Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.538.7

МНОЖЕСТВА ФАТУ И ЖЮЛИА МНОГОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

П. А. Гуменюк

Аннотация: Предлагается обобщение некоторых задач комплексной динамики, включающее в себя исследование итераций многозначных функций и композиций различных однозначных функций. Обобщены два классических результата, касающиеся множества Жюлиа.

Ключевые слова: комплексная динамика, итерация, композиция, многозначная функция, множество Фату, множество Жюлиа

Введение

Работа посвящена исследованию итераций многозначных функций. Для однозначных функций эта проблема изучается комплексной динамикой довольно давно. Дадим несколько традиционных определений. Пусть $\Delta \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$ и $g : \Delta \to \Delta$ — однозначная аналитическая функция, отличная от постоянной и не являющаяся автоморфизмом области Δ. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество положительных целых чисел.

Определение 1. Назовем *n-й итерацией* функции g, $n \in \mathbb{N}$, функцию g^n, рекуррентно определенную соотношениями $g^1 = g$, $g^n = g \circ g^{n-1}$.

Определение 2. Точка $z_0 \in \Delta$ называется *периодической точкой* функции g, если $\exists\, n \in \mathbb{N}$ $g^n(z_0) = z_0$. Если при этом $|(g^n)'(z_0)| > 1$, то z_0 называется *отталкивающей* периодической точкой.

Определение 3. *Множеством Фату* $\mathscr{F}(g)$ однозначной функции g называется множество всех точек $z \in \Delta$, в которых последовательность $\{g^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ образует нормальное семейство. Дополнение множества Фату называется *множеством Жюлиа* $\mathscr{J}(g) = \overline{\mathbb{C}}\backslash\mathscr{F}(g)$.

Подробности можно найти в монографиях по комплексной динамике [1, 2].

Приведем два классических результата касательно множества Жюлиа (см., например, обзор [3, теоремы 26, 33], а также [1, 2]).

Теорема A. *Множество Жюлиа не имеет изолированных точек и непусто.*

Теорема B. *Множество Жюлиа совпадает с замыканием множества всех отталкивающих периодических точек.*

Введем некоторые обозначения. Пусть T — область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\mathscr{S}(T)$ множество всех односвязных областей $D \subset T$. Множество всех однозначных аналитических функций $f : D \to U$ обозначим через

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 99–00089) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00123).

$\mathscr{H}(D,U)$, и $\mathscr{H}(D) := \mathscr{H}(D,\overline{\mathbb{C}})$. Замыкание множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ будем обозначать через $\overline{E}$. Будем также использовать обозначение $B(z,r) = R_z(\{\xi : |\xi| < r\})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$, где $R_z(\xi) = (\xi + z)/(1 - \xi\bar{z})$, $z \neq \infty$, и $R_\infty(\xi) = 1/\xi$. Заметим, что внешность области $B(z,r)$ совпадает с $B(-1/\bar{z}, 1/r)$.

Отметим некоторые утверждения из теории нормальных семейств, имеющие важное значение для комплексной динамики (см., например, [4, с. 67–75]).

Теорема C. *Для того чтобы семейство функций $F \subset \mathscr{H}(D)$ было нормальным в области D, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормальным в каждой точке $z \in D$.*

Теорема D (признак Монтеля). *Для того чтобы семейство функций $F \subset \mathscr{H}(D)$ было нормальным в области D, достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Card}\Big(\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{h \in F} h(D)\Big) > 2.$$

Замечание 1. Признак Монтеля можно сформулировать в более общем виде следующим образом: если существуют такие попарно не пересекающиеся компакты $K_j \subset \overline{\mathbb{C}}$, $j = 1,2,3$, что $K_j \not\subset h(D)$ для каждого $j = 1,2,3$ и каждой $h \in F$, то семейство F нормально в области D.

Как показывает пример многозначной функции $f(z) = e^{\sqrt{z}}$, определение итераций неоднозначно: $f^2(z) = \exp(e^{\sqrt{z}/2})$ или $f^2(z) = \exp(-e^{\sqrt{z}/2})$ в зависимости от выбора ветви корня. Это вынуждает расширить класс итерируемых объектов, для чего введем следующее понятие, именуемое в данной работе *аналитическим отношением.*

Определение 4. Совокупность $f \subset \{(D,\varphi) : D \in \mathscr{S}(T),\ \varphi \in \mathscr{H}(D)\}$ будем называть *отношением, аналитическим в области* $T \subset \overline{\mathbb{C}}$, если выполнены следующие условия:

(а) $\operatorname{pr}_1 f = \{D : \exists \varphi\ (D,\varphi) \in f\} = \mathscr{S}(T)$;

(б) для каждых $D_1, D_2 \in \mathscr{S}(T)$ и φ_1, $(D_1,\varphi_1) \in f$, для любой кривой $\gamma \subset T$, соединяющей точки z_1 и z_2, $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$, существует продолжение φ_2 функции φ_1 вдоль γ в область D_2 и $(D_2,\varphi_2) \in f$.

Функция φ такая, что $(D,\varphi) \in f$, называется *ветвью* f в области D. Под *образом точки* $z \in T$ относительно f будем понимать $\varphi(z)$, где φ — одна из ветвей f в некоторой односвязной окрестности $B(z,\varepsilon) \subset T$. Под *образом множества* $A \subset T$ будем понимать объединение

$$f(A) = \bigcup_{(D,\varphi) \in f} \varphi(A \cap D).$$

Если $f(T) \subset U$ для некоторого множества U, то будем писать $f : T \to U$.

Хотя в комплексной динамике наряду с другими рассматривается случай, когда функция принимает значения, соответствующие ее особым точкам (например, это имеет место для трансцендентных мероморфных функций); в данной работе предполагается, что все значения лежат в области, не содержащей особых точек, т. е. $f : T \to T$. Кроме того, примем естественное предположение, что рассматриваемые аналитические отношения не имеют постоянных ветвей.

Определение 5. Пусть $T \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, $f : T \to T$ — аналитическое отношение, не имеющее постоянных ветвей. Пусть последовательности

$\{D_n \in \mathscr{S}(T)\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{z_n \in D_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{\varphi_n \in \mathscr{H}(D_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ таковы, что $(D_n, \varphi_n) \in f$ и $z_{n+1} = \varphi_n(z_n)$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует такая окрестность U_k точки z_0, в которой определена композиция $F_k = \varphi_{k-1} \circ \dots \circ \varphi_0$. В соответствии с определением аналитического отношения и теоремой о монодромии (см., например, [5, с. 127]) F_k могут быть продолжены на всю область D_0. Последовательность $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ назовем *итерационной последовательностью* аналитического отношения f в точке z_0 на области D_0.

Замечание 2. Определение итерационной последовательности F_k не зависит от выбора области D_0 при фиксированном z_0 в том смысле, что для всякой области $G \in \mathscr{S}(T)$, $z_0 \in G$, функции F_k, будучи продолжены из D_0 в G через компоненту связности пересечения $D_0 \cap G$, содержащую точку z_0, образуют итерационную последовательность на области G.

С другой стороны, при фиксированной области D_0 это определение инвариантно относительно выбора точки $z_0 \in D_0$.

Определение 6. Пусть $\mathscr{I}(D)$, $D \in \mathscr{S}(T)$,— множество всевозможных итерационных последовательностей аналитического отношения $f : T \to T$ на области D. Тогда его *n-й итерацией* называется аналитическое отношение f^n, множеством ветвей которого на области D является множество

$$\{F_n : \{F_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathscr{I}(D)\}$$

для всякого $D \in \mathscr{S}(T)$.

Замечание 3. Пусть F — некоторое семейство однозначных аналитических функций $g : T \to T$. Множество $f = A(F) := \{(D, g) : D \in \mathscr{S}(T),\ g \in F\}$ является аналитическим в T отношением, причем $f^n = A(F^n)$, где

$$F^n = \{g_n \circ \dots \circ g_1 : g_k \in F,\ k = 1, \dots, n\},$$

а итерационные последовательности суть в точности последовательности вида $F_n = g_n \circ \dots \circ g_1$, где $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — произвольная последовательность функций из семейства F.

Таким образом, исследование бесконечных композиций аналитических функций, отображающих данную область в себя, является частным случаем исследования итераций аналитических отношений.

В силу замечания 2 в дальнейшем мы можем не указывать область, на которой определяется итерационная последовательность. Обозначим через $\Phi(f, z_0)$ множество всех членов всевозможных итерационных последовательностей аналитического отношения f в точке z_0.

Определение 7. Будем говорить, что *итерации аналитического отношения $f : T \to T$ нормальны в точке $z_0 \in T$*, если существует окрестность точки z_0, в которой нормальное семейство образует всякая итерационная последовательность аналитического отношения f в точке z_0. В этом случае будем также говорить, что z_0 — *точка нормальности итераций* аналитического отношения f.

Замечание 4. Понятие нормальности можно определить и для произвольного семейства F аналитических отношений, считая его нормальным в точке z_0, если существует односвязная область $D \ni z_0$, в которой нормально семейство всех ветвей в D всех аналитических отношений $h \in F$.

При этом определении нормальность семейства всех итераций $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ аналитического отношения $f : T \to T$ в точке $z_0 \in T$ есть нормальность семейства $\Phi(f, z_0)$ в точке z_0.

Следующее предложение показывает, что при довольно общих дополнительных условиях определение 7 и определение, данное в замечании 4, эквивалентны.

Предложение 1. *Пусть $f : \Delta \to \Delta$, $\Delta \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*\}$,— аналитическое отношение. В случае $\Delta = \overline{\mathbb{C}}$ потребуем также, чтобы f имело ветвь, не являющуюся дробно-линейной функцией. Если $z_0 \in T$ — точка нормальности итераций аналитического отношения f, то семейство $\Phi(f, z_0)$ нормально в точке z_0.*

Замечание 5. В случае, когда f — однозначная функция, множество всех точек нормальности итераций f является множеством Фату, а его дополнение — множеством Жюлиа. Поэтому целесообразно дать

Определение 8. Пусть $f : T \to T$, $T \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*\}$,— аналитическое отношение. *Множеством Фату* $\mathscr{F}(f)$ аналитического отношения f называется множество всех точек нормальности итераций f. Множество $\mathscr{J}(f) = \overline{T \backslash \mathscr{F}(f)}$ называется *множеством Жюлиа*.

Замечание 6. Из определения точки нормальности следует, что множество Фату является открытым.

Аналогом теоремы А для аналитических отношений является

Предложение 2. *Если* $\operatorname{Card}(\overline{\mathbb{C}} \backslash \mathscr{F}(f)) > 2$, *то множество* $\mathscr{J}(f)$ *не имеет изолированных точек.*

Определение 9. Точка $z_0 \in T$ называется *периодической точкой* аналитического отношения $f : T \to T$, если существует такая $g \in \Phi(f, z_0)$, что $g(z_0) = z_0$. Точка z_0 называется *отталкивающей периодической точкой*, если существует такая $g \in \Phi(f, z_0)$, что $g(z_0) = z_0$ и $|g'(z_0)| > 1$.

Обобщением теоремы B является следующая

Теорема 1. *Пусть $f : T \to T$, $T \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*\}$,— аналитическое отношение. В случае $T = \overline{\mathbb{C}}$ потребуем также, чтобы f не имело ветвей, являющихся дробно-линейными функциями. Обозначим через R множество всех отталкивающих периодических точек аналитического отношения f. Множество Жюлиа $\mathscr{J}(f)$ совпадает с $\overline{R}$.*

Основные леммы

Лемма 1. *Пусть h — однозначная аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 функция, отличная от постоянной. Чтобы семейство однозначных аналитических функций Ψ было нормальным в точке $h(z_0)$, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\Psi \circ h := \{g \circ h : g \in \Psi\}$ было нормальным в точке z_0.*

Доказательство. Необходимость ясна. Докажем достаточность. Так как $\Psi \circ h$ нормально в точке z_0, найдется такое $\varepsilon > 0$, что всякая последовательность функций из семейства $\Psi \circ h$ имеет в $W = B(z_0, \varepsilon)$ равномерно сходящуюся подпоследовательность.

В силу признака Монтеля достаточно показать, что существует такая окрестность U точки $w_0 = h(z_0)$, что $g(U) \subset B(g(w_0), 2)$ для всех $g \in \Psi$. Допустим, что это не так. Рассмотрим последовательность $\{g_n \in \Psi\}_{n \in \mathbb{N}}$, для которой

$g_n(U_n) \not\subset B(g_n(w_0), 2)$, $U_n = h(B(z_0, \varepsilon/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Выделяя из последовательности $v_n = g_n \circ h$ равномерно сходящуюся в W подпоследовательность, получаем противоречие, так как при достаточно больших n для предельной функции v имеем $v(B(z_0, \varepsilon/n)) \subset B(v(z_0), 1)$, откуда следует, что существует n, при котором $v_n(B(z_0, \varepsilon/n)) \subset B(v_n(z_0), 2)$.

Непосредственным следствием леммы 1 является

Лемма 2. *Пусть $f : T \to T$ — аналитическое отношение. Чтобы точка z принадлежала множеству $\mathscr{F}(f)$, необходимо, чтобы все ее образы относительно f также принадлежали $\mathscr{F}(f)$.*

Лемма 3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^*$ — область, $\Phi \subset \mathscr{H}(D, \mathbb{C}^*)$. Если точка $z_0 \in D$ является внешней точкой множества $P(\Phi) = \{\xi \in D : \exists g \in \Phi\ g(\xi) = \xi\}$, то Φ является нормальным в точке z_0.*

Доказательство. По условию существует область $U \subset D$, $z_0 \in U$, такая что $U \cap P(\Phi) = \varnothing$. Тогда семейство $\Xi = \{g(z)/z : g \in \Phi\}$ по признаку Монтеля нормально в U, так как всякая $h \in \Xi$ не принимает там значений 0, ∞ и 1. Отсюда следует, что Φ нормально в U. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ — аналитическое отношение. Тогда для каждой $z_0 \in \mathscr{F}(f)$ семейство $\Phi(f, z_0)$ нормально в точке z_0.*

Доказательство. Пусть $W \subset \mathbb{C}^*$, $z_0 \in W$,— односвязная область. Выберем область $U \ni z_0$ так, чтобы $\overline{U} \subset W$. Обозначим

$$\Xi = \{g \in \Phi(f, z_0) \mid \overline{U} \subset g(U)\}.$$

Предположим, что $\Phi(f, z_0)$ не будет в U нормальным семейством. Тогда Ξ также не является нормальным в U, так как семейство $\Phi(f, z_0) \backslash \Xi$ нормально в U согласно замечанию 1, в котором надо положить $K_1 = \{0\}$, $K_2 = \{\infty\}$, $K_3 = \overline{U}$. Поэтому из леммы 3 следует существование $g \in \Xi$ и $\xi_0 \in U$ таких, что $g(\xi_0) = \xi_0$. В соответствии с условием леммы итерационная последовательность $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ образует в W нормальное семейство.

Рассмотрим два случая.

1. Существует подпоследовательность g^{n_k} последовательности g^n, сходящаяся в W к постоянной. Тогда существует такое n, что $U \not\subset g^n(U)$. Однако это противоречит включению $\overline{U} \subset g(U)$.

2. Существует подпоследовательность g^{n_k} последовательности g^n, сходящаяся в W к функции, отличной от постоянной. Без ограничения общности можно считать, что $m_k = n_{k+1} - n_k$ возрастает. Последовательность g^{m_k} сходится в W к тождественному отображению. Однако это противоречит включению $g^n(U) \supset g(U) \supset \overline{U}$, $n > 0$.

Полученные противоречия доказывают лемму.

Лемма 5. *Пусть $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ — аналитическое отношение. Пусть R — множество всех его отталкивающих периодических точек. Тогда множество Жюлиа $\mathscr{J}(f)$ совпадает с $\overline{R}$.*

Доказательство. Включение $\overline{R} \subset \mathscr{J}(f)$ очевидно.

Докажем, что $\mathscr{J}(f) \subset \overline{R}$. Пусть $z_0 \in \mathscr{J}(f) \cap \mathbb{C}^*$, $W \subset \mathbb{C}^*$, $z_0 \in W$,— односвязная область. Выберем область $U \ni z_0$ так, чтобы $\overline{U} \subset W$. Обозначим

$$\Xi = \{g \in \Phi(f, z_0) \mid \overline{U} \subset g(U)\}.$$

Семейство Ξ не является нормальным в U. Поэтому из леммы 3 следует, что существуют $g \in \Xi$ и $\xi_0 \in U$ такие, что $g(\xi_0) = \xi_0$.

Рассмотрим целую функцию $h = \log \circ\, g \circ \exp$. При надлежащем выборе ветви логарифма точка $w_0 = \log \xi_0$ является неподвижной точкой функции h. Рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 4, показывают, что семейство $\{h^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является нормальным в $\Omega = \log(W)$. Поэтому Ω содержит точки множества $B = \mathscr{J}(h)\backslash\{\infty\}$. Значит, утверждение леммы очевидно, если $h(z)$ имеет вид $az + b$, и следует из теоремы B в противном случае.

Лемма 6. *Пусть $f : T \to T$, $T \in \{\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}\}$,— аналитическое отношение, F — множество всех его ветвей в T, а G — множество всевозможных конечных композиций функций из F. В случае $T = \overline{\mathbb{C}}$ потребуем также, чтобы F не содержало дробно-линейных функций. Множество*

$$\bigcup_{g\in G} \mathscr{J}(g)$$

всюду плотно в $\mathscr{J}(f)$.

Введем некоторые обозначения. Пусть D — некоторая область, и пусть $\varphi_n \in \mathscr{H}(D)$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим

$$E(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D) = \{\xi \in \overline{\mathbb{C}} : \exists\, z_n(\exists\, n_0\ \forall\, n > n_0\ z_n \notin \varphi_n(D)) \wedge z_n \to \xi\},$$

$$Q(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D) = \bigcup E(\{\varphi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D),$$

где объединение берется по всевозможным подпоследовательностям n_k натурального ряда.

Замечание 7. Множества $Q(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D)$ и $E(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D)$ компактны.

Замечание 8. Для того чтобы последовательность φ_n образовывала в D нормальное семейство, достаточно, чтобы $\mathrm{Card}(E(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D)) > 2$.

Замечание 9. Для любой подпоследовательности $\{\varphi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и любой подобласти $U \subset D$ справедливы вложения

$$E(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D) \subset E(\{\varphi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D) \subset Q(\{\varphi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D) \subset Q(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D),$$

$$E(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D) \subset E(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, U), \quad Q(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, D) \subset Q(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, U).$$

Далее будем использовать утверждения замечаний 7–9 без соответствующих ссылок.

Докажем следующие два вспомогательных утверждения.

Лемма 7. *Пусть $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность аналитических в некоторой области D функций, не образующая в D нормального семейства. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех подпоследовательностей $\{\phi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, которые также не образуют в D нормальных семейств. Тогда существует такая $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}$, что $Q(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}, D) = E(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}, D)$.*

Доказательство. Обозначим

$$\ell = \max\{\mathrm{Card}(E(\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, D)) : \{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}\}.$$

Заметим, что $\ell < 3$. Пусть $\mathrm{Card}(E(\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D)) = \ell$, $\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}$. Покажем, что справедливо

Утверждение 1. *Для каждой подпоследовательности* $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}$ *последовательности* $\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *и каждого компакта* K, $K \cap E(\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}, D) = \varnothing$, *найдется подпоследовательность* $\{\vartheta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}$ *последовательности* $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *такая, что*

$$K \cap Q(\{\vartheta_k\}_{k\in\mathbb{N}}, D) = \varnothing.$$

Доказательство утверждения 1. Обозначим через $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ последовательность всех таких номеров m, что $K \subset \eta_m(D)$, а через $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность остальных номеров. Положим $\vartheta_k = \eta_{m_k}$. Достаточно показать, что последовательность $\{\eta_{p_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ образует нормальное в D семейство. Пусть $\{\varrho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ее произвольная подпоследовательность. Покажем, что из нее можно выбрать сходящуюся в D подпоследовательность, для чего достаточно выбрать подпоследовательность, образующую в D нормальное семейство. Для этого рассмотрим последовательность точек $z_k \in K\backslash\varrho_k(D)$. Выберем из нее сходящуюся подпоследовательность $\{z_{k_q}\}_{q\in\mathbb{N}}$. Соответствующая ей подпоследовательность $\{\varrho_{k_q}\}_{q\in\mathbb{N}}$ обладает тем свойством, что $\mathrm{Card}(E(\{\varrho_{k_q}\}_{q\in\mathbb{N}}, D)) > \ell$. В соответствии с построением это и означает, что $\{\varrho_{k_q}\}_{q\in\mathbb{N}}$ образует в D нормальное семейство.

Теперь рассмотрим два случая.

1. $\ell = 0$. Утверждение леммы напрямую следует из утверждения 1 для $\eta_k = \chi_{0\,k}$ и $K = \overline{\mathbb{C}}$.

2. $\ell > 0$. Не умаляя общности можно считать, что $\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ не имеет в D сходящихся подпоследовательностей (при необходимости перейдем к обладающей этим свойством подпоследовательности, которая существует в силу ненормальности семейства, образованного $\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$). Найдется такая последовательность $\{\{\chi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}\}_{j\in\mathbb{N}}$, что для всех $j = 1, 2, \ldots$ последовательность $\{\chi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ является подпоследовательностью последовательности $\{\chi_{j-1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и имеет место включение

$$Q(\{\chi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D) \subset Q_j,$$

где

$$Q_j = \bigcup_{\omega\in E(\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D)} B(\omega, 1/j).$$

Действительно, так как для каждой подпоследовательности $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}$ последовательности $\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ имеет место равенство

$$E(\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}, D) = E(\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D),$$

в силу утверждения 1 для $\eta_k = \chi_{j\,k}$ и $K = \overline{\mathbb{C}}\backslash Q_{j+1}$ всякая последовательность $\{\chi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}$ имеет подпоследовательность $\{\chi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}$ такую, что $Q(\{\chi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D) \subset Q_{j+1}$. Таким образом, последнее утверждение доказывается по индукции.

Положим $v_k = \chi_{k\,k}$. Для всякого $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\{v_{k+j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ является подпоследовательностью последовательности $\{\chi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, значит,

$$Q(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}, D) \subset Q(\{\chi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D) \subset Q_j.$$

Поэтому $Q(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}, D) = E(\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, D)$. А так как $\{\chi_{0\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ не имеет сходящихся в D подпоследовательностей, то $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}$.

Лемма доказана.

Пусть $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций, аналитических в некоторой окрестности W точки ζ_0. Обозначим через $\mathfrak{N}(\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \zeta_0, R)$ множество всех таких подпоследовательностей последовательности $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, которые образуют в $B(\zeta_0, R) \subset W$ ненормальное семейство, и пусть

$$\mathfrak{M}(\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \zeta_0) = \bigcap_{R>0} \mathfrak{N}(\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \zeta_0, R).$$

Введем следующие сокращенные обозначения:

$$E(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, z, R) := E(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, B(z, R)),$$

$$Q(\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, z, R) := Q(\{\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, B(z, R)).$$

Лемма 8. *Существуют точка $\xi_0 \in W$, число $\delta^* > 0$ и множество E_0 такие, что для всякого $\delta \in (0; \delta^*]$ найдется $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}(\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \xi_0, \delta)$ такая, что $Q(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_0, \delta) = E(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_0, \delta) = E_0$.*

Доказательство. Последовательности

$$\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \quad \{\delta_j > 0\}_{j\in\mathbb{N}}, \quad \{\{\psi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}\}_{j\in\mathbb{N}},$$

$$B(\xi_{j+1}, \delta_{j+1}) \subset B(\xi_j, \delta_j), \quad \{\psi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}(\{\psi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

определим следующим образом. Пусть $\psi_{1\,k} = s_k$. В силу теоремы C существует точка $\xi_1 \in W$ такая, что $\{\psi_{1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}(\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \xi_1)$. Число $\delta_1 > 0$ выберем так, чтобы $B(\xi_1, \delta_1) \subset W$.

Остальные члены последовательностей определим рекуррентно. Пусть $j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $\{\psi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Обозначим

$$\ell_j = \max\{\operatorname{Card}(E(\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_j, \gamma)) : 0 < \gamma \leqslant \delta_j,\ \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}(\{\psi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_j, \gamma)\}.$$

Выберем число $\gamma_j \in (0, \delta_j]$ и последовательность $\{\varphi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}(\{\psi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_j, \gamma_j)$ так, чтобы $\operatorname{Card}(E(\{\varphi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_j, \gamma_j)) = \ell_j$. Пользуясь леммой 7, выберем $\{\psi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}(\{\varphi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_j, \gamma_j)$ так, чтобы

$$E(\{\psi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_j, \gamma_j) = Q(\{\psi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_j, \gamma_j).$$

По теореме C существует $\xi_{j+1} \in B(\xi_j, \gamma_j)$ такое, что

$$\{\psi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}(\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \xi_{j+1}).$$

Число δ_{j+1} выберем так, чтобы $B(\xi_{j+1}, \delta_{j+1}) \subset B(\xi_j, \gamma_j)$.

Заметим, что целочисленная последовательность $\{\ell_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, как следует из построения, ограничена и не убывает. Кроме того,

$$E(\{\varphi_{j\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_j, \gamma_j) \subset E(\{\psi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_{j+1}, \delta_{j+1}) \subset E(\{\varphi_{j+1\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_{j+1}, \gamma_{j+1}).$$

Поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что для всякого $0 < \gamma \leqslant \delta_m$ и всякой последовательности $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}(\{\psi_{m\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_m, \gamma)$ имеет место равенство

$$E(\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_m, \gamma) = E(\{\psi_{m\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_m, \delta_m).$$

Обозначим $\xi_0 := \xi_m$, $E_0 := E(\{\psi_{m\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}, \xi_m, \delta_m)$. Положим $\delta^* = \delta_m$. Тогда утверждение леммы 8 следует из леммы 7 при $\phi_n = \psi_{m\,n}$ и $D = B(\xi_m, \delta)$.

Доказательство леммы 6. Пусть $z_0 \in T \cap \mathscr{J}(f)$ и $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n = h_n \circ g_{n-1}$, $h_n \in F$, $g_0(z) \equiv z$,— некоторая итерационная последовательность, образующая в точке z_0 ненормальное семейство.

Как показывает рассуждение, аналогичное приведенному в доказательстве леммы 4, достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют область U,

$\overline{U} \subset B(z_0, \varepsilon)$, и функция $\varphi \in G$ такие, что $\overline{U} \subset \varphi(U)$. Для этого, в свою очередь, достаточно установить существование подпоследовательности $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ последовательности $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, точки w_0 и числа $\alpha > 0$ таких, что

$$Q(\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}, w_0, \alpha) \subset B(-1/\overline{w}_0, 1/\alpha) \quad \text{и} \quad B(w_0, \alpha) \subset B(z_0, \varepsilon).$$

Применим лемму 8 для $s_n = g_n$, $\zeta_0 = z_0$ и $W = B(z_0, \varepsilon)$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $\xi_0 \notin E_0$. Выбирая $\alpha \in (0, \delta^*]$ достаточно малым, чтобы

$$\overline{B(\xi_0, \alpha)} \subset B(z_0, \varepsilon) \backslash E_0,$$

полагая $\delta = \alpha$ в лемме 8 и обозначая $w_0 := \xi_0$, $\theta_k := v_k$, завершаем доказательство теоремы.

2. $\xi_0 \in E_0$. Выберем $\delta \in (0; \delta^*]$ так, чтобы $B(\xi_0, \delta) \subset B(z_0, \varepsilon) \backslash (E_0 \backslash \{\xi_0\})$. Пусть $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность из леммы 8. Рассмотрим множество X всех таких точек $z \in B(\xi_0, \delta)$, $z \neq \xi_0$, что $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}(\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}, z)$.

Пусть сначала $\mathrm{Card}(E_0) = 2$.

Предположим, что $X \neq \varnothing$. Пусть $w_0 \in X$ и $\alpha > 0$ достаточно мало, так что $\overline{B(w_0, \alpha)} \subset B(\xi_0, \delta) \backslash \{\xi_0\}$. Так как $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}(\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}, w_0)$, существует последовательность $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}, w_0, \alpha)$, не имеющая в $B(w_0, \alpha)$ сходящихся подпоследовательностей. Теперь утверждение теоремы следует из того, что

$$E(\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}, w_0, \alpha) = Q(\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}, w_0, \alpha) = E_0 \quad \text{и} \quad \overline{B(w_0, \alpha)} \cap E_0 = \varnothing.$$

Покажем, что действительно $X \neq \varnothing$. Предположим противное. Не умаляя общности, предположим, что $\xi_0 \neq \infty$. Пусть $\tilde{v}_k := \lambda_k \circ v_k$, где λ_k — последовательность конформных автоморфизмов сферы, сходящаяся к невырожденному дробно-линейному отображению такая, что $\{\xi_0, \infty\} \cap \tilde{v}_k(B(\xi_0, \delta)) = \varnothing$ для всех достаточно больших номеров k. Такая последовательность существует, так как $\mathrm{Card}(E_0) = 2$.

Не умаляя общности, можно считать, что $\{\tilde{v}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей ни в одной окрестности точки ξ_0, а в ее проколотой окрестности $B(\xi_0, \delta) \backslash \{\xi_0\}$ сходится (при необходимости следует выбрать из $\{\tilde{v}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ обладающую этим свойством подпоследовательность). Обозначим предел через $q(z)$. Как следует из возможности представления $\tilde{v}_k$ в окрестности ξ_0 через интеграл Коши, $q(z) \equiv \infty$. Обозначим $m_k := \min\{|\tilde{v}_k(z) - \xi_0| : z \in \gamma\}$, где $\gamma \subset B(\xi_0, \delta)$ — фиксированная окружность $|z - \xi_0| = r$. Из принципа максимума, примененного к функциям $1/(\tilde{v}_k(z) - \xi_0)$, следует, что $m_k < |\tilde{v}_k(z) - \xi_0|$, $|z - \xi_0| < r$. Так как $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то $\tilde{v}_k$ в области $|z - \xi_0| < r$ сходится к ∞. Получили противоречие, что и требовалось.

Пусть теперь $\mathrm{Card}(E_0) = 1$.

Этот случай может иметь место только при $T = \overline{\mathbb{C}}$. Тогда начиная с некоторого номера будет $v_k(B(\xi_0, \delta)) \cup B(\xi_0, \delta) = \overline{\mathbb{C}}$ и, следовательно, либо $B(\xi_0, \delta) \cap \mathscr{J}(v_k) \neq \varnothing$, либо $\mathscr{J}(v_k) = \varnothing$. Первый случай можно не рассматривать, так как тогда теорема доказана, а второй случай в соответствии с теоремой А невозможен.

Доказательство завершено.

Лемма 9. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — аналитическое отношение, $\mathscr{F}(f) = \mathbb{C}$. Тогда для каждой $z_0 \in \mathbb{C}$ семейство $\Phi(f, z_0)$ является нормальным в точке z_0.*

Доказательство. Обозначим множество всевозможных композиций ветвей f через G. Рассмотрим произвольную $g \in G$. Множество $\mathscr{J}(g) \backslash \{\infty\}$ пусто.

Поэтому $g = az + b$, a, b — постоянные, ибо в противном случае согласно теореме А $\mathscr{J}(g)$ содержало бы бесконечное число точек. Кроме того, $|a| \leqslant 1$, так как в противном случае существовала бы отталкивающая неподвижная точка $b/(1-a) \in \mathbb{C}$.

Пусть $\{g_n \in G\}_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n = a_n z + b_n$. Выбирая подпоследовательность натурального ряда n_k так, чтобы a_{n_k} и b_{n_k} сходились, получаем сходящуюся подпоследовательность g_{n_k}. Из этого рассуждения следует, что G — нормальное семейство, что и требовалось показать.

Доказательства предложений 1, 2 и теоремы 1

Доказательство предложения 1. Обозначим через $\mathscr{F}^*(f)$ множество всех точек $z_0 \in \Delta$, для которых семейство $\Phi(f, z_0)$ нормально в точке z_0. Очевидно, $\mathscr{F}(f) \subset \mathscr{F}^*(f)$.

Докажем обратное включение.

Обозначим $\ell = \operatorname{Card}(\overline{\mathbb{C}} \backslash \mathscr{F}(f))$. Если $\ell > 2$, то доказательство сводится к ссылке на лемму 2 и признак Монтеля.

Пусть теперь $\ell \leqslant 2$. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $\mathscr{F}(f) \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*\}$. Заметим, что случай $\mathscr{F}(f) = \overline{\mathbb{C}}$ в действительности невозможен. Предполагая противное, получим, что $\Delta = \overline{\mathbb{C}}$ и, следовательно, всякая ветвь g аналитического отношения f есть рациональная функция, причем $\overline{\mathbb{C}} = \mathscr{F}(f) \subset \mathscr{F}(g)$, что противоречит теореме А.

Таким образом, утверждение теоремы следует из лемм 2 и 4 или 9 (в случае $\mathscr{F}(f) = \mathbb{C}^*$ или $\mathscr{F}(f) = \mathbb{C}$ соответственно), примененных для $T = \mathscr{F}(f)$.

Доказательство предложения 2. Предположим противное, т. е. пусть существуют точка $z_0 \in T \cap \mathscr{J}(f)$ и ее односвязная окрестность U такие, что $D = U \backslash \{z_0\} \subset \mathscr{F}(f)$. Это значит, что существует подпоследовательность $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ итерационной последовательности, не имеющая сходящейся подпоследовательности ни в одной окрестности точки z_0. Не умаляя общности, можно считать, что $\infty \notin \mathscr{F}(f)$ и g_n сходится на D к некоторой функции $h : D \to \overline{\mathbb{C}}$. Заметим, что в силу леммы 2 если h не является постоянной, то $h(D) \subset \mathscr{F}(f)$.

Пусть $z_1, z_2 \in (\overline{\mathbb{C}} \backslash \mathscr{F}(f) \backslash \{z_0\})$, $z_1 \neq z_2$. Как следует из интегральной теоремы Коши, если $\infty \notin h(D)$ и $g_{n_k}(z_0) \neq \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то g_{n_k} сходится в U.

Следующие случаи исчерпывают все возможности.

1. Пусть $h(D) \cap \{z_1, z_2\} = \varnothing$. При помощи конформных автоморфизмов сферы можно перейти к случаю, когда $z_1 = \infty$. Поэтому $\exists\, n_1\ \forall\, n \geqslant n_1\ g_n(z_0) = z_1$. Аналогично $\exists\, n_2\ \forall\, n \geqslant n_2\ g_n(z_0) = z_2$. Таким образом, получаем противоречие, так как $z_1 \neq z_2$.

2. Пусть теперь $h \equiv z_j$, $j \in \{1, 2\}$. Не умаляя общности, будем считать, что $j = 1$. Тогда $\exists\, n_2\ \forall\, n \geqslant n_2\ g_n(z_0) = z_2$. Таким образом, имеет место равенство $g_{n_2+m} = \varphi_m \circ g_{n_2}$, $m > 0$, где φ_m — некоторая подпоследовательность итерационной последовательности в точке z_2, причем $\varphi_m(z_2) = z_2$ для всех m. Точка z_2 имеет проколотую окрестность $W = g_{n_2}(D) \subset \mathscr{F}(f)$. Помещая при помощи конформных автоморфизмов сферы ∞ в z_0, получаем, что $\varphi_m \to z_0$ на W, следовательно, $h \equiv z_0$, что противоречит предположению.

Полученные противоречия доказывают предложение.

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 следует из лемм 5 и 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beardon A. F.* Iteration of Rational Functions. New York: Springer-Verl., 1991.
2. *Carleson L., Gamelin T. W.* Complex Dynamics. New York: Springer-Verl., 1993.
3. *Bergweiler W.* An introduction to complex dynamics // Textos de Matemática, Universidade de Coimbra. Sér. B. 1995. V. 6. P. 1–37.
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
5. *Неванлинна Р.* Униформизация. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.

Статья поступила 12 декабря 2001 г.

Гуменюк Павел Анатольевич
Саратовский гос. университет им. Н. Г. Чернышевского,
Астраханская, 83, Саратов 410026
RZP@forpost.ru