Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 512.543.7

РАЗРЕШИМЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СМОДЕЛИРОВАННЫЕ НА НЕКОТОРЫХ СПАЙНАХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Н. В. Коптева

Аннотация: Показана разрешимость систем уравнений, смоделированных на определенных спайнах трехмерных многообразий. Расширен результат А. Дункана и Дж. Хауи о двумерном остове трехмерного тора.

Ключевые слова: уравнения над группами, теоремы вложения, копредставления групп

§ 1. Введение

Если G — группа, F — свободная подгруппа с порождающими $x_1, \dots, x_n$ и $w_1, \dots, w_m$ — некоторые слова в свободном произведении $G * F$, то система уравнений $w_1 = 1, \dots, w_m = 1$ с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ называется *разрешимой* над G, если существуют группа H и отображение $\phi : G * F \to H$ такие, что $\phi(w_i) = 1$, $i = 1, \dots, m$, и ограничение $\phi|_G$ является инъекцией.

Проблема заключается в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия разрешимости системы уравнений над группой. Условия могут быть наложены на группу G или на слова $w_1, \dots, w_m$.

Существует также геометрическая интерпретация проблемы [1]. Пусть K — CW-комплекс с $\pi_1(K) = G$. Образуем новый комплекс L с $\pi_1(L) = (G * F)/N$, где N — подгруппа группы $G * F$, нормально порожденная словами $w_1, \dots, w_m$, следующим образом. Для каждого порождающего x_i группы F приклеим одномерную клетку к базовой точке комплекса K и согласно каждому слову w_i приклеим двумерную клетку к этому комплексу. Это дает требуемый комплекс L. Более того, система уравнений $w_1 = 1, \dots, w_m = 1$ разрешима над G, если и только если каноническое отображение из $\pi_1(K)$ в $\pi_1(L)$ является инъекцией.

Обратно, если (K, L) — пара двумерных комплексов, $K \subseteq L$, такая, что одномерный остов $X^{(1)}$ комплекса $X = L/K$ порождает свободную группу F, и двумерные клетки комплекса $L \backslash K$ определяют множество слов $\{w_1, \dots, w_m\}$ в $\pi_1(K) * F$, то мы говорим, что система уравнений $w_1 = 1, \dots, w_m = 1$ *реализована* парой (K, L) и *смоделирована* на комплексе X. Двумерный комплекс X называется *комплексом Кервера*, если любая система уравнений, смоделированная на X, разрешима.

Гипотеза Кервера — Лауденбаха состоит в том, что если множество слов $\{w_1, \dots, w_m\}$ несингулярно (т. е. n-ки $(d_{i1}, \dots, d_{in})$, $i = 1, \dots, m$, линейно независимы, где d_{ij} — сумма степеней порождающего x_j в слове w_i), то система уравнений $w_1 = 1, \dots, w_m = 1$ разрешима над G. М. Герстенхабер и О. С. Ротхаус [2, 3] доказали гипотезу Кервера — Лауденбаха для локально резидуально конечных групп G, а Дж. Хауи [1] доказал ее для локально индикабельных групп G.

Напомним, что группа A называется *резидуально конечной*, если для каждого $a \in A$, $a \neq 1$, существуют конечная группа K и такой гомоморфизм $\phi : A \to K$, что $\phi(a) \neq 1$. Группа A называется *индикабельной*, если существует эпиморфизм из A в $\mathbb{Z}$. Группа G — *локально* $\mathscr{P}$, если каждая нетривиальная конечно порожденная подгруппа удовлетворяет $\mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — некоторое свойство.

Есть много результатов с ограничением на длину и сумму степеней переменных в уравнениях (см., например, [4–7]).

Тем не менее гипотеза Кервера — Лауденбаха имеет дело только с несингулярными множествами слов. Что касается сингулярных множеств, то результатов не так много. В [8] Р. Линдон изучал сингулярные уравнения над циклическими группами, и в [9] рассмотрены определенные уравнения над $\mathbb{Z}_2$. Сингулярные уравнения длины четыре исследованы в [10].

Другой интересный класс систем состоит из систем, которые могут быть смоделированы на спайнах трехмерных многообразий. В [11] А. Дункан и Дж. Хауи показывают, что двумерный остов трехмерного тора является комплексом Кервера. В [12] рассматривается «шутовской колпак», являющийся спайном трехмерной сферы.

В настоящей статье мы расширяем результаты работы [11] на другие спайны трехмерных многообразий. Пусть X — следующий трехмерный комплекс, гомотопный многообразию $\Sigma_n \times \mathbb{S}^1$, где Σ_n — поверхность рода n: X имеет по одной клетке в размерностях 0 и 3 и по $2n+1$ клетке в размерностях 1 и 2. Его двумерный остов $X^{(2)}$ является геометрической реализацией копредставления группы

$$\left\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z \mid \prod_{i=1}^{n} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}, \left\{ x_i z x_i^{-1} z^{-1},\ y_i z y_i^{-1} z^{-1},\ i = 1, \dots, n \right\} \right\rangle.$$

Теорема 1. *Построенный выше комплекс $X^{(2)}$ является комплексом Кервера.*

Упомянутые системы уравнений смоделированы на спайнах трехмерных многообразий. Было бы интересно узнать, какие системы уравнений, смоделированные на спайнах, будут системами Кервера.

Я выражаю благодарность моему научному руководителю профессору Дж. Хауи за его помощь и постоянное внимание к этой работе.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $X^{(2)}$ — комплекс, описанный в утверждении теоремы. Тогда $X^{(2)}$ — комплекс, ассоциированный со следующей системой уравнений над группой G:

$$\begin{gathered} \prod_{i=1}^{n} e_i x_i f_i y_i g_i x_i^{-1} h_i y_i^{-1} = 1, \\ a_i x_i b_i z c_i x_i^{-1} d_i z^{-1} = 1,\ s_i y_i t_i z u_i y_i^{-1} v_i z^{-1} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \end{gathered} \tag{1}$$

a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i, s_i, t_i, u_i, v_i — элементы группы G для $i = 1, \dots, n$.

Мы строим группу H, содержащую G в качестве подгруппы, так что уравнения (1) выполняются в H.

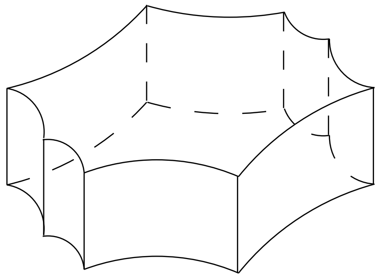

Рис. 1.

Чтобы представить комплекс $X^{(2)}$, мы будем использовать фундаментальный многогранник P для группы $\pi_1(\Sigma_n \times \mathbb{S}^1)$, действующей на пространстве $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (см. рис. 1 для $n = 2$).

Припишем метки ребрам и углам многогранника P согласно системе уравнений. Тогда метки вершин P таковы:

$$\alpha_i = s_{i-1} e_i a_i^{-1}, \quad \beta_i = b_i^{-1} f_i s_i^{-1}, \quad \gamma_i = t_i^{-1} g_i b_i, \ \delta_i = a_i h_i t_i,$$

$$\alpha_i' = v_{i-1}^{-1} e_i d_i, \quad \beta_i' = c_i f_i v_i, \quad \gamma_i' = u_i g_i c_i^{-1}, \quad \delta_i' = d_i^{-1} h_i u_i^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Мы называем набор четырех последовательных граней многогранника P, соответствующих двум уравнениям и обратным к ним $a_i x_i b_i z c_i x_i^{-1} d_i z^{-1} = 1$, $s_i y_i t_i z u_i y_i^{-1} v_i z^{-1} = 1$, *ручкой* H_i. На рис. 2 показана разметка для ручки H (индексы опущены). Мы называем вершину *тривиальной*, если метка этой вершины является тривиальным элементом в G.

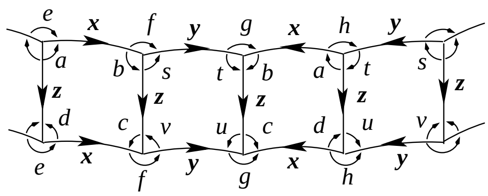

Рис. 2.

Лемма 1. *Пусть*

$$G_0 = \left\langle G, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \mid \prod_{i=1}^{n} e_i x_i f_i y_i g_i x_i^{-1} h_i y_i^{-1} = 1 \right\rangle,$$

и пусть $A = \langle \{a_i x_i b_i, \ s_i y_i t_i, \ i = 1, \ldots, n\} \rangle$ *и* $B = \left\langle \left\{ d_i^{-1} x_i c_i^{-1}, \ v_i^{-1} y_i u_i^{-1}, \ i = 1, \ldots, n \right\} \right\rangle$ *— подгруппы группы* G_0. *Тогда A либо свободная группа ранга $2n$, либо группа поверхности $\pi_1(\Sigma_n)$, либо группа орбифолда $\pi_1(\Sigma_n(p))$, где $\Sigma_n(p)$ — орбифолд с подстилающим пространством Σ_n и одной конической точкой порядка p, и аналогичное утверждение справедливо для B.*

Доказательство. Мы можем заменить переменные:

$$X_i = a_i x_i b_i, \quad Y_i = s_i y_i t_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$G_0 = \left\langle G, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \mid \prod_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1} = 1 \right\rangle$$

и $A = \langle \{X_i, Y_i,\ i = 1, \dots, n\} \rangle$.

Выделяем три случая.

1. Среди элементов α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i = 1, \dots, n$, есть по крайней мере два нетривиальных. В этом случае A — свободная подгруппа группы G_0.

Представим соотношение $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1} = 1$ в виде $W_1 X_k W_2 X_k^{-1} = 1$, где каждое W_i, $i = 1, 2$, содержит по крайней мере один нетривиальный элемент группы G. (Заметим, что если $\beta_k, \gamma_k \neq 1$, а все остальные коэффициенты тривиальны, то следует рассматривать $W_1 Y_k W_2 Y_k^{-1} = 1$ и использовать Y_k вместо X_k в дальнейших рассуждениях.) Пусть

$$\overline{G} = G * \langle X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \rangle,$$

и пусть $B_1 = \langle W_1 \rangle$, $B_2 = \langle W_2 \rangle$. Ясно, что $B_1 \cong B_2$ в $\overline{G}$. Тогда

$$G_0 = \langle \overline{G}, X_k \mid W_1 X_k W_2 X_k^{-1} = 1 \rangle.$$

Покажем, что A пересекает B_1 и B_2 тривиально. Предположим, что это не так, и пусть существует $\sigma \in A \cap B_1$, $\sigma \neq 1$. Тогда $\sigma = W_1^p$ и, значит, σ содержит по крайней мере один нетривиальный элемент группы G, что противоречит факту $A = \langle \{X_i, Y_i,\ i = 1, \dots, n\} \rangle$. Такие же рассуждения показывают, что A пересекает B_2 тривиально.

Значит, по теореме Куроша о подгруппах свободного произведения $A = S * (A \cap \overline{G}) = S * F_{2n-1}$, где S — некоторая группа и $F_{2n-1} = \langle X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \rangle$ — свободная группа. По теореме Грушко S является однопорожденной группой. Абелеанизируя G_0 и отображая ее естественным образом на $\mathbb{Z}^{2n}$, можно видеть, что A^{ab} изоморфна $\mathbb{Z}^{2n}$. С другой стороны, $A^{ab} = S^{ab} \oplus \mathbb{Z}^{2n-1}$ и, значит, $S^{ab} \cong \mathbb{Z}$. Таким образом, $S \cong \mathbb{Z}$, и A свободна.

2. Есть только один нетривиальный элемент среди α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i = 1, \dots, n$. В этом случае A является группой орбифолда. Действительно,

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1} = 1$$

эквивалентно тому, что

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} [X_i, Y_i] \right) \alpha_k X_k \beta_k Y_k \gamma_k X_k^{-1} \delta_k Y_k^{-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n} [X_i, Y_i] \right) = 1,$$

где три из α_k, β_k, γ_k, δ_k тривиальны. Тогда G_0 будет свободным произведением групп G и

$$A = \left\langle X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \mid \left(\prod_{i=1}^{n} [X_i, Y_i] \right)^p = 1 \right\rangle$$

с объединенной циклической подгруппой порядка p. Заметим, что p — порядок единственного нетривиального элемента среди α_k, β_k, γ_k, δ_k. Если p конечно, то $A = \pi_1(\Sigma_n(p))$, в противном случае $A = F_{2n}$.

3. Все элементы α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i = 1, \ldots, n$, тривиальны. В этом случае

$$G_0 = G * \left\langle X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \mid \prod_{i=1}^{n} [X_i, Y_i] = 1 \right\rangle.$$

Таким образом, A изоморфна группе поверхности $\pi_1(\Sigma_n)$. Рассуждения для B аналогичны.

Теперь мы рассмотрим различные комбинации случаев из леммы 1 для верхней и нижней граней P.

Случай A. Если найдутся по крайней мере по два нетривиальных элемента на верхней и нижней гранях, то обе группы A и B свободны в G_0, и мы формируем HNN-расширение

$$H = \langle G_0, z \,|\, z^{-1} a_i x_i b_i z = d_i^{-1} x_i c_i^{-1},\ z^{-1} s_i y_i t_i z = v_i^{-1} y_i u_i^{-1},\ i = 1, \ldots, n \rangle.$$

Поскольку G является подгруппой группы G_0, то G — подгруппа группы H.

Случай B. Предположим, что найдутся только одна нетривиальная вершина на верхней грани в ручке H_k и только одна нетривиальная вершина на нижней грани в ручке H_l. Тогда обе группы A и B изоморфны группам орбифолдов:

$$A \cong \pi_1(\Sigma_n(p)), \quad B \cong \pi_1(\Sigma_n(q)).$$

При замене переменных $X_i = a_i x_i b_i$, $Y_i = s_i y_i t_i$ система уравнений (1) становится системой

$$X_i z C_i X_i^{-1} D_i z^{-1} = 1, \quad Y_i z U_i Y_i^{-1} V_i z^{-1} = 1, \quad \sigma R(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) = 1,$$

где $C_i = c_i b_i$, $D_i = a_i d_i$, $U_i = u_i t_i$, $V_i = s_i v_i$, σ — метка единственной нетривиальной вершины на верхней грани, и слово $R(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ не содержит элементов группы G. Новая система уравнений может быть смоделирована на том же самом комплексе X.

Более того, поскольку на нижней грани имеется только один нетривиальный элемент, можно использовать уравнения

$$V_{i-1} D_i^{-1} = C_i V_i = U_i C_i^{-1} = D_i^{-1} U_i^{-1} = 1, \quad i \neq l, k,$$

чтобы найти элемент σ' в нетривиальной вершине снизу. Нетрудно видеть, что $\sigma' = \sigma$.

Таким образом, $p = q$, и A изоморфна B. Поэтому формируем HNN-расширение $H = \langle G_0, z \mid z^{-1} A z = B \rangle$, содержащее G в качестве подгруппы.

Случай C. Если все вершины на одной из многоугольных граней (скажем, на нижней) тривиальны, то вместо G_0 берем группу

$$G_1 = \left\langle G, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \mid \prod_{i=1}^{n} [d_i^{-1} x_i c_i^{-1}, v_i^{-1} y_i u_i^{-1}], \prod_{i=1}^{n} [a_i x_i b_i, s_i y_i t_i] \right\rangle.$$

Тем самым G будет подгруппой группы G_1. Действительно, существует гомоморфизм $s : G_1 \to G$, заданный соотношениями $x_i = a_i^{-1} b_i^{-1}$, $y_i = v_i u_i$, $i = 1, \ldots, n$, $g = g$ $\forall g \in G$, такой, что $s \circ i = \mathrm{id}_G$, где i — гомоморфизм из G в G_1. Значит, i — инъекция. Следовательно, обе группы $A = \langle \{a_i x_i b_i,\ s_i y_i t_i,\ i =$

$1,\dots,n\}\rangle$ и $B = \langle\{d_i^{-1}x_ic_i^{-1},\ v_i^{-1}y_iu_i^{-1},\ i=1,\dots,n\}\rangle$ изоморфны группе $\pi_1(\Sigma_n)$ в G_1, и мы можем сформировать HNN-расширение

$$H = \langle G_1, z \mid z^{-1}Az = B\rangle.$$

Заметим, что уравнение

$$\prod_{i=1}^{n}[a_ix_ib_i, s_iy_it_i] = 1$$

эквивалентно уравнению

$$\prod_{i=1}^{n} e_ix_if_iy_ig_ix_i^{-1}h_iy_i^{-1} = 1.$$

Случай D. Последний и самый трудный случай — это когда имеются только одна нетривиальная вершина на одной из многогранных граней и по крайней мере две нетривиальные вершины на другой.

Пусть нижняя грань только с одной нетривиальной вершиной. Можем предположить без ограничения общности, что эта вершина принадлежит ручке H_1, т. е. нетривиальный элемент — один из элементов α_1', β_1', γ_1' и δ_1'.

Перестановка вершин. Опишем технику замены переменных, позволяющую менять местами тривиальные и нетривиальные вершины многогранника P.

Предположим, что есть ручка H_k, $k \neq 1$, с нетривиальными вершинами сверху и с $\beta_k' = \gamma_k' = 1$. Заменим x_k на $w_k = x_kc_k^{-1}z^{-1}$. Тогда система уравнений превращается в

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} e_ix_if_iy_ig_ix_i^{-1}h_iy_i^{-1}\right) e_kw_kzc_kf_ky_kg_kc_k^{-1}z^{-1}w_k^{-1}h_ky_k^{-1} \times \left(\prod_{i=k+1}^{n} e_ix_if_iy_ig_ix_i^{-1}h_iy_i^{-1}\right) = 1,$$

$$a_kw_kzc_kb_kw_k^{-1}d_kz^{-1} = 1, \quad s_ky_kt_kzu_ky_k^{-1}v_kz^{-1} = 1,$$
$$a_ix_ib_izc_ix_i^{-1}d_iz^{-1} = 1, \quad s_iy_it_izu_iy_i^{-1}v_iz^{-1} = 1, \quad i \neq k.$$

Используя равенства $c_kf_kv_k = 1$, $u_kg_kc_k^{-1} = 1$ и $zv_k^{-1}y_ku_k^{-1}z^{-1} = s_ky_kt_k$, получим, что первое уравнение системы эквивалентно уравнению

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} e_ix_if_iy_ig_ix_i^{-1}h_iy_i^{-1}\right) e_kw_ks_ky_kt_kw_k^{-1}h_ky_k^{-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n} e_ix_if_iy_ig_ix_i^{-1}h_iy_i^{-1}\right) = 1.$$

Новая система может быть смоделирована на том же самом комплексе X с другими метками вершин многогранника P (см. рис. 3). Значит, если β_k или γ_k (или обе) нетривиальны, то мы имеем по крайней мере две нетривиальные вершины на нижней грани в новой конфигурации.

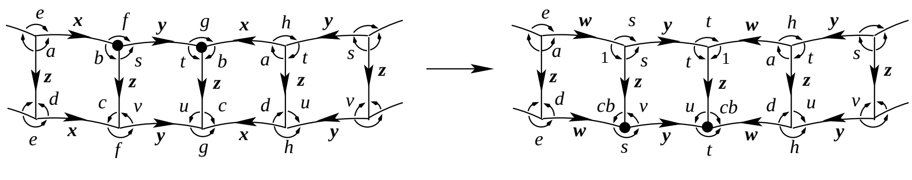

Рис. 3.

Если $\gamma'_k = \delta'_k = 1$, то используем другую замену $w_k = y_k u_k^{-1} z^{-1}$, которая дает систему уравнений

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} e_i x_i f_i y_i g_i x_i^{-1} h_i y_i^{-1}\right) e_k x_k f_k w_k b_k^{-1} x_k^{-1} a_k^{-1} w_k^{-1} \times \left(\prod_{i=k+1}^{n} e_i x_i f_i y_i g_i x_i^{-1} h_i y_i^{-1}\right) = 1,$$

$$a_k x_k b_k z c_k x_k^{-1} d_k z^{-1} = 1, \quad s_k w_k z t_k u_k w_k^{-1} v_k z^{-1} = 1,$$

$$a_i x_i b_i z c_i x_i^{-1} d_i z^{-1} = 1, \quad s_i y_i t_i z u_i y_i^{-1} v_i z^{-1} = 1, \quad i \neq k.$$

Новая разметка многогранника P показана на рис. 4. Следовательно, если γ_k или δ_k нетривиальна, то имеем по крайней мере две нетривиальные вершины на нижней грани нового P.

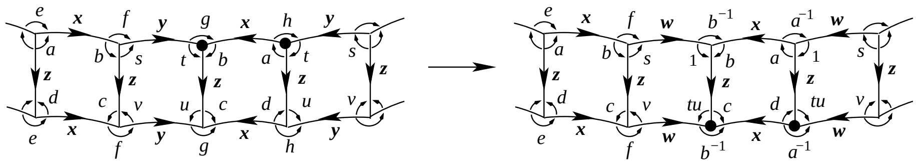

Рис. 4.

Единственная вершина, которая не может быть сдвинута вниз, — это α_k.

Отрезание ручки. Предположим, что существует ручка H_k, где все вершины тривиальны, кроме, возможно, α_k или α'_k. Замена переменных $X_i = a_i x_i b_i$, $Y_i = s_i y_i t_i$ дает новую систему уравнений, которая также может быть смоделирована на X:

$$X_i z C_i X_i^{-1} D_i z^{-1} = 1, \quad Y_i z U_i Y_i^{-1} V_i z^{-1} = 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1}\right) \alpha_k X_k Y_k X_k^{-1} Y_k^{-1} \times \left(\prod_{i=k+1}^{n} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1}\right) = 1,$$

где $C_i = c_i b_i$, $D_i = a_i d_i$, $U_i = u_i t_i$, $V_i = s_i v_i$. Используя равенства $C_k V_k = U_k C_k^{-1} = D_k^{-1} U_k^{-1} = 1$, получим, что $C_k = U_k = D_k^{-1}$ и $V_k = D_k$. Теперь заменим z на $Z = z D_k^{-1}$, чтобы получить эквивалентную систему уравнений, которая может быть смоделирована на том же самом комплексе X:

$$X_i Z D_k C_i X_i^{-1} D_i D_k^{-1} Z^{-1} = 1, \quad Y_i Z D_k U_i Y_i^{-1} V_i D_k^{-1} Z^{-1} = 1, \quad i \neq k$$

$$X_k Z X_k^{-1} Z^{-1} = 1, \quad Y_k Z Y_k^{-1} Z^{-1} = 1,$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1}\right) \alpha_k X_k Y_k X_k^{-1} Y_k^{-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1}\right) = 1.$$

Пусть
$$\overline{G} = \frac{G * \langle \{X_i, Y_i,\ i \neq k\}, Z\rangle}{N} *_{\langle Z\rangle} \frac{\langle X_k, Y_k, Z\rangle}{N_1},$$
где N — нормальное замыкание следующих $2n-1$ элементов:
$$X_i Z D_k C_i X_i^{-1} D_i D_k^{-1} Z^{-1}, \quad Y_i Z D_k U_i Y_i^{-1} V_i D_k^{-1} Z^{-1}, \quad i \neq k,$$
$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1}\right) \alpha_k \left(\prod_{i=k+1}^{n} \alpha_i X_i \beta_i Y_i \gamma_i X_i^{-1} \delta_i Y_i^{-1}\right),$$
и N_1 — нормальное замыкание $\langle [X_k, Z], [Y_k, Z], [X_k, Y_k]\rangle$. Ясно, что если G является подгруппой $\overline{G}$, то исходная система уравнений имеет решение над G.

Геометрически мы просто удаляем четыре боковые грани P.

Прежде всего удалим все возможные ручки. Если после этого мы получим трехмерный тор, то $X^{(2)}$ является комплексом Кервера в силу [11]. Предположим, что $n > 1$ после отрезания всех возможных ручек. Напомним, что теперь у нас имеются только одна нетривиальная вершина на нижней грани и по крайней мере две нетривиальные вершины на верхней.

Если наверху найдется больше, чем две нетривиальные вершины, то можем передвинуть одну из них вниз и получить случай A.

Если наверху найдутся в точности две нетривиальные вершины и $n > 2$, то используем технику перестановки вершин, чтобы поднять единственную нетривиальную вершину с нижней грани и получить случай C. Предположим, что $n = 2$. Пусть H_1 содержит две нетривиальные вершины и H_2 — только одну нетривиальную вершину. Ясно, что мы можем положить $\alpha_2 = 1$. Если $\alpha_1 \neq 1$, то вторая нетривиальная вершина в H_1 может быть поднята наверх и мы получим случай C. Таким образом, положим $\alpha_1 = 1$.

Теперь построим группу $G_2 = \langle G, X_2, Y_2, Z\rangle$ и определим ее подгруппу
$$A_2 = G * \left\langle X_2 \beta_2 Y_2 \gamma_2 X_2^{-1} \delta_2 Y_2^{-1}, Z\right\rangle$$
для каждого случая $\beta_2 \neq 1$, $\gamma_2 \neq 1$, $\delta_2 \neq 1$.

Предположим, что $\beta_2 \neq 1$. Поскольку все остальные вершины в H_2 тривиальны, замена переменных $Z = zD_2^{-1}$ приводит к следующей системе уравнений, которая может быть смоделирована на том же самом комплексе X:
$$X_1 \beta_1 Y_1 \gamma_1 X_1^{-1} \delta_1 Y_1^{-1} X_2 \beta_2 Y_2 X_2^{-1} Y_2^{-1} = 1,$$
$$X_1 Z \widetilde{C}_1 X_1^{-1} \widetilde{D}_1 Z^{-1} = 1, \quad Y_1 Z \widetilde{U}_1 Y_1^{-1} \widetilde{V}_1 Z^{-1} = 1,$$
$$X_2 Z X_2^{-1} Z^{-1} = 1, \qquad Y_2 Z Y_2^{-1} \beta_2^{-1} Z^{-1} = 1.$$
Пусть
$$G_2 = \left\langle G, X_2, Y_2, Z \mid X_2 Z X_2^{-1} Z^{-1} = Y_2 Z Y_2^{-1} \beta_2^{-1} Z^{-1} = 1\right\rangle.$$
Тогда
$$G_2 = G *_{Z_n} \langle X_2, Y_2, Z \mid [X_2, Z] = [Y_2, Z]^n = 1\rangle,$$
где $n > 1$ — порядок элемента β_2 в группе G, и
$$A_2 = G * \left\langle X_2 Z^{-1} Y_2 Z X_2^{-1} Y_2^{-1}, Z\right\rangle.$$

Если $\gamma_2 \neq 1$, то замена переменных $Z = zD_2^{-1}$ дает систему уравнений
$$X_1 \beta_1 Y_1 \gamma_1 X_1^{-1} \delta_1 Y_1^{-1} X_2 Y_2 \gamma_2 X_2^{-1} Y_2^{-1} = 1,$$

$$X_1Z\widetilde{C}_1X_1^{-1}\widetilde{D}_1Z^{-1}=1,\quad Y_1Z\widetilde{U}_1Y_1^{-1}\widetilde{V}_1Z^{-1}=1,$$
$$X_2Z\gamma_2X_2^{-1}Z^{-1}=1,\quad Y_2ZY_2^{-1}\gamma_2^{-1}Z^{-1}=1.$$

Пусть
$$G_2=\langle G,X_2,Y_2,Z\mid X_2Z\gamma_2X_2^{-1}Z^{-1}=Y_2ZY_2^{-1}\gamma_2^{-1}Z^{-1}=1\rangle.$$
Тогда
$$G_2=G*_{Z_n}\langle X_2,Y_2,Z\mid [X_2,Z]^n=[Y_2,Z]^n=1\rangle,$$
где $n>1$ — порядок элемента γ_2 в группе G, и
$$A_2=G*\langle X_2Y_2Z^{-1}X_2^{-1}ZY_2^{-1},Z\rangle.$$

Наконец, если $\delta_2\neq 1$, то заменяем z на $Z=zD_1^{-1}$, чтобы получить систему уравнений
$$X_1\beta_1Y_1\gamma_1X_1^{-1}\delta_1Y_1^{-1}X_2Y_2X_2^{-1}\delta_2Y_2^{-1}=1,$$
$$X_1Z\widetilde{C}_1X_1^{-1}\widetilde{D}_1Z^{-1}=1,\quad Y_1Z\widetilde{U}_1Y_1^{-1}\widetilde{V}_1Z^{-1}=1,$$
$$X_2ZX_2^{-1}\delta_2Z^{-1}=1,\qquad Y_2ZY_2^{-1}Z^{-1}=1.$$

Пусть
$$G_2=\big\langle G,X_2,Y_2,Z\mid X_2ZX_2^{-1}\delta_2Z^{-1}=Y_2ZY_2^{-1}Z^{-1}=1\big\rangle.$$
В таком случае
$$G_2=G*_{Z_n}\langle X_2,Y_2,Z\mid [X_2,Z]^n=[Y_2,Z]=1\rangle,$$
где $n>1$ — порядок элемента δ_2 в группе G, и
$$A_2=G*\langle X_2Y_2Z^{-1}X_2^{-1}ZY_2^{-1},Z\rangle.$$

Рассмотрим
$$G_1=\big\langle G,X_1,Y_1,Z\mid X_1Z\widetilde{C}_1X_1^{-1}\widetilde{D}_1Z^{-1}=Y_1Z\widetilde{U}_1Y_1^{-1}\widetilde{V}_1Z^{-1}=1\big\rangle.$$
Пусть
$$A_1=G*\big\langle X_1\beta_1Y_1\gamma_1X_1^{-1}\delta_1Y_1^{-1},Z\big\rangle$$
— подгруппа группы G_1. Обозначим слово $X_1\beta_1Y_1\gamma_1X_1^{-1}\delta_1Y_1^{-1}$ через W.

Покажем, что группа $\langle W,Z\rangle$ свободна в G_1. Группа G_1 может быть представлена как HNN-расширение со стабильной буквой Z и базой $G*\langle X_1,Y_1\rangle$. Поскольку W — элемент базы, достаточно показать [13, лемма Бриттона], что $\langle W\rangle$ пересекает соответственные подгруппы $\langle X_1,Y_1\rangle$ и $\langle \widetilde{C}_1X_1\widetilde{D}_1,\widetilde{U}_1Y_1\widetilde{V}_1\rangle$ тривиально. Так как W содержит по крайней мере один нетривиальный элемент группы G, то $\langle W\rangle\cap\langle X_1,Y_1\rangle=\{1\}$. Далее, замена переменных
$$\widetilde{X}_1=\widetilde{C}_1X_1\widetilde{D}_1,\qquad \widetilde{Y}_1=\widetilde{U}_1Y_1\widetilde{V}_1$$
не изменяет числа нетривиальных элементов в H_1, и $\widetilde{W}=W(\widetilde{X}_1,\widetilde{Y}_1)$ все равно содержит не менее одного нетривиального элемента группы G. Ясно, что $\langle\widetilde{W}\rangle\cap\langle\widetilde{X}_1,\widetilde{Y}_1\rangle=\{1\}$. Значит, группа $\langle W,Z\rangle$ изоморфна свободной группе ранга 2.

Применим лемму 2, приведенную ниже, к каждой группе G_2. Заметим, что группа $\widetilde{G}$ из леммы 2 является гомоморфным образом группы
$$\langle X,Y,Z\,|\,[X,Z]^n=[Y,Z]^n=1\rangle$$
и, следовательно, группа $\langle XZ^{-1}YZX^{-1}Y^{-1},Z\rangle$ тоже свободна в последней группе.

Таким образом, $A_1\cong A_2$, и мы можем сформировать свободное произведение с объединенной подгруппой $H=G_1*_{A_1\cong A_2}G_2$, содержащее G в качестве подгруппы. Это завершает доказательство теоремы.

Лемма 2. *Пусть*

$$\widetilde{G} = \langle X, Y, Z \mid [X, Z] = [Y, Z]^n = 1 \rangle, \quad n > 1,$$

и пусть

$$W_1 = XZ^{-1}YZX^{-1}Y^{-1}, \quad W_2 = XYZ^{-1}X^{-1}ZY^{-1}.$$

Тогда группа $T_i = \langle W_i, Z \rangle$, $i = 1, 2$, *изоморфна свободной группе ранга* 2.

Доказательство. Во-первых, заметим, что $\widetilde{G}$ может быть представлена как HNN-расширение

$$\widetilde{G} = \langle S, X \mid X^{-1}AX = A \rangle,$$

где

$$S = \langle Y, Z \mid [Y, Z]^n = 1 \rangle, \quad A = \langle Z \rangle.$$

Предположим, что $T_1 = \langle W_1, Z \rangle$ не является свободной и

$$R(W_1, Z) = W_1^{a_1} Z^{b_1} \dots W_1^{a_k} Z^{b_k} = 1$$

в $\widetilde{G}$. Тогда

$$(XZ^{-1}YZX^{-1}Y^{-1})^{a_1} Z^{b_1} \dots (XZ^{-1}YZX^{-1}Y^{-1})^{a_k} Z^{b_k} = 1.$$

В группе $\widetilde{G}$ сокращения могут произойти, только если имеется подслово слова $R(W_1, Z)$ вида $W_1^{-1} Z^{b_i} W_1$, так что

$$W_1^{-1} Z^{b_i} W_1 = YXZ^{-1}Y^{-1}Z^{b_i}YZX^{-1}Y^{-1}.$$

Таким образом, мы можем переписать $R(W_1, Z) = 1$ как

$$g_0 X^{\varepsilon_0} g_1 X^{\varepsilon_1} \dots g_l X^{\varepsilon_l} = 1,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $g_i \in S$, но $g_i \notin A$ для всех $i = 0, \dots, l$, что противоречит теореме о нормальных формах для HNN-расширений. Значит, T_1 свободна в $\widetilde{G}$.

Для $T_2 = \langle W_2, Z \rangle$ рассуждения аналогичны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Howie J.* On pairs of 2-complexes and systems of equations over groups // J. Reine. Angew. Math. 1981. V. 324. P. 165–174.
2. *Gerstenhaber M., Rothaus O. S.* The solutions of sets of equations in groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V. 48. P. 1531–1533.
3. *Rothaus O. S.* On the non-triviality of some group extensions given by generators and relations // Ann. of Math. 1977. V. 106, N 2. P. 599–612.
4. *Clifford A.* A class of exponent-sum two equations over groups // Glasgow Math. J. 2002. V. 44. P. 201–207.
5. *Edjvet M., Howie J.* The solution of length four equations over groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 326, N 1. P. 345–369.
6. *Gersten S. M.* Nonsingular equations of small weight over groups // Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984). Princeton: Princeton Univ. Press, 1987. V. 111. P. 121–144. (Ann. of Math. Stud.).
7. *Howie J.* Nonsingular systems of two length three equations over a group // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1991. V. 110, N 1. P. 11–24.
8. *Lyndon R. C.* Equations in groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 603–604.
9. *Ferlini V., Goldstein R., Salpukas M.* On the solution of certain equations with exponent sum 0 over $\mathbb{Z}_2$ // Intern. J. Algebra Comput. 2000. V. 10, N 6. P. 709–723.
10. *Edjvet M.* A singular equation of length four over groups // Algebra Colloq. 2000. V. 7, N 3. P. 247–274.
11. *Duncan A. J., Howie J.* The 3-torus is Kervaire // Contemp. Math. 1994. V. 164. P. 1–8.

12. *Howie J.* The solution of length three equations over groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V. 26, N 1. P. 89–9.

13. *Lyndon R., Schupp P.* Combinatorial group theory. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1977.

Статья поступила 3 октября 2002 г.

Коптева Наталья Викторовна,
Отделение математики, Университет Хериот-Ватт,
Эдинбург EH14 4AS, Великобритания
(Department of Mathematics, Heriot-Watt University, Edinburgh EH14 4AS, United Kingdom)
natasha@ma.hw.ac.uk