Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.956.223

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Э. В. Арбузов

Аннотация: Регулярные решения эллиптических систем второго порядка на плоскости могут быть представлены через A-аналитические функции, удовлетворяющие в рассматриваемой области операторному уравнению типа Бельтрами. Для восстановления решений по данным на участке границы области доказываются формулы типа Карлемана. Полученные формулы используются при решении задач Коши для системы уравнений Ламе, системы Навье — Стокса, а также системы уравнений упругости с остаточной деформацией.

Ключевые слова: эллиптические системы второго порядка, задача Коши, формулы Карлемана, A-аналитические функции

1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть Ω — произвольная ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ с границей класса C^∞, $M \subset \partial\Omega$ — объединение конечного числа замкнутых дуг. Рассмотрим задачу Коши для эллиптической системы второго порядка в Ω:

$$\mathscr{A}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + 2\mathscr{B}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}V + \mathscr{C}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V = 0, \quad V : \Omega \to \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$V(x, y)|_M = G(x, y), \quad P_\partial V(x, y)|_M = H(x, y),$$

где $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — постоянные матрицы размера $n \times n$, P_∂ является некоторым дифференциальным оператором первого порядка (например, оператором напряжения для системы уравнений Ламе или производной по нормали).

Система является эллиптической, т. е. матрицы $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$ обратимы и характеристический полином

$$\det \|\mathscr{A} + 2\mathscr{B}\lambda + \mathscr{C}\lambda^2\| = 0$$

не имеет вещественных корней.

Для регулярных решений системы (1) известно представление А. В. Бицадзе через аналитические векторнозначные функции и их производные до определенного порядка [1, с. 169].

В свою очередь, А. П. Солдатовым в работе [2, с. 194] было показано, что это представление может быть записано в следующем виде:

$$V = \operatorname{Re}\Theta u, \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00296–а).

где $u : \Omega \to \mathbb{C}^n$ является A-аналитической функцией (от переменной $z_\lambda = x + \lambda y$ для λ-корня характеристического полинома), матрицы A и Θ выражаются через коэффициенты системы $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ и матрица A нильпотентна: $A^n = 0$.

Определение. Пусть A — матрица размера $n \times n$. Вектор-функция $u(z) \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^n)$ называется *A-аналитической в* Ω, если

$$\bar{\partial}_A u(z) := \partial_{\bar{z}} u(z) - A \partial_z u(z) = 0, \quad z = x + iy \in \Omega. \tag{3}$$

Таким образом, задача (1) становится эквивалентной задаче определения A-аналитической функции, заданной на участке границы

$$\bar{\partial}_A u(z) = 0, \quad u(z)|_M = f(z).$$

В [2] для определения матрицы Θ система (1) представлялась в виде эквивалентной ей системы дифференциальных уравнений первого порядка, а затем матрица полученной системы приводилась к жордановой форме.

В данной работе для случая $n = 2$ этот же результат получается с использованием свойств A-аналитических функций.

Теорема 1. *Пусть $n = 2$, λ_1, λ_2 — корни характеристического полинома с $\operatorname{Im} \lambda_i > 0$. Тогда решение системы* (1) *находится по формуле*

$$V = \operatorname{Re} \Theta u,$$

где матрица $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ (Θ_i — ее столбцы) и функция $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ определяются следующим образом:

а) *если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то столбцы Θ_1, Θ_2 находятся из системы уравнений*

$$\begin{gathered} \mathscr{A}\Theta_1 + 2\mathscr{B}\lambda\Theta_1 + \mathscr{C}\lambda^2\Theta_1 = 0, \\ \mathscr{A}\Theta_2 + 2\mathscr{B}\lambda\Theta_2 + \mathscr{C}\lambda^2\Theta_2 + 2(\mathscr{A} + \mathscr{B}(\bar{\lambda} + \lambda) + \mathscr{C}\bar{\lambda}\lambda)\Theta_1 = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

а функция $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ является решением уравнения

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda}\partial_y\right) u(z) - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\partial_x + \frac{1}{\lambda}\partial_y\right) u(z) = 0, \quad \alpha = \bar{\lambda} - \lambda; \tag{5}$$

б) *если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то столбцы Θ_1, Θ_2 находятся из уравнений*

$$\mathscr{A}\Theta_i + 2\mathscr{B}\lambda\Theta_i + \mathscr{C}\lambda^2\Theta_i = 0, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

а компоненты функции $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ являются решениями уравнений

$$\partial_x u_i - \frac{1}{\lambda_i}\partial_y u_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Замечание. Матрица Θ находится из той же системы уравнений (4), что и коэффициенты в представлении А. В. Бицадзе [1, с. 169].

Функция $u(z)$ является A-аналитической функцией по переменной $z_\lambda = x + \lambda y$:

$$u(z) = \tilde{u}(x + \lambda y) = \tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(\zeta),$$

где $(\bar{\partial}_\zeta - A\partial_\zeta)\tilde{u} = 0$, с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{\lambda}-\lambda}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, и $A = 0$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

В частном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, функция $u(z)$ является обычной A-аналитической функцией по переменной $z = x + iy$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Свойства таких функций и формулы типа Карлемана в случае, когда область является полуплоскостью $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, рассматривались в [3].

Связь между граничными условиями задач (1) и (2) дается в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть* $V = \operatorname{Re}\Theta u$ — *решение системы* (1) *и*

$$V|_M = g(x,y) \in C^1(M,\mathbb{R}^2), \quad \frac{\partial}{\partial\nu}V\Big|_M = h(x,y) \in C(M,\mathbb{R}^2);$$

$f = v + iw$ — *граничные значения функции* $u(z)$*:*

$$u|_M = f.$$

Пусть матрицы Θ', $T_{i,j}$ $(i,j=1,2)$ *таковы, что*

1) $\det\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix} \neq 0$*;*

2) $T_{11}\Theta + T_{12}\Theta A_0 = T_{21}\Theta A_0^{-1} + T_{22}\Theta = \Theta'$, *где* $A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *или* $A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *в зависимости от кратности корней характеристического полинома* λ.

Тогда граничные условия $V(x,y)$ *и* $u(z)$ *связаны соотношениями*

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \tilde{h} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{h}(x,y)|_M = \operatorname{Re}\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} h'(\xi,\eta)\,ds,$$

$$h'(x,y) = (\tau_1(T_{11}\partial_x + T_{12}\partial_y)) + \tau_2(T_{21}\partial_x + T_{22}\partial_y))V(x,y).$$

Таким образом, в зависимости от вида лежащих в верхней полуплоскости корней характеристического полинома для решения исходной задачи рассматриваются несколько случаев.

Если $\lambda = i$ — корень кратности 2, то решение задачи Коши (1) сводится к задаче A-аналитического продолжения с участка границы:

$$\bar{\partial}_A u(z) = 0, \quad z \in \Omega, \quad u(z)|_M = f(z), \tag{7}$$

где функция $f(z) = g(z) + ih(z)$ определяется из данных Коши для системы (1) и A — нильпотентная матрица: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В случае, когда λ — произвольное комплексное число, являющееся корнем кратности 2, необходимо решить задачу A-аналитического продолжения функции от переменной z_λ:

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda}\partial_y\right)u(z) - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\partial_x + \frac{1}{\lambda}\partial_y\right)u(z) = 0,\ \alpha = \bar{\lambda} - \lambda; \quad u(z)|_M = f(z). \tag{8}$$

Если корни λ_1, λ_2 различны, то компоненты вектор-функции $u(z)=(u_1(z),u_2(z))$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\partial_x u_i - \frac{1}{\lambda_i}\partial_y u_i = 0, \quad i = 1,2, \quad u_i(z)|_M = f_i(z). \tag{9}$$

Решение всех этих задач находится по методу, предложенному Т. Карлеманом [4] и обобщенному в работах [5–8], через построение функций со специальными свойствами на границе области.

Если $M = \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$, где M_k — замкнутые дуги длины l_k с граничными точками z_k^1, z_k^2, то, выбирая $\varepsilon < l/2$, где $l = \min\limits_k l_k$, определим множества $M_k^\varepsilon = \{z \in M_k \setminus B(z_k^i, \varepsilon),\ i = 1,2\}$ и $M^\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k^\varepsilon$ (здесь $B(z,\varepsilon)$ — открытый круг с центром в точке z радиуса ε).

В случае, когда $\lambda = i$ — корень кратности 2, используется результат следующей теоремы (при $n = 2$).

Теорема 3.1. *Пусть $A^n = 0$, $u(z)$ — A-аналитическая функция в Ω. Пусть $\phi_0(x,y) = \psi(x,y) + i\chi(x,y)$, где функция $\psi(x,y) \in C^\infty(\partial\Omega)$ является «сглаженной» гармонической мерой множества M:*

$$\Delta\psi(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \quad \psi(x,y)|_{M^\varepsilon} = 1, \quad \psi(x,y)|_{\partial\Omega\setminus M} = 0,$$

$\chi(x,y)$ — гармонически сопряженная к $\psi(x,y)$ функция. Пусть, далее,

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \partial^k \phi_0(z) \frac{\bar{z}^k}{k!} A^k,\ z = x + iy, \quad \Phi_N(z) = e^{N\phi(z)}.$$

Тогда решение задачи Коши (7) дается следующей формулой:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_M (d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1} \Phi_N(z)^{-1} \Phi_N(\zeta) f(\zeta)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega\setminus M} (d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1} \Phi_N(z)^{-1} \Phi_N(\zeta) f(\zeta). \quad (10)$$

Второй интеграл равномерно стремится к нулю при $N \to 0$ на компактных подмножествах из Ω. При этом решение системы (1) дается формулой (2).

Для случая произвольного корня $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ кратности 2 рассмотрим отображение $(x,y) \to (\xi, \eta)$:

$$\xi = x + \lambda' y, \quad \eta = \lambda'' y, \quad z_\lambda = x + \lambda y = \xi + i\eta = \zeta, \quad z_{-\lambda} = x - \lambda y.$$

Обозначим через Ω_λ образ области Ω при данном отображении.

Теорема 3.2. *Пусть $\phi(\xi,\eta)$ — аналитическая функция по переменной z_λ в области Ω_λ:*

$$\bar{\partial}_{z_\lambda} \phi(z_\lambda) = 0, \quad \operatorname{Re}\phi(z_\lambda)|_{M_\lambda^\varepsilon} = 1, \quad \operatorname{Re}\phi(z_\lambda)|_{\partial\Omega\setminus M_\lambda} = 0,$$

$\operatorname{Re}\phi(z_\lambda) \in C^\infty(\partial\Omega_\lambda)$. *Положим $\Phi(z) = \phi(z_\lambda) + \partial_{z_\lambda}\phi(z_\lambda) A' z_{-\lambda}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Тогда для решения задачи (8) справедлива формула

$$u(z) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \int\limits_M (d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1} \Phi_N(z)^{-1} \Phi_N(\zeta) f(\zeta),$$

где $k = 0$ при $|a| < 1$ и $k = 1$ при $|a| > 1$, $a = (1 + i\lambda)/(1 - i\lambda)$.

Когда кратность корней характеристического полинома равна 1, исходная задача сводится к определению двух скалярных аналитических функций от переменных z_{λ_i}, т. е. в данном случае необходимо применить классическую формулу Карлемана с последующей заменой переменных для каждого корня λ_i.

Теорема 3.3. *Пусть Ω_λ — образ области Ω при отображении $(x,y)\to(\xi,\eta)$, функция $\phi(\xi+i\eta)=\phi(\zeta)$ аналитическая по переменной $\zeta=z_\lambda$:*

$$\bar\partial_{z_\lambda}\phi(z_\lambda)=0,\quad \operatorname{Re}\phi(z_\lambda)|_{M_\lambda}=1,\quad \operatorname{Re}\phi(z_\lambda)|_{\partial\Omega\setminus M_\lambda}=0.$$

Тогда справедлива формула

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{M_\lambda}\frac{\tilde u(\zeta)}{\zeta-z_\lambda}e^{N(\phi(\zeta)-\phi(z_\lambda))}\,d\zeta,$$

где $\tilde u(\zeta)=\tilde u(x+\lambda y)=u(z)$.

Применяя эту формулу для каждого из корней характеристического полинома λ_i, получим вектор-функцию $u(z)=(u_1(z),u_2(z))$, которая является решением задачи (9).

2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Так как $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — вещественнозначные матрицы, то корнями характеристического уравнения

$$\det\|\mathscr{A}+2\mathscr{B}\lambda+\mathscr{C}\lambda^2\|=0$$

являются как λ, так и $\bar\lambda$.

Пусть λ_1,λ_2 — корни с положительными мнимыми частями. Возможны две ситуации: $\lambda_1\ne\lambda_2$ и $\lambda_1=\lambda_2$.

Рассмотрим сначала случай, когда λ — корень кратности 2: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Пусть $u(z)$ — решение уравнения (5). Тогда

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{\alpha}{2\lambda}\\ 0 & 1\end{pmatrix}u_x=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}1 & -\frac{\alpha}{2\lambda}\\ 0 & 1\end{pmatrix}u_y,\quad u_y=\begin{pmatrix}\lambda & \alpha\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}u_x=A_0u_x.$$

Таким образом,

$$u_{xy}=A_0u_{xx},\quad u_{yy}=A_0^2u_{xx}. \tag{11}$$

Если через Θ_1, Θ_2 обозначить столбцы матрицы $\Theta=(\Theta_1,\Theta_2)$, то

$$\Theta A_0=(\lambda\Theta_1,\alpha\Theta_1+\lambda\Theta_2),\quad \Theta A_0^2=(\lambda^2\Theta_1,2\alpha\lambda\Theta_1+\lambda^2\Theta_2).$$

Подставляя выражение $V=\Theta u$ в систему (1) и используя соотношения (11), получим

$$\mathscr{A}\Theta u_{xx}+2\mathscr{B}\Theta u_{xy}+\mathscr{C}\Theta u_{yy}=\big(\mathscr{A}\Theta+2\mathscr{B}\Theta A_0+\mathscr{C}\Theta A_0^2\big)u_{xx}.$$

При этом столбцы получившейся матрицы записываются в виде

$$\mathscr{A}\Theta_1+2\mathscr{B}\Theta_1\lambda+\mathscr{C}\Theta_1\lambda^2,\quad \mathscr{A}\Theta_2+2\mathscr{B}\Theta_2\lambda+\mathscr{C}\Theta_2\lambda^2+2\mathscr{B}\alpha\Theta_1+2\alpha\lambda\mathscr{C}\Theta_1.$$

Так как λ — корень характеристического полинома, найдется вектор Θ_1 такой, что

$$\mathscr{A}\Theta_1+2\mathscr{B}\Theta_1\lambda+\mathscr{C}\Theta_1\lambda^2=0.$$

Добавив это выражение ко второму столбцу, имеем

$$(2\mathscr{B}\alpha+2\alpha\lambda\mathscr{C}+2\mathscr{A}+4\mathscr{B}\lambda+2\mathscr{C}\lambda^2)\Theta_1=2(\mathscr{A}+\mathscr{B}(\alpha+2\lambda)+C(\alpha\lambda+\lambda^2))\Theta_1.$$

При $\alpha=\bar\lambda-\lambda$ второй столбец записывается в виде

$$\mathscr{A}\Theta_2+2\mathscr{B}\lambda\Theta_2\lambda^2+2(\mathscr{A}+\mathscr{B}(\bar\lambda+\lambda)+\mathscr{C}\bar\lambda\lambda)\Theta_1.$$

Таким образом, если для определения матрицы Θ мы решим систему уравнений

$$\mathscr{A}\Theta_1 + 2\mathscr{B}\Theta_1\lambda + \mathscr{C}\Theta_1\lambda^2 = 0,$$

$$\mathscr{A}\Theta_2 + 2\mathscr{B}\lambda\Theta_2\lambda^2 + 2(\mathscr{A} + \mathscr{B}(\bar{\lambda} + \lambda) + \mathscr{C}\bar{\lambda}\lambda)\Theta_1 = 0,$$

то $V = \Theta u$ будет решением системы (1).

Эта система в точности совпадает с системой для определения коэффициентов в общем представлении регулярных решений системы (1), полученной А. В. Бицадзе.

В случае, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, частные производные функции $u(z)$ связаны соотношением

$$u_y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} u_x = A_0' u_x.$$

При этом $u_{xy} = A_0' u_{xx}$, $u_{xy} = {A'}_0^2 u_{xx}$. Подставляя $V = \Theta u$ в систему (1), для определения столбцов матрицы Θ получаем систему

$$\mathscr{A}\Theta_i + 2\mathscr{B}\Theta_i\lambda_i + \mathscr{C}\Theta_i{\lambda_i}^2 = 0, \quad i = 1, 2,$$

т. е. только первое уравнение системы (4).

Следовательно, определив матрицу Θ, можно найти общий вид решения системы (1) $V = \Theta u$.

В силу того, что коэффициенты системы (1) $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — вещественные матрицы, вещественное решение системы (1) представляется в виде $V = \operatorname{Re}\Theta u$.

Доказательство теоремы 2. Зная значения функций $V(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial\nu}V(x,y)$ на множестве M, можно определить на M значения производных

$$\partial_x V(x,y) = -\nu_y\partial_\tau g(x,y) + \nu_x h(x,y), \quad \partial_y V(x,y) = \nu_x\partial_\tau g(x,y) + \nu_y h(x,y),$$

где (ν_x, ν_y) — вектор единичной внешней нормали, ∂_τ — производная по касательному направлению функции $g(x,y)$.

Определим функцию

$$h'(x,y) = (\tau_1(T_{11}\partial_x + T_{12}\partial_y) + \tau_2(T_{21}\partial_x + T_{22}\partial_y))V(x,y).$$

Подставим выражение $V = \Theta u$ и воспользуемся тем, что $u_y = A_0 u_x$:

$$h' = \tau_1(T_{11}\Theta + T_{12}\Theta A_0)\partial_x u + \tau_2\big(T_{21}\Theta A_0^{-1} + T_{22}\Theta\big)\partial_y u.$$

Так как по условию теоремы $T_{11}\Theta + T_{12}\Theta A_0 = T_{21}\Theta A_0^{-1} + T_{22}\Theta = \Theta'$, то

$$h' = \tau_1\Theta'\partial_x u + \tau_2\Theta'\partial_y u = \Theta'\frac{\partial}{\partial\tau}u.$$

Поэтому

$$\Theta' u = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} h'(\xi,\eta)\,ds + V_0 = \tilde{h}(x,y) + V_0.$$

Взяв вещественные части, получим $\operatorname{Re}\Theta u = g$, $\operatorname{Re}\Theta' u = \operatorname{Re}\tilde{h} + \operatorname{Re}V_0$ и

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \operatorname{Re}\tilde{h} + \operatorname{Re}V_0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Следовательно, при фиксированном V_0 значения v, w находятся однозначно, так как

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix} \neq 0.$$

Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $V_0 = 0$. В самом деле, пусть $u(z) = (v, w)(z)$ — решение системы при $V_0 = 0$. Можно определить постоянный вектор $u_0 = (v_0, w_0)$ такой, что $\operatorname{Re}\Theta' u_0 = V_0$, $\operatorname{Re}\Theta u_0 = 0$. Тогда функция $u(z) + u_0$ будет решением (12), но решением эллиптической системы (1) является $V = \operatorname{Re}\Theta(u + u_0) = \operatorname{Re}\Theta u$, т. е. можно полагать $V_0 = 0$.

3. Доказательство теоремы 3.1. Как и в классическом случае $A = 0$ [7], рассмотрим функцию (в нашем случае операторную), которая на множестве $\partial\Omega \setminus M$ стремится к нулю.

Идея использовать для построения такой функции гармоническую меру множества M принадлежит Г. М. Голузину и В. И. Крылову [5]. Они развили идею Т. Карлемана [4] применить для решения задачи аналитического продолжения функцию со специальными свойствами на границе области. В нашем случае рассматривается операторная функция

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \partial^k \phi_0(z) \frac{\bar{z}^k}{k!} A^k, \ z = x + iy, \quad \Phi_N(z) = e^{N\phi(z)}.$$

Такая функция является A-аналитической (в силу того, что $A^n = 0$ и $\bar{\partial}\phi_0(z) = 0$), и она коммутирует с оператором A, поэтому существует и функция $\Phi_N^{-1}(z) = e^{-N\phi(z)}$.

Используя формулу Коши, доказанную в работе [9] для общего случая оператора A, получаем

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega} (d\zeta + A\, d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1} \Phi_N(z)^{-1} \Phi_N(\zeta) f(\zeta).$$

Если оценить норму $\|\Phi_N(z)^{-1}\Phi_N(\zeta)\|$, то окажется, что она будет стремиться к нулю при $N \to \infty$ и $\zeta \in \partial\Omega \setminus M$:

$$\begin{aligned} \|\Phi_N(z)^{-1}\Phi_N(\zeta)\| = e^{N(\psi(\zeta)-\psi(z))} \| e^{N\sum_{k=1}^{n-1}(\partial^k\phi_0(\zeta)\frac{\bar{\zeta}^k}{k!} - \partial^k\phi_0(z)\frac{\bar{z}^k}{k!})A^k} \| \\ \le e^{N(\psi(\zeta)-\psi(z))}(1 + e\omega_\phi N)^{(n-1)}, \end{aligned}$$

где $\psi(\zeta) = \operatorname{Re}\phi_0(z)$ — «сглаженная» гармоническая мера множества M, обладающая следующими свойствами:

$$\psi(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \partial\Omega \setminus M; \quad 0 \le \psi(z) \le 1, \quad z \in \Omega,$$

и ω_ϕ — константа, зависящая от области Ω и функции ϕ_0:

$$\omega_\phi = \sup_{k,z,\zeta} |\partial^k\phi_0(\zeta)\bar{\zeta}^k - \partial^k\phi_0(z)\bar{z}^k|, \quad z \in \Omega, \ \zeta \in \partial\Omega, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Поэтому, когда $N \to \infty$, интеграл по $\partial\Omega \setminus M$ стремится к нулю и в итоге получается формула (10), позволяющая восстановить функцию $u(z)$ по данным на множестве M.

Доказательство теоремы 3.2. Предварительно докажем аналог формулы Коши для функций, являющихся решением уравнения (5).

Теорема 4. *Пусть*

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda}\partial_y\right)u(z) - \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\partial_x + \frac{1}{\lambda}\partial_y\right)u(z) = 0, \quad \alpha = \bar{\lambda} - \lambda.$$

Тогда $\bar{\partial}_A u = 0$ *при*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} & -\frac{2i\alpha}{(1-i\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

и

$$u(z) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega}(d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1}u(\zeta),$$

где $k = 0$ *при* $|a| < 1$ *и* $k = 1$ *при* $|a| > 1$, $a = (1+i\lambda)/(1-i\lambda)$.

Доказательство. Преобразуем уравнение $u_y = A_0 u_x$:

$$\begin{aligned} A_0 u_x - u_y &= A_0(\bar{\partial} + \partial)u + i(\bar{\partial} - \partial)u = (A_0 + iE)\bar{\partial}u + (A_0 - iE)\partial u \\ &= i(E - iA_0)\bar{\partial}u - i(E + iA_0)\partial u = i(E - iA_0)(\bar{\partial} - (E - iA_0)^{-1}(E + iA_0)\partial)u \\ &= i(E - iA_0)\bar{\partial}_A u = 0, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 - i\lambda & -i\alpha \\ 0 & 1 - i\lambda \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 + i\lambda & i\alpha \\ 0 & 1 + i\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} & \frac{2i\alpha}{(1-i\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Матрица $E - iA_0$ обратима, поэтому $\bar{\partial}_A u = 0$.

Так как функция $z + A\bar{z}$ является A-аналитической, применяя формулу Грина, можно показать, что

$$K_\Omega u = \int\limits_{\partial\Omega}(d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1}u(\zeta) = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}(d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1}u(\zeta),$$

где $\partial\Omega_\varepsilon = \{\zeta : |\zeta - z| = \varepsilon\}$. Далее,

$$\begin{aligned} K_\Omega u = &\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}(d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1}(u(\zeta) - u(z)) \\ &+ \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}(d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1}u(z). \end{aligned}$$

Так как $\zeta = z + i\varepsilon e^{i\phi}$, имеем

$$\begin{aligned} (d\zeta + A\,d\bar{\zeta})(\zeta - z + \overline{(\zeta - z)}A)^{-1} &= i(e^{i\phi} - e^{-i\phi}A)(e^{i\phi} + e^{-i\phi}A)^{-1}\,d\phi \\ &= i\begin{pmatrix} \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}a}{e^{i\phi} + e^{-i\phi}a} & \frac{-2b}{(e^{i\phi} + e^{-i\phi}a)^2} \\ 0 & \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}a}{e^{i\phi} + e^{-i\phi}a} \end{pmatrix}d\phi. \end{aligned}$$

При этом первый интеграл в формуле для $K_\Omega u$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю, а второй вычисляется явно по теореме о вычетах:

$$i\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}a}{e^{i\phi} + e^{-i\phi}a}\,d\phi = \int\limits_{|z|=1}\frac{z^2 - a}{z^2 + a}\frac{dz}{z} = \begin{cases} 2\pi i, & |a| < 1, \\ -2\pi i, & |a| > 1, \end{cases}$$

$$i\int\limits_0^{2\pi} \frac{-2b}{(e^{i\phi}+e^{-i\phi}a)^2}\,d\phi = i\int\limits_0^{2\pi} \frac{-2bz}{(z-i\sqrt{a})^2(z+i\sqrt{a})^2}\,dz = 0.$$

Заметим, что $|a| = |\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}| \neq 1$, так как λ не является вещественным числом.

Таким образом,

$$K_\Omega u = \begin{cases} 2\pi i\; u(z), & |a|<1, \\ -2\pi i\; u(z), & |a|>1. \end{cases}$$

Продолжим доказательство теоремы 3.2. Покажем, что функция $\Phi(z) = \phi(z_\lambda) + \partial_{z_\lambda}\phi(z_\lambda)z_{-\lambda}A'$ с матрицей $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ обладает следующими свойствами:

1) $[(\partial_x - \frac{1}{\lambda}\partial_y) - A'(\partial_x + \frac{1}{\lambda}\partial_y)]e^{\Phi(z)} = 0$,

2) $[e^{\Phi(z)}, A'] = 0$,

3) $[e^{\Phi(z_1)}, e^{\Phi(z_2)}] = 0\ \forall z_1, z_2 \in \overline{\Omega}$,

4) $(e^{\Phi(z)})^{-1} = e^{-\Phi(z)}$,

5) $\|e^{(\Phi(\zeta)-\Phi(z))N}\| \to 0\ \forall z \in \Omega, \forall\zeta \in \partial\Omega \setminus M$ при $N \to \infty$.

В самом деле, свойство 1 проверяется непосредственным вычислением, а свойства 2–4 следуют из того, что все матрицы треугольные вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Для доказательства свойства 5 оценим $\|e^{(\Phi(\zeta)-\Phi(z))N}\|$. Вычисляя

$$e^{\Phi(z)} = e^{\phi(z_\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{2\lambda}\partial_{z_\lambda}\phi(z_\lambda)z_{-\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим

$$e^{-\Phi(z)N}e^{\Phi(z^1)N} = e^{N(\phi(z_\lambda^1)-\phi(z_\lambda))} \begin{pmatrix} 1 & N\frac{\alpha}{2\lambda}(\partial_{z_\lambda^1}\phi(z_\lambda^1)z_{-\lambda}^1 - \partial_{z_\lambda}\phi(z_\lambda)z_{-\lambda}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\|e^{N(\Phi(z^1)-\Phi(z))}\| \leq e^{N\,\mathrm{Re}(\phi(x^1+\lambda y^1)-\phi(x+\lambda y))}(1+N\omega(\phi)),$$

где $\omega(\phi)$ — константа, зависящая от $\phi(z)$ и Ω.

При $z\in\Omega$, $z^1 \in \partial\Omega\setminus M$ имеем

$$\mathrm{Re}\,\phi(x^1+\lambda y^1) = 0, \quad 0 < \mathrm{Re}\,\phi(x+\lambda y) < 1,$$

поэтому

$$\|e^{N(\Phi(z^1)-\Phi(z))}\| \leq e^{-N\,\mathrm{Re}(\phi(x+\lambda y)}(1+N\omega(\phi)) \to 0, \quad N\to\infty.$$

В итоге, используя полученную в теореме 4 формулу Коши, для определения функции $u(z)$, которая является решением уравнения (5), приходим к формуле типа Карлемана

$$u(z) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_M (d\zeta + A\,d\zeta)(\zeta - z + \overline{(\zeta-z)}A)^{-1}e^{N(\Phi(\zeta)-\Phi(z))}f(\zeta),$$

где матрица A и число k определены в условиях теоремы.

Доказательство теоремы 3.3. В случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$ для определения функции $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ достаточно решить две задачи Коши с неполными данными

$$\partial_x u_i(z) - \frac{1}{\lambda_i}\partial_y u_i(z) = 0,\ i=1,2, \quad u_i(z)|_M = f_i(z).$$

Функции $f_i(z)$ находятся также по алгоритму, предложенному в теореме 2.

Для каждого λ_i рассмотрим функцию $\tilde{u}(\xi + i\eta)$ такую, что

$$\bar{\partial}\tilde{u}(\xi + i\eta) = 0,$$

в областях Ω_{λ_i}, каждая из которых является образом области Ω при соответствующем отображении $z = (x, y) \to z_{\lambda_i} = x + \lambda_i y$. Тогда

$$u(z) = \tilde{u}_i(x + \lambda_i y) = \tilde{u}(\xi + i\eta)$$

является решением уравнения

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda_i}\partial_y\right) u(z) = 0$$

и

$$u(z) = \tilde{u}(z_{\lambda_i}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_{\lambda_i}} \frac{\tilde{u}(\zeta)}{\zeta - z_{\lambda_i}}\, d\zeta,$$

т. е. в этом случае мы приходим к определению функций $u_i(z)$ по классической формуле Карлемана, используя метод «гасящей функции» с последующей заменой переменных.

3. Примеры

В этом разделе приводятся примеры использования полученных формул типа Карлемана при решении задач Коши для некоторых уравнений математической физики в произвольных ограниченных областях с гладкими границами на плоскости.

Задача Коши для системы уравнений Ламе. Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений Ламе, описывающей состояние плоской изотропной упругой среды в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}$:

$$\mu\Delta V + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} V = 0, \tag{13}$$

$$V|_M = G(x), \tag{14}$$

$$T\partial V|_M = H(x). \tag{15}$$

Здесь λ, μ — положительные постоянные, $V = (V_1, V_2)$ — вектор смещений, $T\partial$ — оператор напряжения, определяемый равенством $T\partial V|_M = \sigma\nu|_m$ для вектора внешней нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ и тензора напряжения σ, элементы которого связаны с вектором смещения V соотношениями Гука

$$\sigma_{xx} = \lambda(\partial_x V_1 + \partial_y V_2) + 2\mu\partial_x V_1, \quad \sigma_{yy} = \lambda(\partial_x V_1 + \partial_y V_2) + 2\mu\partial_y V_2,$$
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu(\partial_y V_1 + \partial_x V_2) + 2\mu\partial_x V_1.$$

Легко показать, что

$$T\partial = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\nu_1 & \mu\nu_2 \\ \lambda\nu_2 & \mu\nu_1 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} \mu\nu_2 & \lambda\nu_1 \\ \mu\nu_1 & (\lambda + 2\mu)\nu_2 \end{pmatrix} \partial_y.$$

Переходя от вектора нормали к вектору касательного направления, оператор $T\partial$ можно записать в виде

$$T\partial = \tau_1 \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \tau_1 \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) \end{pmatrix} \partial_y + \tau_2 \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \partial_x$$
$$+ \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \partial_y = T_{11}\tau_1\partial_x + T_{12}\tau_1\partial_y + T_{21}\tau_2\partial_x + T_{22}\tau_2\partial_y.$$

Теорема 5. *Пусть функция* $V(x,y) \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \cap C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$ *является решением задачи* (13)–(15).

Тогда $V(x,y)$ *находится по формуле*

$$V = \operatorname{Re}\Theta u,$$

где $\Theta = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2\kappa - 1 \end{pmatrix}$, $\kappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$, *а* $u(z)$ — *A-аналитическая функция для* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *принимающая на множестве* M *значения* $u|_M = f = g + ih$, *где функции* $g(z), h(z)$ *определяются из системы*

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x) \\ \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} H(x,y)\,ds \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $\Theta' = 2\mu \begin{pmatrix} 1 & 2-\kappa \\ i & -i\kappa \end{pmatrix}$.

Значения функции $u(z)$, $z = x + iy \in \Omega$, *находятся по формулам типа Карлемана*

$$\begin{aligned} u(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\Bigg(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\zeta) \\ + \Bigg(N(\partial\phi_0(\zeta)\bar{\zeta} - \partial\phi_0(z)\bar{z}) + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}\Bigg)\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\Bigg)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ - \int\limits_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z}\Bigg). \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем систему (13) в развернутом виде:

$$\mu(\partial_{xx}V_1 + \partial_{yy}V_1) + (\lambda+\mu)\partial_x(\partial_x V_1 + \partial_y V_2) = 0,$$

$$\mu(\partial_{xx}V_2 + \partial_{yy}V_2) + (\lambda+\mu)\partial_y(\partial_x V_1 + \partial_y V_2) = 0.$$

Отсюда определим матричные коэффициенты системы:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad 2\mathscr{B} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda+\mu \\ \lambda+\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{C} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu \end{pmatrix}.$$

Найдем корни характеристического полинома:

$$\begin{aligned} \det\big\|\mathscr{A} + 2\mathscr{B}\lambda_0 + \mathscr{C}\lambda_0^2\big\| = \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu + \mu\lambda_0^2 & (\lambda+\mu)\lambda_0 \\ (\lambda+\mu)\lambda_0 & \mu + (\lambda+2\mu)\lambda_0^2 \end{vmatrix} \\ = (\lambda+2\mu)\mu\big(1 + 2\lambda_0^2 + \lambda_0^4\big) = 0. \end{aligned}$$

Так как система эллиптическая, матрицы $\mathscr{A}, \mathscr{C}$ обратимы, следовательно, $(\lambda + 2\mu) \neq 0$, $\mu \neq 0$, т. е. корни находятся из уравнения $1 + 2\lambda_0^2 + \lambda_0^4 = \big(1 + \lambda_0^2\big)^2 = 0$. Таким образом, в верхней полуплоскости получаем корень $\lambda_0 = i$ кратности 2.

По теореме 1 решение системы (13) находится по формуле

$$V = \operatorname{Re}\Theta u,$$

где функция $u(z)$ является решением уравнения

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda_0}\partial_y\right)u(z) - A\left(\partial_x + \frac{1}{\lambda_0}\partial_y\right)u(z) = 0$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{i}-i}{2i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_0 = i$ уравнение принимает вид $\bar{\partial}u(z) = A\partial u(z)$.

Столбцы матрицы Θ определяются из системы (4), которая в данном случае принимает вид

$$(\lambda+\mu)\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_1 = 0, \quad (\lambda+\mu)\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_2 + 2(\lambda+3\mu)\Theta_1 = 0.$$

Отсюда, если взять $\Theta_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_2 = -2\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = -2\kappa\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} i \\ -2\kappa-1 \end{pmatrix}.$$

В работе [2] показано, что решение системы (13) представимо в виде $V = \operatorname{Re}\Theta' u'$, где $u'(z)$ — A'-аналитическая функция,

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta' = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -\kappa-1 & i \end{pmatrix}, \quad \kappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}.$$

Если взять функцию $u = Du'$, то $\bar{\partial}u = D\bar{\partial}u' = DA'\partial u' = DA'D^{-1}\partial u$, т. е. функция $u = Du'$ является A-аналитической функцией с $A = DA'D^{-1}$.

При $D = \begin{pmatrix} 1/2 & -i \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ имеем

$$A = DA'D^{-1} = -2i\begin{pmatrix} 1/2 & -i \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом решение системы Ламе находится по формуле

$$V = \operatorname{Re}\Theta' D^{-1}Du' = \Theta u,$$

где

$$\Theta = \Theta' D^{-1} = -2i\begin{pmatrix} i & 1 \\ -\kappa-1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2\kappa-1 \end{pmatrix},$$

а $u(z)$ — A-аналитическая функция уже с вещественной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. получаем тот же самый результат, что и по предложенному в теореме 1 методу.

Однако при решении задачи Коши для системы уравнений Ламе, где в граничных данных присутствует оператор напряжения, удобнее перейти к A-аналитическим функциям с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В этом случае при вычислении граничных значений A-аналитической функции по теореме 2 можно будет воспользоваться матрицами T_{ij}, определенными в операторе напряжения.

Действительно, если $V = \operatorname{Re}\Theta u$, где

$$\Theta = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2\kappa-1 \end{pmatrix}, \quad \bar\partial u(z) = A\partial u(z), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$V = \operatorname{Re}\Theta^- u^- = \operatorname{Re}\Theta D^{-1} D u,$$

с матрицей $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. При этом

$$\bar\partial u^-(z) = A^- \partial u^-(z),$$

$$A^- = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Theta^- = \Theta D^{-1} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2\kappa-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2\kappa-1 \end{pmatrix}.$$

Для определения граничных значений A-аналитической функции $u(z)$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ вычислим матрицу Θ' из теоремы 2. Имеем

$$A_0 = (E-A)^{-1}(E+A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} T_{11}\Theta + iT_{12}\Theta A_0^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2\kappa-1 \end{pmatrix} \\ &+ i\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -(\lambda+2\mu) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2\kappa-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mu & 2\mu(2-\kappa) \\ i2\mu & -i(\lambda+(\lambda+2\mu)(2\kappa-3)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lambda+(\lambda+2\mu)(2\kappa-3) = \lambda+(\lambda+2\mu)\left(2\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}-3\right) = \frac{2\lambda\mu+6\mu^2}{\lambda+\mu} = 2\mu\kappa,$$

то

$$T_{11} + iT_{12}\Theta A_0^{-1} = 2\mu\begin{pmatrix} 1 & 2-\kappa \\ i & -i\kappa \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} T_{22}\Theta - iT_{21}\Theta A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2\kappa-1 \end{pmatrix} \\ &- i\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2\kappa-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\mu\begin{pmatrix} 1 & 2-\kappa \\ i & -i\kappa \end{pmatrix} = \Theta'. \end{aligned}$$

Найдем $\det\widetilde\Theta = \det\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix}$. Имеем

$$\widetilde\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2\kappa-1 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2\mu(2-\kappa) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu & 2\mu\kappa \end{pmatrix},$$

Поэтому $\det\widetilde{\Theta} = 4\mu(1+\kappa)^2 \neq 0$ и граничные значения функции $f(z)$ определяются однозначно через данные Коши (14), (15). Следовательно, задача Коши для системы уравнений Ламе эквивалентна задаче A-аналитического продолжения с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Получив значения функций $g(x)$, $h(x)$ на множестве M по данным Коши $G(x)$, $H(x)$, функцию $u(z)$ можно восстановить по формулам типа Карлемана из теоремы 3.1, а затем по $u(z)$ найти решение исходной задачи.

Вычисляя функцию $\Phi_N(z)$ из теоремы 3.1 для конкретной матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, получаем

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \partial\phi_0(z)\bar{z}A = \begin{pmatrix} \phi_0(z) & -\partial\phi_0(z)\bar{z} \\ 0 & \phi_0(z) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_N^{-1}(z)\Phi_N(\zeta) = e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))} \begin{pmatrix} 1 & N(\partial\phi_0(\zeta)\bar{\zeta} - \partial\phi_0(z)\bar{z}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученное значение в формулу Карлемана, приходим к следующей формуле, дающей решение задачи A-аналитического продолжения:

$$\begin{aligned} u(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\Biggl(\int\limits_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\Biggl(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\zeta) \\ + \left(N(\partial\phi_0(\zeta)\bar{\zeta} - \partial\phi_0(z)\bar{z}) + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}\right)\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\Biggr)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ - \int\limits_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z}\Biggr). \end{aligned}$$

При этом, оценивая интеграл по $\partial\Omega \setminus M$, можно показать, что он будет меньше ε при $N > N_\varepsilon$, где

$$N_\varepsilon = \frac{2e}{(1-e)\psi(z)} \ln\left(\frac{\pi\rho_{\partial\Omega\setminus M}(z)\psi^2(z)\varepsilon}{16\omega|\partial\Omega \setminus M|\|f\|_{\partial\Omega\setminus M}}\right)$$

(здесь $\omega = 2\sup\limits_{z\in\partial\Omega}|\partial\phi_0(z)\bar{z}|$, $|\partial\Omega\setminus M|$ — длина дуги $\Omega\setminus M$, $\rho_{\partial\Omega\setminus M}(z)$ — расстояние от точки z до множества $\Omega\setminus M$).

Из полученной формулы типа Карлемана следует оценка условной устойчивости:

$$\|V(x,y)\| \le \varepsilon l(f(z)) + c(\varepsilon)\|f(z)\|_M,$$

где $f(z)$ является граничным значением $u(z)$,

$$l(f(z)) = \|f(z)\|_{(\partial\Omega\setminus M; C^2)}, \quad c(\varepsilon) = C\varepsilon^{1-\frac{c}{\psi(z)(e-1)}},$$

и $\psi(z)$ — гармоническая мера множества M.

При этом если, используя формулу Карлемана, мы приближенно вычислим значение $V_N(x,y)$ при $N > N_\varepsilon$, то ошибка оценивается величиной

$$\|V - V_N\| \le \|\Theta\|\varepsilon$$

при условии определения данных Коши $G(z)$, $H(z)$ с погрешностью не более ε_0:

$$\varepsilon_0 \le C_1\varepsilon^{\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}}, \quad C_1 = \frac{\rho_M(z)}{|M|}\left(\frac{|\partial\Omega\setminus M|}{\rho_{\partial\Omega\setminus M}(z)}\|f\|\right)^{1-\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}}\left(\frac{\pi\psi^2(z)}{8\omega}\right)^{\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}}\|\widetilde{\Theta}\|.$$

В работе [10] получено решение задачи Коши для системы уравнений Ламе в областях специального вида с помощью функций Карлемана. Доказанные выше результаты дают другой подход к решению поставленной задачи через A-аналитические функции и позволяют найти формулу решения в явном виде в случае произвольной ограниченной области с гладкой границей на плоскости. В случае, когда область Ω является полуплоскостью $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, формулы Карлемана для системы уравнений Ламе были получены в [3].

Задача Коши для системы уравнений упругости с остаточной деформацией. В работе [11] в качестве одного из примеров были рассмотрены некоторые обратные задачи для следующей системы уравнений:

$$PV(x) = \nabla_x \cdot (\lambda(x) \operatorname{tr}(\nabla_x \otimes V) + 2\mu(x)(\nabla_x \otimes_s V) + (\nabla_x \otimes V)^t T(x)) = 0, \quad (17)$$

описывающей состояние равновесия изотропной неоднородной упругой среды с остаточной деформацией. Предполагается, что на объект не оказывается внешних воздействий, но они происходили в прошлом (сдвиги, смещения, сейсмическая активность) и оставили внутри объекта напряжения, которые моделируются тензором второго порядка $T(x)$, обладающим свойствами бездивергентности:

$$\nabla_x \cdot T(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (18)$$

и нулевым напряжением на поверхности:

$$T(x) \cdot \nu = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (19)$$

Условия на параметры упругости

$$\lambda(x) + \mu(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (20)$$

и положительная определенность тензора

$$\mu(x) I + T(x) > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (21)$$

обеспечивают эллиптичность системы (17).

Операторы в (17) определены следующим образом:

$$\nabla_x \cdot V = \operatorname{div} V(x), \quad (\nabla_x \cdot T)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad v \otimes_s w = \frac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v),$$

$$(u \otimes \nabla_x) = (\nabla_x \otimes u)^t, \quad \operatorname{tr}(v \otimes w) = v \cdot w, \quad \operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{n} t_{ii}.$$

В случае, когда $n = 2$, при постоянных λ, μ, T и выполнении условий (19)–(21) система (17) является эллиптической системой 2-го порядка с постоянными коэффициентами на плоскости. Поэтому, воспользовавшись результатами, полученными в предыдущих теоремах, можно найти решение задачи Коши для системы (17).

Теорема 6. *Пусть для λ, μ, T выполняются условия* (19)–(21). *Тогда вектор смещения $V(x, y)$, являющийся решением задачи Коши*

$$PV(x,y) = \nabla_x \cdot (\lambda \operatorname{tr}(\nabla_x \otimes V) + 2\mu(\nabla_x \otimes_s V) + (\nabla_x \otimes V)^t T) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \quad (22)$$

$$V|_M = F(x,y), \quad T_\partial V|_M = G(x,y),$$

с оператором напряжения T_∂ находится по формуле

$$V = \operatorname{Re}\Theta u,$$

где матрица Θ определяется из результатов теоремы 1, причем корни характеристического полинома λ_0 находятся из уравнения

$$\big(\lambda + 2\mu + t_{11} + (t_{12} + t_{21})\lambda_0 + (\mu + t_{22})\lambda_0^2\big)\big(\mu + t_{11} + (t_{12} + t_{21})\lambda_0 + (\lambda + 2\mu + t_{22})\lambda_0^2\big) - (\lambda + \mu)^2\lambda_0^2 = 0,$$

а вектор-функция $u(z)$ в зависимости от значений λ_0 находится по формулам типа Карлемана, приведенным в теоремах 3.1–3.3.

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{tr}(\nabla_x \otimes V) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} \partial_x V_1 & \partial_x V_2 \\ \partial_y V_1 & \partial_y V_2 \end{pmatrix} = \operatorname{div} V,$$

$$\nabla_x \otimes_s V = \frac{1}{2}(\nabla_x \otimes V + V \otimes \nabla_x) = \frac{1}{2}(\nabla_x \otimes V + (\nabla_x \otimes V)^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \partial_x V_1 & \partial_x V_2 \\ \partial_y V_1 & \partial_y V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_x V_1 & \partial_y V_1 \\ \partial_x V_2 & \partial_y V_2 \end{pmatrix}\right].$$

Таким образом, система (22) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\nabla_x \cdot \Bigg(\lambda \operatorname{div} V E + \mu \begin{pmatrix} 2\partial_x V_1 & \partial_x V_2 + \partial_y V_1 \\ \partial_y V_1 + \partial_x V_2 & 2\partial_y V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_x V_1 & \partial_y V_1 \\ \partial_x V_2 & \partial_y V_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\Bigg) \\
= \lambda \begin{pmatrix} \partial_{xx} V_1 + \partial_{xy} V_2 \\ \partial_{xy} V_1 + \partial_{yy} V_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\partial_{xx} V_1 + \partial_{xy} V_2 + \partial_{yy} V_1 \\ \partial_{xy} V_1 + \partial_{xx} V_2 + 2\partial_{yy} V_2 \end{pmatrix} \\
+ \begin{pmatrix} t_{11}\partial_{xx} V_1 + t_{21}\partial_{xy} V_1 + t_{12}\partial_{xy} V_1 + t_{22}\partial_{yy} V_1 \\ t_{11}\partial_{xx} V_2 + t_{21}\partial_{xy} V_2 + t_{12}\partial_{xy} V_2 + t_{22}\partial_{yy} V_2 \end{pmatrix}\Bigg) \\
= (\lambda + \mu)\begin{pmatrix} \partial_{xx} V_1 + \partial_{xy} V_2 \\ \partial_{xy} V_1 + \partial_{yy} V_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \partial_{xx} V_1 + \partial_{yy} V_1 \\ \partial_{xx} V_2 + \partial_{yy} V_2 \end{pmatrix} \\
+ t_{11}\partial_{xx} V + (t_{21} + t_{12})\partial_{xy} V + t_{22}\partial_{yy} V \\
= \mu\Delta V + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} V + t_{11} V_{xx} + (t_{21} + t_{12}) V_{xy} + t_{22} V_{yy},
\end{aligned}$$

т. е. при $T \equiv 0$ получается обычная система уравнений Ламе. Если же $T \neq 0$, то коэффициенты эллиптической системы имеют вид

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + t_{11}E, \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda + \mu \\ \lambda + \mu & 0 \end{pmatrix} + (t_{12} + t_{21})E,$$

$$\mathscr{C} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} + t_{22}E.$$

Поэтому при вычислении корней характеристического полинома, приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
\det\Bigg(\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + t_{11} & 0 \\ 0 & \mu + t_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{12} + t_{21} & \lambda + \mu \\ \lambda + \mu & t_{12} + t_{21} \end{pmatrix}\lambda_0 \\
+ \begin{pmatrix} \mu + t_{22} & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu + t_{22} \end{pmatrix}\lambda_0^2\Bigg) \\
= \big(\lambda + 2\mu + t_{11} + (t_{12} + t_{21})\lambda_0 + (\mu + t_{22})\lambda_0^2\big)(\mu + t_{11} + (t_{12} + t_{21})\lambda_0
\end{aligned}$$

$$+ (\lambda + 2\mu + t_{22})\lambda_0^2) - (\lambda+\mu)^2\lambda_0^2 = 0.$$

Решая это уравнение для конкретной матрицы T, находим корни λ_0 и в зависимости от их значений используем результаты теорем 3.1–3.3. При этом связь данных Коши для вектора смещений $V(x,y)$ и A-аналитической функции $u(z)$ определяется так же, как и для обычной системы Ламе.

Задача Коши для системы уравнений Навье — Стокса. Как показано в [12], с A-аналитическими функциями связана и линеаризованная система уравнений Навье — Стокса:

$$\Delta V_1 = \partial_x p, \quad \Delta V_2 = \partial_y p, \quad \partial_x V_1 + \partial_y V_2 = 0, \quad V|_M = G(x), \quad \left.\frac{\partial}{\partial \nu} V\right|_M = H(x), \tag{23}$$

где $V = (V_1, V_2)$ — вектор скорости и p — давление.

Для этой системы справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $V(x,y) \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \cap C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$, $p(x,y) \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ — решение задачи Коши для системы уравнений Навье — Стокса.*

Тогда $V(x,y)$ находится по формуле

$$V = \operatorname{Re}\Theta u, \quad \Theta = \begin{pmatrix} i & 4i \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

а $p = 4\partial_x w_2$, где $u(z) = v(z) + iw(z)$, $u(z) = (u_1(z), u_2(z))$ — A-аналитическая функция для $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, принимающая на множестве M значения $u|_M = f = g + ih$, функции $g(t), h(t)$ определяются из системы (15)

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x) \\ \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} H'(x,y)\,ds \end{pmatrix},$$

с матрицей Θ', определенной в теореме 5, *и*

$$H'(x,y) = T_\partial V(x,y),$$

где T_∂ — дифференциальный оператор напряжения (15).

Для функции $u(z)$ справедлива формула типа Карлемана, приведенная в теореме 5.

Доказательство. Как показано в [12], решение этой системы также находится через A-аналитическую функцию $u'(z) = v'(z) + iw'(z)$, $u' = \big(u_1', u_2'\big)$, с матрицей $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}$ по формулам

$$V = \operatorname{Re}\ \Theta_1 u', \quad p = -2\operatorname{Im}\ \partial u_1',$$

где $\Theta_1 = \begin{pmatrix} -i/2 & 1 \\ -1/2 & i \end{pmatrix}$.

Переходя к A-аналитической функции $u(z)$ с $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, получим, что решение поставленной задачи выражается формулой $V = \operatorname{Re}\Theta u$, где

$$\Theta = \Theta_1 D^{-1} = \begin{pmatrix} i & 4i \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

с матрицей $D = \begin{pmatrix} 3/2 & -i \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, а

$$p = -2\,\mathrm{Im}\ \partial u_1' = -2\,\mathrm{Im}\,\partial(D^{-1}u)_1 = -2\,\mathrm{Im}\,\partial(-2u_2) = 2(\partial_x w_2 - \partial_y v_2) = 4\partial_x w_2$$

в силу того, что $\bar{\partial} u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial u$ и, следовательно, $\bar{\partial} u_2 = 0$, т. е. $u_2(z)$ является обычной аналитической функцией.

Исходя из данных Коши, можно определить частные производные вектора скорости $V(x,y)$ на множестве M и по ним найти значения дифференциального оператора напряжения $T_\partial V(x,y)$. Его удобно использовать вследствие того, что выбор матриц T_{ij} обеспечивает выполнение условий теоремы 2 и нахождение матрицы Θ'. Поэтому по данным Коши $G(x)$, $H(x)$ значения $f(x)$ определяются однозначно и для нахождения A-аналитической функции $u(z)$ можно применить доказанные в теореме 5 формулы типа Карлемана, а также полученную оценку условной устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.
3. *Arbuzov E. V., Bukhgeim A. L.* Carleman's formulas for A-analytic functions in a half-plane // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1997. V. 5, N 6. P. 491–505.
4. *Carleman T.* Les fonctions quasianalytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
5. *Голузин Г. М., Крылов В. И.* Обобщенная формула Carleman'а и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
6. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
7. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990.
8. *Ярмухамедов Ш. Я.* О продолжении решения уравнения Гельмгольца // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 3. С. 320–323.
9. *Bukhgeim A. L.* Inversion formulas in inverse problems // A supplement to the monograph: M. M. Lavrentiev and L. Ya. Saveliev, Linear Operators and Ill-Posed Problems. New York; London: Consultants Bureau, and Moscow: Nauka Publ., 1995.
10. *Ниезов И. Э.* Задача Коши для системы теории упругости на плоскости // Узбекский мат. журн. 1996. № 1. С. 27–34.
11. *Rachele L. Z.* Boundary determination for an inverse problem in elastodynamics // Comm. Partial Differential Equations. 2000. V. 25, N 11–12. P. 1951–1996.
12. *Zhura N. A.* Boundary-value problems of elliptic systems in domains with piecewise-smooth boundaries // Differential Equations. 1989. V. 25, N 5. P. 595–601.

Статья поступила 4 ноября 2002 г.

Арбузов Эдуард Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
arbuzov@math.nsc.ru