*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6*

*УДК 512.542*

# ТЕОРИЯ ФРАТТИНИ ДЛЯ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

**Го Вэньбинь, К. П. Шум**

**Аннотация:** Теория Фраттини формаций и классов Шунка конечных групп распространяется до теории Фраттини формаций и классов Шунка конечных универсальных алгебр мальцевских многообразий. Доказано, что если $\mathscr{F} \neq (1)$ — непустая формация (класс Шунка) алгебр мальцевского многообразия, то их фраттиниева подформация (фраттиниев подкласс Шунка) $\Phi(\mathscr{F})$ состоит из всех непорождающих алгебр $\mathscr{F}$; кроме того, если $\mathscr{M}$ — формация (класс Шунка), содержащийся в $\mathscr{F}$, то $\Phi(\mathscr{M}) \subseteq \Phi(\mathscr{F})$.

**Ключевые слова:** универсальная алгебра, формация, класс Шунка, теория Фраттини

## 1. Введение

Напомним, что мальцевское многообразие алгебр — это многообразие универсальных алгебр $A$ такое, что для любых конгруэнций $\pi$ и $\varphi$, определенных на $A$, выполнено условие перестановочности $\pi\varphi = \varphi\pi$. Всюду в этой статье все универсальные алгебры конечны и входят в некоторое фиксированное мальцевское многообразие. Известно, что многообразия групп, колец, линейных алгебр, мультиколец и $m$-групп [1] являются мальцевскими многообразиями.

Множество $\mathscr{F}$ алгебр назовем *классом алгебр*, если $A \cong B \in \mathscr{F}$ влечет $A \in \mathscr{F}$. Следуя Л. А. Шеметкову [2], класс алгебр $\mathscr{F}$ назовем *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфизмов и из $A/\pi \in \mathscr{F}$ и $A/\varphi \in \mathscr{F}$ вытекает, что $A/\pi \cap \varphi \in \mathscr{F}$, где $\pi$ и $\varphi$ — конгруэнции на алгебре $A$. Формация конечных групп и формации конечномерных алгебр Ли изучались многими авторами, см. [3–7] и др. Л. А. Шеметков и А. Н. Скиба [8] распространили их исследования на формации мультиколец и универсальных алгебр.

Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{F}$ — формации и $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{M}$ называют *подформацией* $\mathscr{F}$. Подформация $\mathscr{M}$ в $\mathscr{F}$ *максимальна*, если $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{F}$ и нет формации $\mathscr{H}$ такой, что $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{H} \subsetneqq \mathscr{F}$. Обозначим пересечение всех максимальных подформаций $\mathscr{F}$ через $\Phi(\mathscr{F})$ и назовем его *фраттиниевой подформацией в* $\mathscr{F}$. Изучим сначала фраттиниевы подформации, а также фраттиниевы подклассы классов Шунка универсальных алгебр.

В литературе понятие классов Шунка групп появилось в работе [9] и недавно было распространено на классы Шунка конечных универсальных алгебр [10].

Research of the first author is supported by the NNSF of China (Grant N 10171086), the 333GCF of Jiangsu Province and a Croucher Fellowship of Hong Kong. Research of the second author is partially supported by a UGC(HK) (grant 2001/2002).

В этой статье мы доказываем, что если $\mathscr{F}$ — нетривиальная формация (класс Шунка) универсальных алгебр, т. е. $\mathscr{F}$ не является классом всех одноэлементных алгебр, то его фраттиниева подформация (фраттиниев подкласс Шунка) $\Phi(\mathscr{F})$ состоит из все непорождающих алгебр в $\mathscr{F}$. Кроме того, если $\mathscr{M}$ — формация (класс Шунка), содержащаяся в $\mathscr{F}$, то $\Phi(\mathscr{M}) \subseteq \Phi(\mathscr{F})$. В доказательстве последнего результата мы существенно используем тот факт, что решетка классов Шунка дистрибутивна [10]. Эти результаты важны — мы покажем, что многие известные результаты легко вытекают из наших утверждений.

Используемые в данной статье понятия и термины можно найти в [8, 11].

## 2. Предварительные сведения

В этом разделе введем некоторые понятия и укажем основные свойства универсальных алгебр.

Пусть $H$ — подалгебра алгебры $A$ и $\pi$ — конгруэнция на $A$. Следуя А. И. Мальцеву [11], обозначим через $\pi H$ множество $\pi$-классов $\{x \in A \mid x\pi h$ для некоторого $h \in H\}$. Мы также используем символ $\Delta$ для конгруэнции равенства на $A$, так что $x\Delta y$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Следуя [8], через $H_A$ мы обозначаем произведение $\pi_1\pi_2\dots\pi_t$, где $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t\}$ — множество всех конгруэнций $\pi_i$ на $A$ таких, что $\pi_i H = H$. Конгруэнцию $\pi$ на $A$ называют *минимальной*, если $\Delta \subsetneqq \pi$ и нет конгруэнции $\varphi$ на $A$ такой, что $\Delta \subsetneqq \varphi \subsetneqq \pi$. Если $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t\}$ — множество всех минимальных конгруэнций на $A$, то положим $\mathrm{soc}(A) = \pi_1\pi_2\dots\pi_t$ и (см. [8]) назовем такое произведение *цокольной конгруэнцией в* $A$. Кроме того, известно, что если $\pi$, $\varphi$ — конгруэнции на $A$ и $\pi \subseteq \varphi$, то $\varphi/\pi$ — конгруэнция на $A/\pi$ такая, что $[a]_\pi(\varphi/\pi)[b]_\pi$ тогда и только тогда, когда $a\varphi b$, где $[a]_\pi = \{x \in A \mid x\pi a\}$.

Для алгебры $A$ обозначим через $\tau(A)$ множество подалгебр $A$. Тогда, следуя [12], будем называть $\tau$ *подсистемным функтором*, если:

i) $A \in \tau(A)$ для любой алгебры $A$;

ii) для каждого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ выполнены соотношения $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Подсистемный функтор $\tau$ назовем *замкнутым*, если $\tau(H) \subseteq \tau(G)$ для любой алгебры $G$ и $H \in \tau(G)$. Будем писать $\tau_1 \leq \tau_2$ , если $\tau_1(A) \subseteq \tau_2(A)$ для всех алгебр $A$.

Пусть $\bar{\tau}$ — пересечение всех замкнутых подсистемных функторов, содержащих подсистемный функтор $\tau$. Тогда $\bar{\tau}$, очевидно, является наименьшим замкнутым подсистемным функтором, содержащим $\tau$. Назовем $\bar{\tau}$ *замыканием* $\tau$.

Класс алгебр $\mathscr{F}$ называют $\tau$-*замкнутым*, если $\tau(G) \subseteq \mathscr{F}$ для всякой алгебры $G \in \mathscr{F}$. Для множества $\mathscr{X}$ алгебр мы будем использовать обозначение $\tau\,\mathrm{form}\,\mathscr{X}$ для пересечения всех $\tau$-замкнутых формаций, содержащих $\mathscr{X}$.

Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{H}$ — $\tau$-замкнутые формации и $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{M}$. Через $\mathscr{M}/_\tau\mathscr{H}$ будем обозначать решетку всех $\tau$-замкнутых формаций, расположенных между $\mathscr{H}$ и $\mathscr{M}$ (т. е. $\mathscr{F} \in \mathscr{M}/_\tau\mathscr{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F} \subseteq \mathscr{M}$ и $\mathscr{F}$ — $\tau$-замкнутая формация). Положим

$$\mathscr{M} \vee_\tau \mathscr{H} = \tau\,\mathrm{form}(\mathscr{M} \cup \mathscr{H})$$

и

$$\mathscr{M} \wedge \mathscr{H} = \mathscr{M} \cap \mathscr{H}$$

для любых двух $\tau$-замкнутых формаций $\mathscr{M}$ и $\mathscr{H}$.

В дальнейшем нам будут полезны следующие утверждения

**Предложение 2.1** (см. [13, предложение II.6.9]). *Если все конгруэнции на $A$ перестановочны, то решетка конгруэнций на $A$ модулярна.*

**Предложение 2.2** [8, теорема 9.8]. *Если решетка конгруэнций каждой алгебры формации $\mathscr{M}$ модулярна, то $\mathscr{H} \wedge (\mathscr{X} \vee \mathscr{F}) = \mathscr{X} \vee (\mathscr{H} \wedge \mathscr{F})$ для любых подформаций $\mathscr{X}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{F}$ в $\mathscr{M}$ таких, что $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{H}$.*

**Предложение 2.3** [14, следствие 3.5]. *Пусть $\{\mathscr{M}_i \mid i \in I\}$ — множество $\tau$-замкнутых формаций универсальных алгебр. Тогда*

$$\tau\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathscr{M}_i\Big) = \mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathscr{M}_i\Big).$$

**Предложение 2.4** [15, теорема IV.2]. *Пусть $L$ — модулярная решетка и $a, b \in L$. Тогда интервалы $[a, a \vee b]$ и $[a \wedge b, b]$ изоморфны.*

**Предложение 2.5.** *Пусть $\tau$ — подсистемный функтор. Тогда $T \in \bar{\tau}(A)$ тогда и только тогда, когда существует цепь*

$$T = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_{t-1} \subseteq A_t = A$$

*такая, что $A_{i-1} \in \tau(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Для любой алгебры $G$ пусть $\tau_1(G)$ — множество, состоящее из подалгебр $T$ в $G$ с возрастающей цепью от $T$ до $G$, т. е.

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \cdots \subseteq T_{t-1} \subseteq T_t = G,$$

где $T_{i-1} \in \tau(T_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$.

Для завершения доказательства надо показать, что $\tau_1 = \bar{\tau}$. Легко видеть, что $\tau \leqslant \tau_1$.

Для доказательства того, что $\tau_1 = \bar{\tau}$, вначале докажем, что $\tau_1$ — подсистемный функтор. Пусть $\varphi : A \to B$ — эпиморфизм и $H \in \tau_1(A)$, $T \in \tau_1(B)$. Рассмотрим цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{r-1} \subseteq H_r = A,$$

где $H_{i-1} \in \tau(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, и пусть

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \cdots \subseteq T_{k-1} \subseteq T_k = B$$

— соответствующая цепь, где $T_{i-1} \subseteq \tau(T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку $A^\varphi = B$, имеем

$$H^\varphi = H_0^\varphi \subseteq H_1^\varphi \subseteq \cdots \subseteq H_{r-1}^\varphi \subseteq H_r^\varphi = A^\varphi = B.$$

Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Действуя эпиморфизмом $\varphi_{H_i} : H_i \to H_i^\varphi$, находим по определению подсистемного функтора, что $H_{i-1}^\varphi \in \tau\big(H_i^\varphi\big)$. Следовательно, $H^\varphi \in \tau_1(B)$.

Рассмотрим теперь следующую цепь:

$$T^{\varphi^{-1}} = T_0^{\varphi^{-1}} \subseteq T_1^{\varphi^{-1}} \subseteq \cdots \subseteq T_{k-1}^{\varphi^{-1}} \subseteq T_k^{\varphi^{-1}} = B^{\varphi^{-1}} = A.$$

Пусть $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и $H = T_j^{\varphi^{-1}}$. Так как $T_{j-1} \in \tau(T_j)$, $T_{j-1}^{\varphi^{-1}} \in \tau(H) = \tau\big(T_j^{\varphi^{-1}}\big)$ под действием эпиморфизма $\varphi_H : H \to T_j$, то $T^{\varphi^{-1}} \in \tau_1(A)$. Ясно, что $G \in \tau_1(G)$, ибо $G \in \tau(G) \subseteq \tau_1(G)$. Отсюда $\tau_1$ — подсистемный функтор. Очевидно, что $\tau_1 = \bar{\tau}_1$.

Докажем теперь, что $\tau_1 = \bar{\tau}$. Поскольку $\tau \leqslant \tau_1$, имеем $\bar{\tau} \leqslant \tau_1$. Допустим, что $\tau_1 \nleqslant \bar{\tau}$, и пусть $G$ — алгебра, в которой есть подалгебра $H$ такая, что $H \in \tau_1(G) \backslash \bar{\tau}(G)$. Тогда согласно определению подсистемного функтора $\tau_1$ существует цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{t-1} \subseteq H_t = G$$

такая, что $H_{i-1} \in \tau(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Поскольку $\tau \leqslant \bar{\tau}$, то $H_{t-1} \in \bar{\tau}(G)$, так что $H_{t-2} \in \bar{\tau}(H_{t-1})$, и т. д. Это приводит к тому, что $H_{i-1} \in \bar{\tau}(H_i)$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Отсюда $H \in \bar{\tau}(G)$, ибо $\bar{\tau}$ замкнут. Полученное противоречие показывает, что $\tau_1 \leqslant \bar{\tau}$, тем самым $\tau_1 = \bar{\tau}$. Доказательство завершено.

**Предложение 2.6.** *Пусть $\tau$ — подсистемный функтор. Тогда класс $\mathscr{X}$ алгебр $\tau$-замкнут в том и только в том случае, если $\mathscr{X}$ $\bar{\tau}$-замкнут.*

Доказательство. Если $\mathscr{X}$ $\bar{\tau}$-замкнут, то $\mathscr{X}$, очевидно, $\tau$-замкнут. Значит, если $\mathscr{X}$ $\tau$-замкнут, но не $\bar{\tau}$-замкнут, то существует алгебра $A$ в $\mathscr{X}$ с подалгеброй $T \in \bar{\tau}(A)$ такой, что $T \notin \mathscr{X}$. По предложению 2.5 существует цепь

$$T = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_{t-1} \subseteq A_t = A$$

такая, что $A_{i-1} \in \tau(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Поскольку $A \in \mathscr{X}$ и $\mathscr{X}$ $\tau$-замкнута, имеем $A_{t-1} \in \mathscr{X}$. Аналогично $A_{t-2} \in \mathscr{X}, \ldots, T \in \mathscr{X}$; противоречие. Предложение доказано.

## 3. Теория Фраттини формаций универсальных алгебр

Пусть $\mathscr{M}$ — $\tau$-замкнутая подформация в $\tau$-замкнутой формации $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{F}$ и нет $\tau$-замкнутой формации $\mathscr{H}$ такой, что $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{H} \subsetneqq \mathscr{F}$, то $\mathscr{M}$ называют *максимальной $\tau$-замкнутой подформацией в $\mathscr{F}$*. Пусть $\Omega$ — множество всех максимальных $\tau$-замкнутых подформаций в $\mathscr{F}$. Положим

$$\Phi_\tau(\mathscr{F}) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\mathscr{M} \in \Omega} \mathscr{M}, & \text{если } \Omega \neq \varnothing, \\ \mathscr{F}, & \text{если } \Omega = \varnothing. \end{cases}$$

В этом случае будем говорить, что $\Phi_\tau(\mathscr{F})$ — *$\tau$-фраттиниева подформация* в $\mathscr{F}$. В этом разделе дадим описание таких подформаций.

Пусть $\mathscr{X}$ — класс алгебр. Будем использовать обозначение $\tau \operatorname{form} \mathscr{X}$ для пересечения всех $\tau$-замкнутых формаций, содержащих $\mathscr{X}$. Если $\mathscr{X} = \{G\}$ — одноэлементное множество, то будем писать $\tau \operatorname{form} G$ вместо $\tau \operatorname{form}\{G\}$. Формация $\mathscr{F}$ называется *однопорожденной $\tau$-замкнутой формацией*, если $\mathscr{F} = \tau \operatorname{form} G$ для некоторой алгебры $G$.

**Лемма 3.1.** *Пусть $\mathscr{H}$ — собственная $\tau$-замкнутая подформация однопорожденной $\tau$-замкнутой формации $\mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{F}$ имеет максимальную $\tau$-замкнутую подформацию $\mathscr{M}$ такую, что $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{M}$.*

Доказательство. Пусть $G$ — алгебра такая, что $\mathscr{F} = \tau \operatorname{form} G$. Пусть $\Omega$ — множество всех $\tau$-замкнутых собственных подформаций в $\mathscr{F}$, содержащих $\mathscr{H}$, и $\Sigma = \{\mathscr{F}_i \mid i \in I\}$ — цепь в $\Omega$ (т. е. для любых $i, j \in I$ $(i \neq j)$ либо $\mathscr{F}_i \subseteq \mathscr{F}_j$, либо $\mathscr{F}_j \subseteq \mathscr{F}_i$). Положим $\mathscr{M} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathscr{F}_i$. Покажем, что $\mathscr{M} \in \Omega$. Очевидно, $\mathscr{M}$ — $\tau$-замкнутая подформация в $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{M}$. Допустим, что $G \in \mathscr{M}$. Тогда $G \in \mathscr{F}_i$ для некоторого $i \in I$ и, значит,

$$\mathscr{F} = \tau \operatorname{form} G \subseteq \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}.$$

Полученное противоречие показывает, что $G \notin \mathscr{M}$. Отсюда $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{F}$ и $\mathscr{M}$ — собственная $\tau$-замкнутая подформация в $\mathscr{F}$, содержащая $\mathscr{H}$. По лемме Цорна существует максимальный элемент $\mathscr{M} \in \Omega$. Ясно, что $\mathscr{M}$ — максимальная $\tau$-замкнутая подформация в $\mathscr{F}$ такая, что $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{M}$. Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** *Решетка $\mathscr{M}/_\tau\mathscr{H}$ модулярна для любых $\tau$-замкнутых формаций $\mathscr{M}$ и $\mathscr{H}$, где $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$ — $\tau$-замкнутые формации в $\mathscr{M}/_\tau\mathscr{H}$ такие, что $\mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{F}_1$. Покажем, что

$$\mathscr{F}_1 \wedge (\mathscr{F}_2 \vee_\tau \mathscr{F}_3) = \mathscr{F}_2 \vee_\tau (\mathscr{F}_1 \wedge \mathscr{F}_3).$$

Поскольку в каждой алгебре $A$ перестановочна, имеем $\pi\varphi = \varphi\pi$ для любых конгруэнций $\pi$ и $\varphi$ на $A$. В силу предложений 2.1 и 2.2

$$\mathscr{F}_1 \cap (\operatorname{form} \mathscr{F}_2 \cup \mathscr{F}_3)) = \operatorname{form}(\mathscr{F}_2 \cup (\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_3)).$$

Согласно предложению 2.3 имеем

$$\operatorname{form}(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{F}_3) = \tau \operatorname{form}(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{F}_3) = \mathscr{F}_2 \vee_\tau \mathscr{F}_3,$$

и

$$\operatorname{form}(\mathscr{F}_2 \cup (\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_3)) = \tau \operatorname{form}(\mathscr{F}_2 \cup (\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_3)) = \mathscr{F}_2 \vee_\tau (\mathscr{F}_1 \wedge \mathscr{F}_3).$$

Отсюда

$$\mathscr{F}_1 \wedge (\mathscr{F}_2 \vee_\tau \mathscr{F}_3) = \mathscr{F}_1 \cap (\mathscr{F}_2 \vee_\tau \mathscr{F}_3) = \mathscr{F}_2 \vee_\tau (\mathscr{F}_1 \wedge \mathscr{F}_3).$$

Это показывает, что решетка $\mathscr{M}/_\tau\mathscr{H}$ модулярна.

**Лемма 3.3.** *Пусть $\mathscr{F} = \mathscr{M} \vee_\tau \mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ — однопорожденная $\tau$-замкнутая формация и $\mathscr{M}$ — собственная $\tau$-замкнутая подформация в $\mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{F}$ обладает максимальной $\tau$-замкнутой подформацией $\mathscr{F}_1$ такой, что $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}_1$.*

Доказательство. Если $\mathscr{M} \cap \mathscr{H} = \mathscr{H}$, то $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{M}$ и $\mathscr{M} \cup \mathscr{H} = \mathscr{M}$. Отсюда

$$\mathscr{F} = \tau \operatorname{form}(\mathscr{M} \cup \mathscr{H}) = \tau \operatorname{form} \mathscr{M} = \mathscr{M}.$$

Это противоречит тому, что $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{F}$ и, следовательно, $\mathscr{M} \cap \mathscr{H} \subsetneqq \mathscr{H}$. По лемме 3.1 формация $\mathscr{H}$ имеет максимальную $\tau$-замкнутую подформацию $\mathscr{H}_1$ такую, что $\mathscr{M} \cap \mathscr{H} \subseteq \mathscr{H}_1$. По лемме 3.2 и предложению 2.4 видим, что решетки $\mathscr{F}/_\tau\mathscr{M} = (\mathscr{M} \vee_\tau \mathscr{H})/_\tau\mathscr{M}$ и $\mathscr{H}/_\tau(\mathscr{M} \cap \mathscr{H})$ изоморфны. Это показывает, что $\mathscr{F}$ обладает максимальной $\tau$-замкнутой подформацией $\mathscr{F}_1$, содержащей $\mathscr{M}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{F}$ — $\tau$-замкнутая формация и $G \in \mathscr{F}$. Алгебра $G$ называется *$\tau$-непорождающей* в $\mathscr{F}$, если $\mathscr{F} = \tau \operatorname{form}(\mathscr{X} \cup \{G\})$ всегда влечет $\mathscr{F} = \tau \operatorname{form} \mathscr{X}$.

Для краткости будем писать $(1)_\circ$ для обозначения класса всех одноэлементных алгебр.

**Теорема 3.1.** *Пусть $\mathscr{F} \neq (1)_\circ$ — непустая $\tau$-замкнутая формация алгебр. Тогда*

(i) *$\Phi_\tau(\mathscr{F})$ состоит из всех $\tau$-непорождающих алгебр в $\mathscr{F}$,*

(ii) *если $\mathscr{M}$ — $\tau$-замкнутая формация и $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$, то $\Phi_\tau(\mathscr{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathscr{F})$.*

Доказательство. (i) Пусть $G$ — $\tau$-непорождающая алгебра в $\mathscr{F}$. Допустим, что $G \notin \Phi_\tau(\mathscr{F})$. Тогда $\Phi_\tau(\mathscr{F}) \subsetneqq \mathscr{F}$ и найдется максимальная $\tau$-замкнутая подформация $\mathscr{F}_1$ в $\mathscr{F}$ такая, что $G \notin \mathscr{F}_1$. Отсюда

$$\mathscr{F} = \tau \operatorname{form}(\mathscr{F}_1 \cup \{G\}) = \tau \operatorname{form} \mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_1 \subsetneqq \mathscr{F};$$

противоречие. Значит, $G \in \Phi_\tau(\mathscr{F})$.

Обратно, если $G \in \Phi_\tau(\mathscr{F})$, то надо доказать, что $G$ — $\tau$-непорождающая алгебра в $\mathscr{F}$. Допустим, что есть класс алгебр $\mathscr{X}$ такой, что $\tau\,\mathrm{form}(\mathscr{X} \cup \{G\}) = \mathscr{F}$ и $\mathscr{M} = \tau\,\mathrm{form}\,\mathscr{X} \neq \mathscr{F}$. Так как

$$\mathscr{F} = \tau\,\mathrm{form}(\mathscr{X} \cup \{G\}) = \tau\,\mathrm{form}(\tau\,\mathrm{form}\,\mathscr{X} \cup \tau\,\mathrm{form}\,G) = \mathscr{M} \vee_\tau \tau\,\mathrm{form}\,G,$$

по лемме 3.3 формация $\mathscr{F}$ обладает максимальной $\tau$-замкнутой подформацией $\mathscr{F}_1$ такой, что $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}_1$. Поскольку $G \in \Phi_\tau(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{F}_1$, имеем

$$\mathscr{F} = \mathscr{M} \vee_\tau \tau\,\mathrm{form}\,G \subseteq \mathscr{F}_1 \subsetneqq \mathscr{F}.$$

Полученное противоречие показывает, что $G$ — $\tau$-непорождающая алгебра в $\mathscr{F}$. Значит, подформация $\Phi_\tau(\mathscr{F})$ состоит из всех $\tau$-непорождающих алгебр в $\mathscr{F}$.

(ii) Пусть $\mathscr{M}$ — $\tau$-замкнутая подформация в $\mathscr{F}$ и $\Phi = \Phi_\tau(\mathscr{M})$. Предположим, что $\Phi \not\subseteq \Phi_\tau(\mathscr{F})$. Тогда $\mathscr{F}$ имеет максимальную $\tau$-замкнутую подформацию $\mathscr{F}_1$ такую, что $\Phi \not\subseteq \mathscr{F}_1$. Далее, $\mathscr{M} \not\subseteq \mathscr{F}_1$, тем самым $\mathscr{F}_1 \vee_\tau \mathscr{M} = \tau\,\mathrm{form}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{M}) = \mathscr{F}$. Так как $\mathscr{F}_1$ — максимальная $\tau$-замкнутая подформация $\mathscr{F}$, в решетке $\mathscr{F}/_\tau\mathscr{F}_1 = (\mathscr{F}_1 \vee \mathscr{M})/_\tau\mathscr{F}_1$ есть только два элемента $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}$. По лемме 3.2 и предложению 2.4 решетка $\mathscr{F}/_\tau\mathscr{F}_1$ изоморфна решетке $\mathscr{M}/_\tau(\mathscr{M} \cap \mathscr{F}_1)$. Это означает, что $\mathscr{M} \cap \mathscr{F}_1$ — максимальная $\tau$-замкнутая подформация в $\mathscr{M}$. Отсюда $\Phi \subseteq \mathscr{M} \cap \mathscr{F}_1$ и, значит, $\Phi \subseteq \mathscr{F}_1$. Полученное противоречие показывает, что $\Phi \subseteq \Phi_\tau(\mathscr{F})$, и теорема доказана.

Если множество $\tau(G)$ состоит из всех подалгебр алгебры $G$, то можно писать $s$ вместо $\tau$.

Непосредственно из теоремы 3.1 вытекает

**Следствие 3.1.** *Пусть $\mathscr{F} \neq (1)_\circ$ — непустая $s$-замкнутая формация алгебр. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $\Phi_s(\mathscr{F})$ *состоит из всех $s$-непорождающих алгебр в $\mathscr{F}$,*

(2) *если $\mathscr{M}$ — $s$-замкнутая формация и $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$, то $\Phi_S(\mathscr{M}) \subseteq \Phi_S(\mathscr{F})$.*

Используя следствие 3.1, можно сразу получить результат из [16].

**Следствие 3.2** [16]. *Пусть $\mathscr{F} \neq (1)_\circ$ — непустая $s$-замкнутая формация конечных $n$-групп. Тогда*

(1) $\Phi_S(\mathscr{F})$ *состоит из $s$-непорождающих $n$-групп в $\mathscr{F}$,*

(2) *если $\mathscr{M}$ — $s$-замкнутая формация и $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$, то $\Phi_S(\mathscr{M}) \subseteq \Phi_S(\mathscr{F})$.*

Если множество $\tau(A)$ состоит только из одного элемента: $\tau(A) = \{A\}$, то мы обычно будем опускать символ $\tau$ и писать просто «form» вместо «$\tau\,$form» и «$\Phi$» вместо «$\Phi_\tau$».

**Следствие 3.3.** *Пусть $\mathscr{F} \neq (1)_\circ$ — непустая формация алгебр. Тогда*

(1) $\Phi(\mathscr{F})$ *состоит из всех непорождающих алгебр в $\mathscr{F}$;*

(2) *если $\mathscr{M}$ — подформация в $\mathscr{F}$, то $\Phi(\mathscr{M}) \subseteq \Phi(\mathscr{F})$.*

Опираясь на следствие 3.3, получаем соответственно результаты А. Ф. Аль-Дабабсеха, У. Херцфельд и А. Н. Скибы.

**Следствие 3.4** [16]. *Пусть $\mathscr{F} \neq (1)_\circ$ — непустая формация конечных $n$-групп. Тогда*

(1) $\Phi(\mathscr{F})$ *состоит из всех непорождающих $n$-групп в $\mathscr{F}$;*

(2) *если $\mathscr{M}$ — подформация в $\mathscr{F}$, то $\Phi(\mathscr{M}) \subseteq \Phi(\mathscr{F})$.*

**Следствие 3.5** [17, 18]. *Пусть $\mathscr{F}$ — формация конечных групп. Тогда $\Phi(\mathscr{F})$ состоит из всех непорождающих групп в $\mathscr{F}$.*

Следующая теорема связана с фраттиниевыми подформациями $\tau$-замкнутых формаций $\mathscr{F}$ конечных алгебр.

**Теорема 3.2.** *Пусть $\mathscr{F}$ — $\tau$-замкнутая формация конечных алгебр. Тогда для любого $G \in \mathscr{F}$*

$$G/\operatorname{soc}(G) \in \Phi_\tau(\mathscr{F}).$$

Доказательство. Если в $\mathscr{F}$ нет максимальных $\tau$-замкнутых подформаций, то $\Phi_\tau(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$ и тем самым $G/\operatorname{soc}(G) \in \Phi_\tau(\mathscr{F})$.

Допустим, что в $\mathscr{F}$ есть максимальная $\tau$-замкнутая подформация. Пусть тогда $\mathscr{M}$ — максимальная $\tau$-замкнутая подформация в $\mathscr{F}$ такая, что $G/\operatorname{soc}(G) \notin \mathscr{M}$. Пусть $A = G/\operatorname{soc}(G)$ и $\mathscr{X} = HS_{\bar\tau}(A)$, где $S_{\bar\tau}(A) = \{G \mid G \in \bar\tau(A)\}$. Согласно предложению 2.6 $\mathscr{X}$ — $\tau$-замкнутый гомоморф, так что $\mathscr{X} \cup \mathscr{M}$ — $\tau$-замкнутый гомоморф. Отсюда $G \notin \mathscr{X} \cup \mathscr{M}$. Так как $G/\operatorname{soc}(G) \notin \mathscr{M}$, имеем $G \notin \mathscr{M}$. Предположим, что $G \in \mathscr{X}$. Тогда $G = H/\pi$ для некоторой алгебры $H \in S_{\bar\tau}(A)$ и некоторой конгруэнции $\pi$ на $A$. Отсюда $|G| < |H| < |G/\operatorname{soc}(G)|$; противоречие. Значит, $G \notin X \cup \mathscr{M}$, и утверждение доказано. По теореме 4.3 из [14] существует алгебра $H$ в $\mathscr{F} = \tau\operatorname{form}(\{A\} \cup \mathscr{M}) = \tau\operatorname{form}(\mathscr{X} \cup \mathscr{M})$ с конгруэнциями $\pi, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t$ $(t \geqslant 2)$ такими, что имеют место следующие утверждения:

(1) $G \simeq H/\pi$ и $\psi_1 \cap \dots \cap \psi_t \subseteq \psi$, где $\psi/\pi = \operatorname{soc}(H/\pi)$;

(2) $H/\pi_i$ — $(X \cup \mathscr{M})$-алгебра с единственной минимальной конгруэнцией $\psi_i/\pi_i$.

Покажем, что $H/\psi_i \in \mathscr{M}$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Действительно, если $H/\pi_i \in \mathscr{M}$, то $H/\psi_i \in \mathscr{M}$, потому что

$$H/\psi_i \simeq (H/\pi_i)/(\psi_i/\pi_i) = (H/\pi_i)/\operatorname{soc}(H/\pi_i).$$

Пусть $H/\pi_i \in \mathscr{X}$. Тогда $|H/\pi_i| < |G|$ и по индукции имеем

$$(H/\pi_i)/\operatorname{soc}(H/\pi_i) \simeq H/\psi_i \in \Phi_\tau(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{M}.$$

Отсюда $H/\psi_1, \dots, H/\psi_t \in \mathscr{M}$ и, значит, $H/(\psi_1 \cap \dots \cap \psi_t) \in \mathscr{M}$. Согласно (1) получаем $G/\operatorname{soc}(G) \in \mathscr{M}$; противоречие. Значит, $G/\operatorname{soc}(G) \in \Phi_\tau(\mathscr{F})$.

**Следствие 3.6.** *Пусть $\mathscr{F}$ — $s$-замкнутая формация конечных алгебр и $G \in \mathscr{F}$. Тогда*

$$G/\operatorname{soc}(G) \in \Phi_S(\mathscr{F}).$$

Опираясь на следствие 3.6, можно получить следующий результат из [19].

**Следствие 3.7** [19]. *Пусть $G \in \mathscr{F}$, где $\mathscr{F}$ — $s$-замкнутая формация конечных $n$-групп. Тогда*

$$G/\operatorname{soc}(G) \in \Phi_S(\mathscr{F}).$$

Пусть $G$ — группа, и пусть $\mathscr{F}$ — гомоморф групп, т. е. $\mathscr{F}$ — класс групп, замкнутый относительно гомоморфизмов. Обозначим через $G^{\mathscr{F}}$ пересечение всех нормальных подгрупп $N$ в $G$ таких, что $G/N \in \mathscr{F}$. Следуя [20], подгруппу $N$ группы $G$ назовем *вербальной подгруппой*, если существует многообразие $\mathscr{M}$ групп такое, что $G^{\mathscr{M}} = N$. Применяя следствие 3.6, дадим другое доказательство результата Ковача и Неймана из [21].

**Следствие 3.8** [21]. *Пусть $G$ — конечная группа с единственной минимальной нормальной подгруппой $R$. Тогда $R$ — вербальная подгруппа в $G$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M} = \operatorname{var}(G/R)$ — многообразие, порожденное $G/R$. Тогда, очевидно, $G/R \in \mathscr{M}$ и тем самым $G^{\mathscr{M}} \subseteq R$. Допустим, что $G^{\mathscr{M}} = 1$. Поскольку $\mathscr{M} = \operatorname{var}(s\operatorname{form}(G/R))$, согласно [11, предложение 14.1; 8, лемма 9.3] имеем $G \in s\operatorname{form}(G/R)$. В силу следствия 3.6 $G/R \in \Phi_S(s\operatorname{form}G)$, значит,

$$s\operatorname{form}(G/R) \subsetneqq s\operatorname{form}G.$$

Следовательно, $G \notin \mathscr{M}$. Полученное противоречие показывает, что $R = G^{\mathscr{M}}$ — вербальная подгруппа в $G$.

**Следствие 3.9.** *Пусть $\mathscr{F}$ — формация алгебр и $G \in \mathscr{F}$. Тогда*

$$G/\operatorname{soc}(G) \in \Phi(\mathscr{F}).$$

Используя следствие 3.9, дадим новое доказательство следующих результатов из [17, 19, 22] соответственно.

**Следствие 3.10** [17]. *Пусть $\mathscr{F}$ — формация конечных групп и $G \in \mathscr{F}$. Тогда*

$$G/\operatorname{soc}(G) \in \Phi(\mathscr{F}).$$

**Следствие 3.11** [19]. *Пусть $\mathscr{F}$ — формация конечных $n$-групп и $G \in \mathscr{F}$. Тогда*

$$G/\operatorname{soc}(G) \in \Phi(\mathscr{F}).$$

**Следствие 3.12** [22]. *Пусть $\mathscr{F}$ — формация алгебр. Если каждая подформация в $\mathscr{F}$ дополняема в $\mathscr{F}$, то $\mathscr{F} = \operatorname{form}\mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — класс всех простых алгебр в $\mathscr{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M} = \operatorname{form}\mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — класс всех простых алгебр в $\mathscr{F}$. Допустим, что $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{F}$, и пусть $A$ — алгебра наименьшего порядка из $\mathscr{F}\backslash\mathscr{M}$. Тогда, очевидно, $\operatorname{soc}(A) \neq A \times A$. По следствию 3.9 имеем $A/\operatorname{soc}(A) \in \Phi(\mathscr{F})$. Отсюда $\Phi = \Phi(\mathscr{F}) \neq (1)_\circ$. Так как каждая подформация в $\mathscr{F}$ дополняема, найдется формация $\mathscr{F}_1$ такая, что $\mathscr{F} = \operatorname{form}(\Phi \cup \mathscr{F})$ и $\Phi \cap \mathscr{F}_1 = (1)_\circ$. Но $\mathscr{F} = \operatorname{form}(\Phi \cup \mathscr{F}_1) = \operatorname{form}\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_1$ согласно теореме 3.1, так что $\Phi \cap \mathscr{F} = \Phi = \Phi \cap \mathscr{F}_1 \neq (1)_\circ$; противоречие. Итак, $\mathscr{F} = \operatorname{form}\mathscr{X}$.

## 4. Классы Фраттини — Шунка универсальных алгебр

Теория классов Шунка универсальных алгебр впервые изучалась авторами в [10]. Это понятие, по-существу, пришло от классов Шунка групп. Известно, что класс групп $\mathscr{F}$ называют *классом Шунка*, если $\mathscr{F}$ — примитивно замкнутый гомоморф [9]. В частности, в [10] нами доказано, что решетка всех классов Шунка конечных универсальных алгебр алгебраична и дистрибутивна.

В этом разделе изучим теорию Фраттини классов Шунка универсальных алгебр.

Следуя идеям из [10], алгебру $A$ назовем *примитивной*, если $A$ обладает максимальной подалгеброй $M$ такой, что $M_A = \Delta$ (ср. с определением 15.1, данным в [3, с. 52]).

Пусть $\mathscr{F}$ — класс алгебр. Обозначим через $P\mathscr{F}$ класс всех алгебр $A$ таких, что их примитивные гомоморфные образы $A$ лежат в $\mathscr{F}$. Следуя [10], класс $\mathscr{F}$ алгебр назовем *классом Шунка*, если $\mathscr{F} = P\mathscr{F}$.

Пусть $\mathscr{X}$ — совокупность алгебр. Пересечение всех классов Шунка, содержащих $\mathscr{X}$, обозначим через $\operatorname{Schunck}\mathscr{X}$. Будем также писать $\operatorname{Schunck} G$ вместо $\operatorname{Schunck}\{G\}$, когда $\mathscr{X} = \{G\}$ — одноэлементное множество. Если для класса Шунка $\mathscr{F}$ имеем $\mathscr{F} = \operatorname{Schunck} G$ для некоторой алгебры $G$, то $\mathscr{F}$ назовем *однопорожденным классом Шунка.*

Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{F}$ — классы Шунка. Если $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$, то $\mathscr{M}$ назовем *подклассом Шунка* в $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{F}$ и нет другого класса Шунка $\mathscr{H}$ такого, что $\mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{H} \subsetneqq \mathscr{F}$, то $\mathscr{M}$ назовем *максимальным подклассом Шунка* в $\mathscr{F}$.

Приведем некоторые результаты теории Фраттини для классов Шунка универсальных алгебр. Поскольку их доказательства аналогичны доказательствам из разд. 3, мы опустим обоснования.

**Лемма 4.1.** *Пусть $\mathscr{H}$ — собственный подкласс Шунка однопорожденного класса Шунка $\mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{F}$ имеет максимальный подкласс Шунка $\mathscr{M}$ такой, что $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{M}$.*

**Лемма 4.2.** *Пусть $\mathscr{F} = \mathscr{M} \vee \mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ — однопорожденный класс Шунка и $\mathscr{M}$ — собственный подкласс Шунка в $\mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{F}$ имеет максимальный подкласс Шунка $\mathscr{F}_1$, содержащий $\mathscr{M}$.*

Алгебру $G$ в классе Шунка $\mathscr{F}$ назовем *непорождающей алгеброй в классе Шунка* $\mathscr{F}$, если из $\mathscr{F} = \operatorname{Schunck}(\mathscr{X} \cup \{G\})$ вытекает, что $\mathscr{F} = \operatorname{Schunck}\mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — подмножество в $\mathscr{F}$.

Пусть $\mathscr{F}$ — класс Шунка и $\Omega$ — множество всех максимальных подклассов Шунка в $\mathscr{F}$. Тогда будем писать

$$\Phi(\mathscr{F}) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\mathscr{M}\in\Omega} \mathscr{M}, & \text{если } \Omega \neq \varnothing, \\ \mathscr{F}, & \text{если } \Omega = \varnothing. \end{cases}$$

Опираясь на данные определения, можно установить следующие утверждения о подклассах Фраттини — Шунка $\Phi(\mathscr{F})$.

**Теорема 4.1.** *Пусть $\mathscr{F} \neq (1)_\circ$ — непустой класс Шунка. Тогда*
(1) *$\Phi(\mathscr{F})$ состоит из всех непорождающих алгебр в $\mathscr{F}$;*
(2) *если $\mathscr{M}$ — класс Шунка и $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$, то $\Phi(\mathscr{M}) \subseteq \Phi(\mathscr{F})$.*

Из теоремы 4.1 непосредственно вытекает такой результат Аль-Дабабсеха

**Следствие 4.1** [16]. *Пусть $\mathscr{F}$ — класс Шунка конечных $n$-групп. Тогда*
(1) *$\Phi(\mathscr{F})$ состоит из всех непорождающих $n$-групп в $\mathscr{F}$;*
(2) *если $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$, где $\mathscr{M}$ — класс Шунка $n$-групп, то $\Phi(\mathscr{M}) \subseteq \Phi(\mathscr{F})$.*

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Monk J. D., Sioson F. M.* On the general theory of $m$-groups // Fund. Math. 1971. V. 72. P. 233–244.
2. *Шеметков Л. А.* О произведениях формаций алгебраических систем // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 6. С. 712–729.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
5. *Barnes D. W.* Saturated formations of soluble Lie algebras in characteristic 0 // Arch. Math. 1978. V. 30, N 6. P. 477–480.
6. *Barnes D. W., Gastineau-Hills H.* On the theory of soluble Lie algebras // Math. Z. 1969. Bd 106, N 4. S. 343–354.
7. *Guo Wenbin, Shum K. P.* On totally local formations of groups // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 5. P. 2117–2131.

**8.** *Shemetkov L. A., Skiba A. N.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
**9.** *Schunck H.* $\mathscr{H}$-untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1967. Bd 97. S. 326–330.
**10.** *Guo Wenbin, Shum K. P.* On the lattice of Schunck classes of finite universal algebras. Гомель: Гомельск. ун-т, 2000. (Препринт).
**11.** *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1966.
**12.** *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларусская наука, 1997.
**13.** *Cohn P. M.* Universal Algebra. New York; Evanston; London: Harper and Row Publ., 1965.
**14.** *Guo Wenbin, Shum K. P.* Formation operators on classes of algebras // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 7. P. 3457–3472.
**15.** *Grätzer G.* General Lattice Theory. Basel: Birkhaüser, 1978.
**16.** *Al-Dababseh A. F.* Модулярные решетки классов конечных $n$-арных групп: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Гомель: Гомельский гос. ун-т, 1999.
**17.** *Herzfeld U. C.* Frattini classes of formations of finite groups // Bull. Univ. Mat. Ital. B(7). 1988. P. 601–611.
**18.** *Скиба А. Н.* О подформациях формаций конечных групп // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 6. С. 492–495.
**19.** *Al-Dababseh A.F.* О $\tau$-замкнутых формациях $n$-арных групп // Вестн. Витебск. ун-та. 1999. V. 12. P. 65–70.
**20.** *Neumann H.* Varieties of Groups. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
**21.** *Kovacs L. G., Newman M. F.* Minimal verbal subgroups // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1966. V. 64. P. 347–550.
**22.** *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Формации алгебр с дополняемыми подформациями // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 7, 8. С. 1000–1012.

*Статья поступила 16 октября 2001 г.*

*Го Вэньбинь (Guo Wenbin)*
*Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,*
*Xuzhou, 221009, P. R. China*
`yzgwb@pub.yz.jsinfo.net`

*Шум Кар-Пин (Shum Kar-Ping)*
*Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong*
*Shatin, Hong Kong, P. R. China (SAR)*
`kpshum@math.cuhk.edu.hk`