_p^1(U)} < \delta_\nu + 1/\nu$. Последовательность отображений $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ и есть искомая. $\square$

Следствие. *Пусть $f_\nu : U \to \mathbb{R}^n$ — последовательность отображений с непрерывным метрическим тензором области $U \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям теоремы* 1. *Предположим, что метрические тензоры G_{f_ν} отображений сходятся к матричной функции $G_0(x)$ такой, что $g_0(x) \in \mathbb{S}^+(n)$ при каждом $x \in U$, причем сходимость равномерна на всяком компактном множестве $A \subset U$. Тогда найдется отображение $f_0 : U \to \mathbb{R}^n$ такое, что $G_0(x)$ является метрическим тензором отображения f_0 и существует последовательность $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ движений пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что $\varphi_\nu \circ f_\nu$ сходится в $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$ к отображению f_0.*

Замечание. В условиях следствия, вообще говоря, нельзя утверждать, что отображения $\varphi_\nu \circ f_\nu$ сходятся к f_0 в $W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(U)$.

§ 3. Отображения с непрерывным метрическим тензором

Если $f : U \to \mathbb{R}^n$ — СМТ-отображение, то, вообще говоря, f может не принадлежать классу $\mathscr{C}^1$.

Пример 1. Пусть $n = 2$. На плоскости $\mathbb{R}^2$ введем полярную систему координат (r, φ), где $r \geq 0$ и $-\infty < \varphi < \infty$. Декартовы координаты точки выражаются через r и φ по формулам $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$.

Пусть $\theta(r)$ — строго убывающая функция на интервале $(0, \infty)$ такая, что $\theta(r) \to \infty$ при $r \to 0$, а ее производная $\theta'(r)$ стремится к нулю при $r \to 0$. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение, сопоставляющее точке с полярными координатами (r, ψ), где $r > 0$, точку с полярными координатами (ρ, θ), где $\rho = r$, $\psi = \theta(r) + \varphi$, а начало координат переводящее в себя. Всякий луч, исходящий из начала координат, этим отображением преобразуется в спираль, делающую бесконечное множество оборотов вокруг начала. Отсюда ясно, что данное отображение f недифференцируемо в точке $O = (0, 0)$.

Простые вычисления показывают, что метрический тензор отображения f имеет вид $G(x) = (\delta_{ij} + \theta'(|x|)h_{ij}(x))_{i,j=1,2}$, где функции $h_{ij}(x)$ непрерывны в каждой точке $x \neq 0$ и $h_{ij}(x) = O(1)$ при $x \to 0$. Функция $G(x)$ тем самым непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, f — СМТ-отображение. В то же время $f \notin \mathscr{C}^1$.

Пусть $n > 2$. Представим $\mathbb{R}^n$ как прямое произведение $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$. Произвольная точка $x \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет собой пару $x = (y, z)$, где $y \in \mathbb{R}^{n-2}$, а $z \in \mathbb{R}^2$. Преобразование $F : (y, z) \in \mathbb{R}^n \mapsto (y, f(z))$, где f — описанное выше отображение плоскости $\mathbb{R}^2$, очевидно, является СМТ-отображением, причем F недифференцируемо ни в одной точке $(n-2)$-мерной плоскости $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}$ и, стало быть, $F \notin \mathscr{C}^1$. $\triangleright$

Пример 2. Покажем, что из равномерной сходимости метрических тензоров отображений не следует равномерная сходимость производных. Ограничимся случаем $n = 2$. Для этой цели модифицируем отображение f, построенное в примере 1. В полярных координатах отображение f задается формулой $f(0) = 0$ и для всякой точки $x = (r, \varphi)$ с $r > 0$ имеем $f(x) = (r, \theta(r) + \varphi)$, где функция θ определена и является монотонной на промежутке $(0, \infty)$, причем $\theta(r) \to \infty$, а $\theta'(r) \to 0$ при $r \to 0$. Для $\nu \in \mathbb{N}$ пусть θ_ν есть функция, равная $\theta(2/\nu) + 1/\nu$ в промежутке $(0, 1/\nu)$ и $\theta(r)$ при $r \geq 2/\nu$. Кроме того, потребуем, чтобы функция θ_ν на промежутке $(0, 2/\nu]$ удовлетворяла условию $|\theta'_\nu(r)| \leq |\theta'(r)|$.

Пусть $f_\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение плоскости $\mathbb{R}^2$, переводящее начало координат в себя и точку с полярными координатами (r, φ), где $r > 0$, в точку с полярными координатами $(r, \theta_\nu(r) + \varphi)$. Легко проверяется, что $f_\nu \to f$ и $G_{f_\nu}(x) \to G_f(x)$ при $\nu \to \infty$ для всякой точки $x \in \mathbb{R}^2$, причем сходимость равномерна во всяком круге $B(0, R)$. Матричные функции $f'_\nu(x)$, однако, не сходятся равномерно к функции $f'(x)$ на множестве $B(0, R) \setminus \{0\}$ ни при каком $R > 0$, ибо в противном случае матричная функция $f'(x)$ имела бы предел при $x \to 0$ и отображение f было бы дифференцируемым в точке 0. $\triangleright$

Наша цель — доказать, что для всякого СМТ-отображения длина образа спрямляемой кривой может вычисляться по тем же формулам, что и в случае отображений класса $\mathscr{C}^1$.

Точное определение понятия кривой было дано М. Фреше еще в начале 20-го века. Мы будем иметь дело с ориентированными кривыми в смысле Фреше (см. [7]). *Параметризованной кривой в метрическом пространстве M* с метрикой ρ называется всякое непрерывное отображение x некоторого отрезка $[a, b]$ в пространство M. На множестве параметризованных кривых может быть определено некоторое отношение эквивалентности. Согласно М. Фреше кривая в пространстве M есть класс K эквивалентных в смысле этого отношения параметризованных кривых. Элементы класса K называют *параметризациями кривой* K.

Пусть K_ν — последовательность кривых в метрическом пространстве M. Говорят, что кривые K_ν при $\nu \to \infty$ *сходятся к кривой* K, если существуют параметризованные кривые $x_\nu : [a, b] \to M$, $x : [a, b] \to M$ такие, что x_ν при каждом ν есть параметризация кривой K_ν, x — параметризация кривой K и при $\nu \to \infty$ отображения x_ν равномерно сходятся на промежутке $[a, b]$ к x, т. е. $\rho[x_\nu(t), x(t)]$ равномерно стремится к нулю при $\nu \to \infty$.

Пусть $x : [a, b] \to M$ — параметризованная кривая в метрическом пространстве M. *Разбиением промежутка* $[a, b]$ будем называть всякую конечную последовательность $\alpha = \{t_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, точек этого промежутка такую, что $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$. Точки t_i при этом называются *узлами разбиения* α. Полагаем $|\alpha| = \max\limits_{1 \le i \le m}(t_i - t_{i-1})$. Положим также

$$l(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{m} \rho[x(t_i), x(t_{i-1}].$$

Символом $l(x, a, b)$ обозначим длину параметризованной кривой x. Имеем $l(x, a, b) = \sup\limits_{\alpha} l(x, \alpha) = \lim\limits_{|\alpha| \to 0} l(x, \alpha)$. Если K — кривая в пространстве M, то длины всех ее параметризаций совпадают.

Общее значение длин параметризаций кривой K называется ее *длиной* и обозначается далее символом $s(K)$.

Кривая K называется *спрямляемой*, если ее длина конечна, $s(K) < \infty$. Всякая спрямляемая кривая допускает натуральную параметризацию $x : [0, l] \to M$, т. е. такую, что при каждом s длина дуги кривой с концами в точках $x(0)$ и $x(s)$ равна s.

Пусть дано открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $F(x, \xi)$ — функция переменных $x \in U$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Мы будем предполагать, что F удовлетворяет следующему условию.

Н. Функция $F(x, \xi)$ непрерывна на множестве $U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ и положительно однородна первой степени относительно ξ, т. е. для любой точки $x \in U$ и любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ для всякого числа $\lambda \ge 0$ имеет место равенство $F(x, \lambda\xi) = \lambda F(x, \xi)$.

По функции F определим некоторый функционал на множестве всех спрямляемых кривых, лежащих в открытом множестве U. Именно, пусть $x(s)$, $0 \le s \le l$, — параметризация кривой K, где параметр s — длина дуги. Тогда полагаем

$$l_F(K) = l_F(x, 0, l) = \int\limits_0^l F[x(s), x'(s)]\, ds.$$

Предложение 1. *Пусть* K_ν *— последовательность спрямляемых кривых в* $\mathbb{R}^n$*, сходящаяся к спрямляемой кривой* K*. Тогда если длины кривых* K_ν *имеют пределом длину кривой* K*, то для любой функции* $F(x, \xi)$*, удовлетворяющей условию* Н, *имеет место равенство* $l_F(K) = \lim\limits_{\nu \to \infty} l_F(K_\nu)$.

Доказательство данного предложения содержится в классическом труде [8]. Оно может быть получено также как частный случай общей теоремы, доказанной в работе [3].

Пусть K — спрямляемая кривая, лежащая в области U пространства $\mathbb{R}^n$, и пусть $x : [0, l] \to U$ — натуральная параметризация этой кривой. Предположим, что функция F переменных $x \in U$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию H. Для разбиения $\alpha = \{t_i\}$, $i = 0, 1, \dots, m$, промежутка $[0, l]$ положим

$$l_F(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{m} F[x(t_{i-1}), x(t_i) - x(t_{i-1})].$$

Предложение 1 позволяет показать, что имеет место равенство

$$l_F(K) = l_F(x, 0, l) = \lim_{|\alpha| \to 0} l_F(x, \alpha). \tag{3.1}$$

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим ломаную K_α, вписанную в кривую K и имеющую вершинами точки $x(t_i)$. Пусть $x_\alpha(t)$ — параметризация этой ломаной, определенная условием: для $t \in [t_{i-1}, t_i]$ для всех значений $i = 1, 2, \dots, m$ выполняется равенство $x_\alpha(t) = x(t_{i-1}) + a_i(t - t_{i-1})$, где $a_i = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$. При $|\alpha| \to 0$ ломаные K_α сходятся к кривой K и их длины имеют пределом длину кривой K. В силу предложения 1 отсюда следует, что $l_F(K_\alpha) \to l_F(K)$ при $|\alpha| \to 0$.

Требуемый результат получается сравнением суммы $l_F(x, 0, l)$ с интегралом, которым выражается величина $l_F(x_\alpha, 0, l)$.

Лемма 2. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$ — СМТ-отображение открытого множества U пространства $\mathbb{R}^n$, $G(x)$ — его метрический тензор. Тогда отображение f является локально топологическим и для всякой точки $p \in U$ по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $B(p, \delta) \subset U$ и для любых $x_1, x_2 \in B(p, \delta)$ выполняется неравенство*

$$\left| |f(x_2) - f(x_1)| - \sqrt{\langle G(p)(x_2 - x_1), x_2 - x_1 \rangle} \right| \leq \varepsilon |x_2 - x_1|. \tag{3.2}$$

Доказательство. Симметрическая матрица $G(p)$ является положительно определенной. Пусть R — симметрическая матрица такая, что $R^2 = G(p)$, и φ — аффинное отображение $t \in \mathbb{R}^n \mapsto p + R^{-1}t$. Положим $u(t) = f[\varphi(t)]$. Область определения u — открытое множество $V = \varphi^{-1}(U)$.

Пусть $E \subset U$ — множество меры нуль такое, что отображение f дифференцируемо для всякого $x \in U \setminus E$. Положим $E' = \varphi^{-1}(E)$. Имеем $\mathrm{mes}_n(E') = 0$. Если $t \in V \setminus E'$, то отображение u дифференцируемо в точке t. При этом $u'(t) = f'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f'[\varphi(t)]R^{-1}$. Метрический тензор отображения $u(t)$ в точке $t \in V \setminus E'$ имеет вид

$$[u'(t)]^* u'(t) = R^{-1} G[\varphi(t)] R^{-1}.$$

Матричная функция $G_u(t) = R^{-1} G[\varphi(t)] R^{-1}$ допускает непрерывное продолжение на все множество V. Имеем $G_u(0) = R^{-1} G(p) R^{-1} = \mathrm{I}_n$, откуда следует, что $G_u(t) = \mathrm{I}_n + \Phi(t)$, где $\Phi(t) = G_u(t) - G_u(0) \to 0$, при $t \to 0$.

Для всякой точки $t \in V$, не принадлежащей множеству E', для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|u'(t)\xi|^2 = \langle [u'(t)]^* u'(t)\xi, \xi \rangle = |\xi|^2 + \langle \Phi(t)\xi, \xi \rangle. \tag{3.3}$$

Далее, $|\langle\Phi(t)\xi, \xi\rangle| \le |\Phi(t)\xi||\xi| \le \|\Phi(t)\||\xi|^2$. Пусть λ таково, что $1 < \lambda < 2^{1/2n-2}$. Найдем $\eta > 0$ такое, что шар $B(0, \eta)$ содержится в множестве V и для всякого $t \in B(0, \eta)$ выполняются неравенства $\|\Phi(t)\| < (\lambda^2 - 1)/\lambda^2 < \lambda^2 - 1$. Ввиду равенства (3.3) для почти всех $t \in B(0, \eta)$ справедливы неравенства

$$|\xi|^2(1 - \|\Phi(t)\|) \le |u'(t)\xi|^2 \le |\xi|^2(1 + \|\Phi(t)\|),$$

откуда вытекает, что для таких t

$$\frac{1}{\lambda}|\xi| \le |u'\xi| \le \lambda|\xi|.$$

В силу теоремы Мартио и Вяйсяля [9], цитированной выше, из доказанного следует, что отображение u локально топологическое. В частности, u является топологическим на некоторой окрестности точки 0. Мы можем, очевидно, считать, что шар $B(0, \eta)$ и является этой окрестностью.

Таким образом, отображение $u = f \circ \varphi$ является топологическим на некотором шаре $B(0, \eta)$. Так как φ — топологическое отображение, отсюда вытекает, что отображение f будет топологическим на некоторой окрестности точки p. Ввиду произвольности $p \in U$ доказано, что f — локально топологическое отображение.

Осталось установить, что в некоторой окрестности точки p выполняется неравенство (3.2).

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Положим

$$\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon/\|R\|, 1 - 1/\lambda\},$$

где λ определено, как указано выше. Пусть $0 < r < \eta$ и

$$\alpha(r) = \sup_{|t| \le r} \|\Phi(t)\|.$$

Очевидно, $\alpha(r) \to 0$ при $r \to 0$. Для всякого $t \in B(0, r)$ имеем $\|\Phi(t)\| \le \alpha(r)$.

Положим $L = 1 + \varepsilon_1$, и пусть $r \in (0, \eta)$ таково, что $\sqrt{1 - \alpha(r)} > 1/L$ и $\sqrt{1 + \alpha(r)} < L$. Тогда при $|t| < r$ будем иметь

$$\frac{|\xi|}{L} \le |u'(t)\xi| \le L|\xi|.$$

Из определения величины ε_1 вытекает, что

$$1 - \varepsilon_1 \ge 1/\lambda, \quad L = 1 + \varepsilon_1 < 1/(1 - \varepsilon_1) < \lambda.$$

Отображение u является локально топологическим на шаре $B(0, \eta)$, а следовательно, и на шаре $B(0, r)$. В силу теоремы Ф. Джона [10] (доказательство этой теоремы приводится в [4]) найдется значение ρ такое, что $0 < \rho < r$ и для любых $t_1, t_2 \in B(0, \rho)$ выполняются неравенства

$$|t_2 - t_1|/L \le |u(t_2) - u(t_1)| \le L|t_2 - t_1|.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{1 + \varepsilon_1} > 1 - \varepsilon_1,$$

следовательно, для любых $t_1, t_2 \in B(0, \rho)$ справедливы неравенства

$$(1 - \varepsilon_1)|t_2 - t_1| \le |u(t_2) - u(t_1)| \le (1 + \varepsilon_1)|t_2 - t_1|.$$

Отсюда получаем, что для любых $t_1, t_2 \in B(0,\rho)$ имеет место неравенство

$$||u(t_2) - u(t_1)| - |t_2 - t_1|| \leq \varepsilon_1 |t_2 - t_1|. \tag{3.4}$$

Отображение φ преобразует шар $B(0,\rho)$ в некоторый эллипсоид с центром в точке p. Пусть $\delta > 0$ таково, что шар $B(p,\delta)$ содержится в этом эллипсоиде. Возьмем произвольно точки $x_1, x_2 \in B(p,\delta)$. Пусть $x_1 = \varphi(t_1)$ и $x_2 = \varphi(t_2)$, где $t_1, t_2 \in B(0,\rho)$. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = u(t_2) - u(t_1).$$

Имеем $t_2 - t_1 = R(x_2 - x_1)$ и, значит,

$$\begin{aligned} |t_2 - t_1| &= \sqrt{\langle R(x_2 - x_1), R(x_2 - x_1)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle R^2(x_2 - x_1), (x_2 - x_1)\rangle} = \sqrt{\langle G(p)(x_2 - x_1), x_2 - x_1\rangle}. \end{aligned}$$

Из определения ε_1 вытекает, что

$$\varepsilon_1 |t_2 - t_1| = \varepsilon_1 |R(x_2 - x_1)| \leq \varepsilon_1 \|R\| |x_2 - x_1| \leq \varepsilon |x_2 - x_1|.$$

Левая часть неравенства (3.4), как следует из сказанного, равна

$$\left| |f(x_2) - f(x_1)| - \sqrt{\langle G(p)(x_2 - x_1), x_2 - x_1\rangle} \right|,$$

правая часть не превосходит $\varepsilon|x_2 - x_1|$ и тем самым для любых двух точек x_1 и x_2 шара $B(p,\delta)$ выполняется неравенство (3.2). $\square$

Теорема 2. *Пусть U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса СМТ. Тогда если параметризованная кривая $x(s)$, $x \in [0,l]$, проходящая в области U, спрямляема (параметр s — длина дуги), то кривая $y(s) = f[x(s)]$ также спрямляема и ее длина выражается через метрический тензор $G_f(x)$ отображения f по формуле*

$$l(y,0,l) = \int_0^l \sqrt{\langle G_f[x(s)]x'(s), x'(s)\rangle}\, ds. \tag{3.5}$$

Доказательство. Заметим, что для отображений класса $\mathscr{C}^1$ утверждение теоремы очевидным образом верно. Равенство (3.5) в этом случае следует из того, что если $f \in \mathscr{C}^1$, то функция $y(s) = f[x(s)]$ абсолютно непрерывна и $y'(s) = f'[x(s)]x'(s)$ для почти всех $s \in [0,l]$.

Для произвольного отображения класса СМТ можно только утверждать, что оно принадлежит классу $W^1_{\infty,\mathrm{loc}}$ и, значит, его производные суть функции, определенные в U лишь почти всюду. Множество точек спрямляемой кривой, однако, есть множество меры нуль. Поэтому нельзя даже утверждать, что матрица $f'[x(s)]$ определена для почти всех $s \in [0,l]$.

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$ — произвольное СМТ-отображение, $x(s)$, $s \in [0,l]$, — спрямляемая кривая, лежащая в множестве U (параметр s — длина дуги). Множество $E = x([0,l]) \subset U$ компактно, и, значит, найдется $h > 0$ такое, что для всякой точки $p \in E$ шар $\overline{B}(p,h)$ содержится в U. Пусть H — объединение всех таких шаров. Множество H компактно и содержится в U.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Функция

$$F(x,\xi) = \sqrt{\langle G_f(x)\xi, \xi\rangle}$$

переменных $x \in U$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ непрерывна. Множество $H \times \overline{B}(0,1)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ компактно, и, значит, найдется $\delta_1 > 0$ такое, что если $x_1, x_2 \in H$, причем $|x_2 - x_1| < \delta$ и $|\xi| = 1$, то выполняется неравенство

$$|F(x_2, \xi) - F(x_1, \xi)| < \varepsilon.$$

В силу однородности $F(x, \xi)$ в этом случае для произвольного $\xi \in \mathbb{R}^n$ для любых $x_1, x_2 \in H$ таких, что $|x_2 - x_1| < \delta_1$, имеет место неравенство

$$|F(x_2, \xi) - F(x_1, \xi)| < \varepsilon|\xi|. \tag{3.6}$$

Ввиду леммы 2 для всякой точки $p \in U$ существует $r = r(p) > 0$ такое, что если $x_1, x_2 \in B(p, r)$, то

$$\big|\, |f(x_2) - f(x_1)| - F(p, x_2 - x_1)\big| \leq \varepsilon|x_2 - x_1|. \tag{3.7}$$

Положим $B_p = B[p, r(p)]$. Шары B_p, $p \in H$, образуют открытое покрытие множества H. Так как H компактно, найдется $\delta_2 > 0$ такое, что для всякой точки $x \in H$ шар $B(x, \delta_2)$ содержится в одном из шаров B_p. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Пусть α — разбиение промежутка $[0, l]$ такое, что $|\alpha| < \delta$, и пусть $s_0 = 0 < s_1 < \cdots < s_m = l$ — узлы этого разбиения. Для $i = 0, 1, \ldots, m$ пусть $x_i = x(s_i)$, $y_i = f(x_i)$. Имеем

$$|x_i - x_{i-1}| \leq s_i - s_{i-1} \leq |\alpha| < \delta.$$

Отсюда вытекает, что при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$ найдется точка $p_i \in H$ такая, что $B(x_i, \delta) \subset B_{p_i}$. Так как $|x_{i-1} - x_i| < \delta$, то x_{i-1} принадлежит шару $B(x_i, \delta)$ и, значит, точки x_{i-1} и x_i обе принадлежат шару B_{p_i}. Следовательно, для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|F(x_{i-1}, \xi) - F(p_i, \xi)| \leq \varepsilon|\xi|. \tag{3.8}$$

Из неравенства (3.7), очевидно, будем иметь

$$\big|\, |f(x_i) - f(x_{t-1})| - F(p_i, x_i - x_{i-1})\big| \leq \varepsilon|x_i - x_{i-1}|. \tag{3.9}$$

Далее, $f(x_i) = y_i = f[x(s_i)]$. Из неравенств (3.8) и (3.9) вытекает, что

$$\left| \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{t-1})| - \sum_{i=1}^{m} F(x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) \right| \leq 2\varepsilon l.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $|\alpha| \to 0$, получим, что

$$|l(y, 0.l) - l_{F}(x, 0.l)| \leq 2\varepsilon l.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, отсюда следует, что $l(y, 0.l) = l_{F}(x, 0.l)$, что и требовалось доказать. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ciarlet P. G., Laurent F.* Up to isometries, a deformations is a continuous of its metric tensor // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2002. V. 335. P. 489–493.
2. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости для отображений с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 8, № 3. С. 667–684.
3. *Решетняк Ю. Г.* Общие теоремы о полунепрерывности и о сходимости с функционалом // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1051–1069.

4. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. 2-е изд. перераб. и доп. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

5. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. (Перераб. и доп. англ. перевод: Reshetnyak Yu. G. Space mapping with bounded distortion. AMS Transl. of math. monographs. 1989, V. 73).

6. *Гольдштейн В. М.* О поведении отображений с ограниченным искажением при коэффициенте искажения, близком к единице // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 6. С. 1250–1258.

7. *Александров А. Д., Решетняк Ю. Г.* Поворот кривой в n-мерном евклидовом пространстве // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 3–22.

8. *Tonelli L.* Fondamenti di calcolo delle variazione. Bologna, 1923. V. I, II.

9. *Martio O., Väisälä J.* Elliptic equations and maps of bounded map distortion // Math. Ann. 1988. V. 282. P. 423–443.

10. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1951. V. 14, N 3. P. 391–413.

Статья поступила 9 декабря 2002 г.

Решетняк Юрий Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ugresh@math.nsc.ru