Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.53

B–УСТОЙЧИВОСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА АДАМАРОВСКОЙ КОМПОЗИЦИИ ДВУХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

А. М. Гайсин, Т. И. Белоус

Аннотация: Найден критерий того, чтобы логарифм максимального члена ряда Дирихле, область абсолютной сходимости которого есть полуплоскость, на асимптотическом множестве был эквивалентен логарифму максимального члена его адамаровской композиции с любым другим рядом Дирихле из некоторого класса.

Ключевые слова: ряды Дирихле, максимальный член, адамаровская композиция

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} = a < \infty. \tag{1}$$

Через $D_c(\Lambda)$ обозначим класс всех функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_c = \{s : \operatorname{Re} s < c\}$ $(-\infty < c \le \infty)$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{2}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Из условия (1) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0,$$

так что ряд (2) сходится в полуплоскости Π_c абсолютно, а его сумма F — аналитическая в Π_c функция [1].

Наряду с рядом (2) введем в рассмотрение ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{3}$$

где $B = \{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел b_n $(b_n \ne 0$ при $n \ge N)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln |b_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{4}$$

Тогда ряд (3) также абсолютно сходится в полуплоскости Π_c, а F^* — аналитическая в этой полуплоскости функция. Условие (4) позволяет рассматривать и ряды Дирихле $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n b_n^{-1} e^{\lambda_n s}$, абсолютно сходящиеся в полуплоскости Π_c.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00655).

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (2) и (3) соответственно. Через L обозначим класс всех непрерывных, неограниченно возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Пусть

$$W = \left\{ w \in L : \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2}\, dx < \infty \right\},$$

$$\underline{W}_{\,\varphi} = \{w \in W : \varliminf_{t\to\infty} \varphi(t)J(t;w) = 0\}, \quad W_\varphi = \{w \in W : \lim_{t\to\infty} \varphi(t)J(t;w) = 0\},$$

где $\varphi \in L$, а

$$J(t;w) = \int_t^\infty \frac{w(x)}{x^2}\, dx.$$

Пусть M — класс функций Φ из L таких, что $x\Phi(x) < \Phi(kx)$ при $x \geq x_0$, где k — некоторая постоянная. Приведем примеры функций из M: e^x, e^{x^2}, e^{e^x}, $x^{\ln(x+1)}$ и т. д. Все эти функции растут быстрее любой степени x^n. Действительно, если $\Phi \in M$, то при $x \geq x_0 k^n$

$$\Phi(x) > \frac{x}{k}\Phi\left(\frac{x}{k}\right) > \frac{x^2}{k^3}\Phi\left(\frac{x}{k^2}\right) > \dots > \frac{x^n}{k^{n(n+1)/2}}\Phi\left(\frac{x}{k^n}\right) > \frac{\Phi(x_0)}{k^{n(n+1)/2}}x^n.$$

Каждой функции Φ из M поставим в соответствие ее обратную функцию φ. Тогда получим новый класс функций, который обозначим через M^{-1}. Таким образом, классы $M = \{\Phi\}$ и $M^{-1} = \{\varphi\}$ состоят из взаимно обратных функций. Легко показать, что если $\varphi \in M^{-1}$, то функция $\omega(x) = \sqrt{x}$ принадлежит классу $\underline{W}_{\,\varphi}$.

В работе [2] доказана следующая

Теорема 1. *Для того чтобы для любой функции $F \in D_\infty(\Lambda)$ при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E = \bigcup_{n=1}^\infty [a_n, a'_n]$ $(0 < a_1 < a'_1 \leq a_2 < a'_2 \leq \dots \leq a_n < a'_n \leq \dots)$ конечной лебеговой меры имело место асимптотическое равенство*

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma), \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $w \in W$ такая, что

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N). \tag{6}$$

Хотя теорема 1 носит и самостоятельный интерес, в работе [2] она, по существу, использована для получения точных оценок как снизу, так и сверху для произвольных функций $F \in D_\infty(\Lambda)$ на кривых, определенным образом уходящих в бесконечность.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство кривых γ, уходящих в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \to \infty$, то $\operatorname{Re} s \to +\infty$.

В [2] показано, что если $F \in D_\infty(\Lambda)$, причем соответствующий ряд Дирихле имеет лакуны Фейера, то имеет место оценка

$$q(F) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma),$$

где $q(F)$ — неотрицательная величина, зависящая только от $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$, а

$$d(F;\gamma) = \varlimsup_{s\in\gamma, s\to\infty} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M(\operatorname{Re} s)}, \quad M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$0 \leq \inf_\gamma d(F;\gamma) \leq 1. \tag{A}$$

В [2] показано, что оценки (A) неулучшаемы в том смысле, что обе границы в (A) достигаются. Если точность правой границы была известна ранее, то вопрос о точности левой границы был связан с проблемой, восходящей к известной работе Пойа 1929 г., и оставался до недавнего времени открытым [2]. В работе [2] дан полный ответ на этот вопрос.

Смысл оценок (A) в том, что они устанавливают связь между ростом и убыванием целой функции $F \in D_\infty(\Lambda)$ на каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Действительно, из оценки $0 \le d(F;\gamma)$ следует, что существуют функция $\varepsilon(r)$, $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$, и последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такие, что при $\xi_n \to \infty$

$$\ln|F(\xi_n)| > -\varepsilon(|\xi_n|)\ln M(\operatorname{Re}\xi_n). \tag{B}$$

Отметим, что оценка (B) лучше аналогичной оценки Берлинга, установленной им для произвольной целой функции на фиксированном луче [2]. Оценка (B) означает, что сумма ряда Дирихле с лакунами Фейера не может сколь угодно быстро убывать на любой последовательности точек $\{\xi_n\}$, стремящейся к бесконечности вдоль кривой γ.

Наша цель — перенести основные результаты статьи [2] для функций F из класса $D_o(\Lambda)$, а именно для таких функций получить оценки типа (A) на семействе кривых γ, примыкающих к мнимой оси.

Пусть

$$\underline{D}_{\,o}(\Phi) = \left\{F \in D_o(\Lambda) : \sup_{\tau>0} \varliminf_{\sigma\to\ 0-} \frac{\ln\mu_F(\sigma)}{|\sigma|\Phi(\frac{\tau}{|\sigma|})} > 0\right\},$$

где $\mu_F(\sigma)$ — максимальный член ряда (2). В дальнейшем, как и выше, максимальный член ряда (2) будем обозначать через $\mu(\sigma)$.

Пусть $e \subset [-1,0)$ — измеримое по мере Лебега m множество. *Верхней* De и *нижней* de *плотностями множества* e называются величины [3]

$$De = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{m(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|}, \quad de = \varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{m(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|}.$$

Будем говорить, что максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (2) $B(d)$- ($B(D)$-) *устойчив*, если при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1,0)$ нулевой нижней плотности de (нулевой верхней плотности De) имеет место асимптотическое равенство (5).

Если F — функция, заданная в полуплоскости Π_o рядом (2), а

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n s}, \tag{7}$$

то ряд (3) есть адамаровская композиция рядов (2) и (7), т. е.

$$(F * G)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s} = F^*(s).$$

Ясно, что если $F \in D_o(\Lambda)$, то $F^* \in D_o(\Lambda)$ (это следует из условия (4)).

Пусть $\varphi \in M^{-1}$ и

$$\rho_\varphi(G) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)\ln|b_n|}{\lambda_n} > 0.$$

Тогда для некоторой последовательности $\{n_k\}$ $(0 < n_k \uparrow \infty)$ имеем

$$\ln|b_n| \ge p\frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)} \quad (p > 0), \quad n = n_k \quad (k \ge 1). \tag{8}$$

Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \tag{9}$$

где

$$a_n = \begin{cases} \exp(\frac{p}{2}\frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)}), & \text{если } n = n_k \quad (k \ge 1); \\ 0, & \text{если } n \ne n_k \quad (k \ge 1). \end{cases}$$

Ясно, что $F \in D_o(\Lambda)$. Запишем ряд (9) в виде

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\mu_k s}, \quad c_k = a_{n_k}, \quad \mu_k = \lambda_{n_k},$$

и положим

$$R_k = \frac{p}{2}\frac{\frac{\mu_k}{\varphi(\mu_k)} - \frac{\mu_{k+1}}{\varphi(\mu_{k+1})}}{\mu_{k+1} - \mu_k} \quad (k \ge 1).$$

Выбирая (если это необходимо) последовательность $\{n_k\}$ достаточно редкой, можно считать, что $R_k \uparrow 0$ при $k \to \infty$. Но тогда для $R_{k-1} \le \sigma < R_k$ имеем [1, гл. 2, § 6]

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{p}{2}\frac{\mu_k}{\varphi(\mu_k)} + \mu_k \sigma < \frac{p}{2}\frac{\mu_k}{\varphi(\mu_k)} \quad (k \ge 1). \tag{10}$$

С другой стороны, для тех же σ, учитывая (8), (10), получаем, что

$$\ln \mu^*(\sigma) \ge \ln \mu(\sigma) + \ln |b_{n_k}| \ge p\frac{\mu_k}{\varphi(\mu_k)} \quad (k \ge 1).$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma)} \le \frac{1}{2}.$$

А это означает, что при $\rho_\varphi(G) \ne 0$ максимальный член ряда (9) не является $B(d)$-устойчивым.

Пусть теперь $\rho_\varphi(G^{-1}) > 0$, где

$$G^{-1}(s) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n^{-1} e^{\lambda_n s}.$$

Если в качестве ряда (9) возьмем ряд

$$F_1(s) = (F * G^{-1})(s) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n^{-1} e^{\lambda_n s}, \tag{11}$$

то $F_1^*(s) = (F_1 * G)(s) = F(s)$, где F — функция, заданная рядом (9), коэффициенты которого строятся по тому же принципу, что и прежде, но зависят теперь от последовательности $\left\{b_n^{-1}\right\}$. В этом случае получим, что

$$\varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu_1^*(\sigma)}{\ln \mu_1(\sigma)} \le \frac{1}{2}.$$

Здесь $\mu_1(\sigma)$ — максимальный член ряда (11), а $\mu_1^*(\sigma)$ — максимальный член измененного ряда. Таким образом, если $\rho_\varphi(G^{-1}) \ne 0$, то $\mu_1(\sigma)$ не является $B(d)$-устойчивым.

Имея это в виду, в дальнейшем такие ситуации мы вообще будем исключать из рассмотрения.

Будем говорить, что последовательность $\{b_n\}$ ($b_n \ne 0$ при $n \ge N$) W_φ-*нормальна*, если найдется функция $\theta \in W_\varphi$ такая, что

$$-\ln |b_n| \le \theta(\lambda_n) \quad (n \ge N).$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть Φ — некоторая фиксированная функция из класса M, а φ — обратная к Φ функция. Пусть $B = \{b_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию (6) и такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)\ln|b_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{12}$$

Для того чтобы для любой функции $F \in \underline{D}_o(\Phi)$ максимальный член представляющего ее ряда (2) был $B(d)$-устойчив, достаточно, а для W_φ-нормальной последовательности $\{b_n\}$ и необходимо, чтобы для некоторой функции $w \in \underline{W}_\varphi$ выполнялись оценки (6).

Доказательство теоремы основано на лемме типа Бореля — Неванлинны.

Лемма. *Пусть $u(t)$ — непрерывная неубывающая на $[-1, 0)$ функция, $u(t) \to \infty$ при $t \to 0-$. Пусть $w \in W$, а $v = v(t)$ — решение уравнения*

$$w(v) = e^{u(t)}. \tag{13}$$

Если

$$\frac{w(v(t))}{|t|v(t)} = o(1), \quad t \to 0-,$$

а для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$ $(\tau_j \uparrow 0)$

$$\lim_{\tau_j\to 0-} \frac{1}{|\tau_j|} J(v_j; w) = 0, \quad v_j = v(\tau_j), \tag{14}$$

то при $t \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$, $m(e \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, имеет место асимптотическое равенство

$$u\left(t + \frac{w(v(t))}{v(t)}\right) = u(t) + o(1).$$

Доказательство. Пусть $w \in W$, $w(v(t)) = o(|t|v(t))$, $t \to 0-$, и выполняется условие (14). Тогда найдется функция $w^* \in W$, $w^*(v(t)) = o(|t|v(t))$, $t \to 0-$, $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, $0 < \beta(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$, для которой также выполняется условие (14), причем с той же последовательностью $\{\tau_j\}$. Покажем, что вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$, $m(e \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, верно неравенство

$$u(t + \delta(t)) < u(t) + \beta^{-1}(v(t)), \tag{15}$$

где $\delta(t) = \frac{w(v(t))}{v(t)}$.

Пусть e — замкнутое множество, содержащееся в $[-1, 0)$, на котором

$$u(t + \delta(t)) \geq u(t) + \beta^{-1}(v(t)). \tag{16}$$

Пусть $e(t) = e \cap [t, 0)$. Если $e(t) = \varnothing$ при некотором $t \in [-1, 0)$, то все доказано. В противном случае положим

$$t_1 = \inf\{t : t \in e\}, \quad t_1' = \inf\{t : u(t) = u(t_1) + \beta^{-1}(v(t_1))\}.$$

Тогда $0 < t_1' - t_1 \leq \delta(t_1)$.

Пусть $t_2 = \inf\{t : t \in e(t_1')\}$, $t_2' = \inf\{t : u(t) = u(t_2) + \beta^{-1}(v(t_2))\}$. Тогда с учетом (16) получим, что

$$0 < t_2' - t_2 \leq \delta(t_2), \quad u(t_2) - u(t_1) \geq \beta^{-1}(v(t_1)).$$

Рассуждая по индукции, находим последовательности $\{t_n\}$, $\{t_n'\}$ такие, что

$$0 < t_{n+1}' - t_{n+1} \leq \delta(t_{n+1}), \quad u(t_{n+1}) - u(t_n) \geq \beta^{-1}(v(t_n)), \tag{17}$$

причем $e \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [t_n, t_n']$.

Пусть $t \in (t_n, t_{n+1}]$. Тогда с учетом (17) имеем

$$m(e \cap [t, 0)) \le \begin{cases} t_n' - t + \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \delta_i, & \text{если } t \in (t_n, t_n'], \\ \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \delta_i, & \text{если } t \in (t_n', t_{n+1}], \end{cases} \tag{18}$$

где $\delta_i = w(v_i)/v_i$, $v_i = v(t_i)$ $(i \ge 1)$.

Если $2v_i \le v_{i+1}$, то

$$\delta_i \le 2 \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w^*(x)}{x^2}\, dx \le 2\left[\frac{w^*(v_{i+1})}{v_{i+1}} - \frac{w^*(v_i)}{v_i}\right] + 4 \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w^*(x)}{x^2}\, dx.$$

В противном случае, учитывая (13), (17), получаем, что

$$\delta_i \le \frac{w^*(v_i)}{v_i}[u(t_{i+1}) - u(t_i)] \le \frac{w^*(v_i)}{v_i}[\ln w^*(v_{i+1}) - \ln w^*(v_i)]$$

$$\le 2 \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w^*(x)}{x} d \ln w^*(x) = 2\left[\frac{w^*(v_{i+1})}{v_{i+1}} - \frac{w^*(v_i)}{v_i} + \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w^*(x)}{x^2}\, dx\right].$$

Значит, всегда имеет место оценка

$$\delta_i \le 2\left[\frac{w^*(v_{i+1})}{v_{i+1}} - \frac{w^*(v_i)}{v_i}\right] + 4 \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{w^*(x)}{x^2}\, dx \quad (i \ge 1). \tag{19}$$

Оценим теперь величину $m(e \cap [\tau_j, 0))$. Если $t_n < \tau_j \le t_{n+1}$, то из (18), (19) вытекает, что

$$\frac{1}{|\tau_j|} m(e \cap [\tau_j, 0)) \le \frac{t_n' - \tau_j}{|\tau_j|} + \frac{4}{|\tau_j|} J(v_j; w^*), \quad \text{если } \tau_j \in (t_n, t_n'];$$

$$\frac{1}{|\tau_j|} m(e \cap [\tau_j, 0)) \le \frac{4}{|\tau_j|} J(v_j; w^*), \quad \text{если } \tau_j \in (t_n', t_{n+1}].$$

Напомним, что здесь $v_j = v(\tau_j)$ ($v = v(t)$ — решение уравнения (13)). Поскольку

$$0 < t_n' - t_n < \frac{w(v(t_n))}{v(t_n)},$$

при $t_n \to 0-$ имеем

$$0 < 1 - \left|\frac{t_n'}{t_n}\right| < \frac{w(v(t_n))}{|t_n| v(t_n)} \to 0.$$

Следовательно, $t_n' = (1 + o(1))t_n$ при $t_n \to 0-$. Значит, $t_n' - \tau_j = o(|\tau_j|)$ при $\tau_j \to 0-$. Но так как функция w^* удовлетворяет условию (14), окончательно получаем, что

$$m(e \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|), \quad \tau_j \to 0-.$$

Таким образом, вне множества $e \subset [-1, 0)$, $de = 0$, имеет место оценка (15). Лемма полностью доказана.

Аналогичная лемма при более сильных ограничениях доказана в [3].

Пусть область сходимости степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{20}$$

— единичный круг $\{z : |z| < 1\}$. Сделаем замену $z = e^s$ и рассмотрим функцию $F(s) = f(e^s)$. Ясно, что $F \in D_o(\Lambda)$, где $\Lambda = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. При $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ имеем

$$|z| = r \to 1-, \quad |\sigma| = |\ln r| = 1 - r + o(1 - r).$$

Следовательно, если $F \in \underline{D}_o(\Phi)$, то $f \in \underline{K}(\Phi)$, где

$$\underline{K}(\Phi) = \left\{ f : \sup_{\tau>0} \varliminf_{r\to 1-} \frac{\ln \mu_f(r)}{(1-r)\Phi(\frac{\tau}{1-r})} > 0 \right\},$$

а $\mu_f(r)$ — максимальный член ряда (20). Далее, если e_1 — образ множества $e \subset [-1, 0)$ при отображении $r = e^\sigma$, то $de = 0$ означает, что $d_1 e_1 = 0$, где

$$d_1 e_1 = \varliminf_{r\to 1-} \frac{m(e_1 \cap [r, 1))}{1-r}.$$

Из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть $\Phi \in M$, φ — обратная к Φ функция, а B — последовательность, удовлетворяющая условиям* (6) *и* (12).

Для того чтобы для любой функции $f \in \underline{K}(\Phi)$ при $r \to 1-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [0, 1)$ нулевой нижней плотности $d_1 e_1$ было справедливо асимптотическое равенство

$$\ln \mu_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f^*(r),$$

достаточно, а для W_φ — нормальной последовательности $\{b_n\}$ и необходимо, чтобы последовательность B удовлетворяла оценкам (6) *с некоторой мажорантой $w \in \underline{W}_\varphi$. Здесь $\mu_f^*(r)$ — максимальный член измененного степенного ряда*

$$f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся некоторые свойства максимального члена ряда Дирихле. Хорошо известно геометрическое описание максимального члена степенного ряда или ряда Дирихле, задающего целую функцию, через выпуклый полигон Ньютона (см., например, [1]). Аналогичное описание максимального члена степенного ряда, сходящегося лишь в единичном круге, дается также в ряде работ (см., например, [4]).

Построим выпуклый полигон Ньютона для ряда Дирихле (2), абсолютно сходящегося лишь в полуплоскости Π_0. Для этого, предполагая, что $\sup_n |a_n| = \infty$ (можно также считать, что $a_1 \neq 0$), отметим на плоскости XoY точки $P_n = (\lambda_n, g_n)$, где $g_n = -\ln|a_n|$ (если $a_n = 0$, то полагаем $g_n = \infty$). Поскольку $F \in D_0(\Lambda)$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{21}$$

Учитывая это, через $Q(F)$ обозначим выпуклую оболочку точек P_n $(n \geq 1)$. Пусть $\gamma(x) = \inf\{y : (x, y) \in Q(F)\}$. Линия, описываемая уравнением $y = \gamma(x)$ $(x \geq \lambda_1)$, называется *диаграммой* или *выпуклым полигоном Ньютона* [4]. Из (21) следует, что диаграмма Ньютона, обозначим ее через $L(F)$, является выпуклой вниз ломаной линией.

Пусть $F \in D_0(\Lambda)$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad \sup_n |a_n| = \infty.$$

Положим

$$\widehat{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{\lambda_n s}, \quad T_n = e^{-\gamma(\lambda_n)} \quad (n \geq 1). \tag{22}$$

Функция $\widehat{F}$ называется *мажорантой Ньютона функции* $F \in D_0(\Lambda)$.

Пусть $\gamma(\lambda_n) = G_n$ $(n \geq 1)$. Тогда $(\lambda_n, G_n) \in L(F)$. Для бесконечного множества значений λ_n, в частности, для абсцисс λ_{n_i} $(i \geq 1, n_1 = 1)$ всех вершин полигона $L(F)$ имеем $G_n = -\ln|a_n|$. Отметим, что точка $P_n = (\lambda_n, -\ln|a_n|)$ лежит либо на полигоне $L(F)$ (точка P_{n_i} обязательно лежит на полигоне), либо над ним. Угловой коэффициент отрезка, соединяющего вершины P_{n_i} и $P_{n_{i+1}}$ полигона $L(F)$, равен

$$R_i = \frac{G_{n_{i+1}} - G_{n_i}}{\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i}} \quad (i \geq 1,\ \lambda_1 = 1).$$

Ясно, что $R_i \uparrow 0$ при $i \to \infty$. Следовательно, при $R_{i-1} \leq \sigma < R_i$ центральный индекс $\nu(\sigma)$ равен $n_i = \text{const}$, а $\ln\mu(\sigma) = \ln|a_{n_i}| + \lambda_{n_i}\sigma$ [1]. Отсюда, в частности, следует, что $\mu(\sigma) = \hat{\mu}(\sigma)$, $\nu(\sigma) = \hat{\nu}(\sigma)$, где $\hat{\mu}(\sigma)$ и $\hat{\nu}(\sigma)$ — максимальный член и центральный индекс ряда (22). Известно также, что функция $\ln\mu(\sigma)$ непрерывна, а при $\sup\limits_n |a_n| = \infty$ неограниченно возрастает на интервале $[-1, 0)$ [1].

Приступим теперь к доказательству теоремы 2.

Достаточность. Пусть выполняется условие (12) и

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N), \tag{23}$$

где $w = w(x)$ — некоторая функция из $\underline{W}_\varphi$. Можно считать, что $w(x)\varphi(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ (это следует из (12)). Тогда существует функция $w^* \in \underline{W}_\varphi$ такая, что $\sqrt{x} \leq w^*(x)$, $\frac{w^*(x)\varphi(x)}{x} = o(1)$, $w(x) = o(w^*(x))$ при $x \to \infty$ [3]. Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 2\ln\mu(\sigma). \tag{24}$$

Ясно, что $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Поскольку $w^* \in \underline{W}_\varphi$, то найдется последовательность $\{\tau_j\}$ $(\tau_j \uparrow 0)$ такая, что

$$\lim_{v_j \to \infty} \varphi(v_j) J(v_j; w^*) = 0, \tag{25}$$

где $v_j = v(\tau_j) \to \infty$ при $\tau_j \to 0-$,

$$J(v_j; w^*) = \int\limits_{v_j}^{\infty} \frac{w^*(x)}{x^2}\, dx.$$

Далее, уравнение (24) можно записать в виде

$$w^*(v) = e^{u(\sigma)}, \quad u(\sigma) = \ln 2 + \ln\ln\mu(\sigma). \tag{26}$$

Поскольку $F \in \underline{D}_o(\Phi)$, то, кроме того, для некоторого $\tau > 0$

$$\varliminf_{\sigma \to\ 0-} \frac{e^{u(\sigma)}}{|\sigma|\Phi(\frac{\tau}{|\sigma|})} > 0.$$

Следовательно, учитывая (26) и то, что $\Phi \in M$, отсюда имеем

$$w^*(v(\sigma)) > \varepsilon_o|\sigma|\Phi\left(\frac{\tau}{|\sigma|}\right) > \varepsilon_o\Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{|\sigma|}\right),$$

где $\varepsilon_o > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\sigma' < \sigma < 0$. Поскольку $w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, из этих оценок вытекает, что

$$\frac{1}{|\sigma|} < \varepsilon_1^{-1}\varphi\big(\varepsilon_o^{-1}w^*(v)\big) < \varepsilon_1^{-1}\varphi(v), \tag{27}$$

где $v = v(\sigma)$, $\sigma' < \sigma'' < \sigma < 0$. Последняя оценка верна, в частности, для $\sigma = \tau_j$ $(j \geq j')$. Так что, как видно из (25)–(27), для функции w^* условия (13), (14)

леммы выполнены. Кроме того, из (27) следует, что
$$0<\frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma|v(\sigma)}<\varepsilon_1^{-1}\frac{\varphi(v(\sigma))w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}\to 0$$
при $\sigma\to 0-$. Поэтому, применяя лемму, при $\sigma\to 0-$ вне некоторого множества $e_1\subset[-1,0)$, $m(e_1\cap[\tau_j,0))=o(|\tau_j|)$ $(\tau_j\to 0-)$, получаем, что
$$\mu(\sigma+h)<\mu(\sigma)^{(1+o(1))},\quad h=\frac{w^*(v)}{v},\quad v=v(\sigma). \tag{28}$$

Пусть
$$R_v=\sum_{\lambda_n>v}|a_n|e^{\lambda_n\sigma},$$
а $m\ge 1$ такое, что
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^m}=C_m<\infty.$$
При условии (1) такое m существует. Далее, при $\sigma\in[\sigma_o,0)\backslash e_1$ имеем
$$R_v\le\mu(\sigma+h)\sum_{\lambda_n>v}e^{-h\lambda_n}\le C_m\mu(\sigma+h)\exp[\max_{t\ge v}\psi(t)],$$
где $\psi(t)=m\ln t-ht$. Поскольку $\psi'(t)=0$ в точке $t=t_э$,
$$t_э=\frac{m}{h}=m\frac{v}{w^*(v)}\le m\sqrt{v}<v=v(\sigma),$$
с учетом (24), (28) при $\sigma\to 0-$ вне e_1 получаем, что
$$R_v\le C_m\mu(\sigma)^{(1+o(1))}\exp[-w^*(v)(1+o(1))]=\mu(\sigma)^{-1(1+o(1))}. \tag{29}$$
Значит, при $\sigma\in[\sigma_1,0)\backslash e_1$ получаем, что $\lambda_{\vartheta(\sigma)}\le v(\sigma)$, где $\vartheta=\vartheta(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2). Тогда при $\sigma\to 0-$ вне e_1 с учетом (23), (24) имеем
$$\mu(\sigma)=|a_\vartheta|e^{\lambda_\vartheta\sigma}=|a_\vartheta b_\vartheta|e^{\lambda_\vartheta\sigma}|b_\vartheta|^{-1}\le\mu^*(\sigma)e^{w(v)}=\mu^*(\sigma)\mu(\sigma)^{o(1)}.$$
Следовательно, при $\sigma\to 0-$ вне $e_1\subset[-1,0)$ верна оценка
$$(1+o(1))\ln\mu(\sigma)\le\ln\mu^*(\sigma). \tag{30}$$

С другой стороны, так как $|b_n|\le e^{w(\lambda_n)}$ $(n\ge 1)$, то
$$\mu^*(\sigma)=|a_kb_k|e^{\lambda_k\sigma}\le\mu(\sigma)e^{w(\lambda_k)}, \tag{31}$$
где $k=k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (3).

Пусть $x=x(\sigma)$ — решение уравнения
$$w^*(x)=3\ln\mu^*(\sigma), \tag{32}$$
а $R_x^*=\sum\limits_{\lambda_n>x}|a_n||b_n|e^{\lambda_n\sigma}$. Получим для R_x^* оценку типа (29).

Пусть $\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная выше. Из (30) при $\sigma\in[\sigma_2,0)\backslash e_1$ имеем
$$\ln\mu(\sigma)<\frac{3}{2}\ln\mu^*(\sigma). \tag{33}$$
Если для некоторой подпоследовательности $\{\tau_{j_n}\}$ последовательности $\{\tau_j\}$ выполнены оценки $\ln\mu(\tau_{j_n})<\frac{3}{2}\ln\mu^*(\tau_{j_n})$, то, учитывая (24), (32), получаем, что
$$2\ln\mu(\tau_{j_n})=w^*(v(\tau_{j_n}))<3\ln\mu^*(\tau_{j_n})=w^*(x(\tau_{j_n}))\quad(n\ge 1).$$
Следовательно, $v(\tau_{j_n})<x(\tau_{j_n})$ $(n\ge 1)$. Далее, поскольку $F\in\underline{D}_o(\Phi)$, то при некоторых $\tau>0$, $p>0$
$$\frac{\ln\mu(\sigma)}{|\sigma|\Phi(\frac{\tau}{|\sigma|})}\ge p>0,\quad\sigma=\tau_{j_n}\quad(n\ge 1).$$

Пользуясь тем, что $\Phi \in M$, при некотором q $(0 < q < 1)$ отсюда получаем, что

$$\ln \mu(\sigma) \geq p \frac{\Phi(\tau|\sigma|^{-1})}{|\sigma|^{-1}} > p\Phi(q|\sigma|^{-1}), \quad \sigma = \tau_{j_n} \ (n \geq n_0). \tag{34}$$

Отсюда с учетом (24) вытекает оценка

$$\frac{1}{|\tau_{j_n}|} < A\varphi(v(\tau_{j_n})) \quad (n \geq n_1). \tag{35}$$

Но $v(\tau_{j_n}) < x(\tau_{j_n})$ $(n \geq 1)$. Следовательно, из (25), (35) имеем

$$\frac{1}{|\tau_{j_n}|} J(x(\tau_{j_n}); w^*) < A\varphi(v_{j_n}) J(v_{j_n}; w^*) = o(1)$$

при $\tau_{j_n} \to 0-$. Учитывая это, применим лемму к функции $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu^*(\sigma)$. Тогда при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_2 \subset [-1, 0)$,

$$m(e_2 \cap [\tau_{j_n}, 0)) = o(|\tau_{j_n}|), \quad \tau_{j_n} \to 0-,$$

получаем оценку

$$\mu^*(\sigma + h^*) < \mu^*(\sigma)^{1+o(1)}, \quad h^* = \frac{w^*(x)}{x}, \quad x = x(\sigma). \tag{36}$$

Отсюда тем же способом, каким была установлена оценка (29), получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне e_2

$$R_x^* < \mu^*(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \tag{37}$$

Пусть теперь $(3/2)\ln \mu^*(\tau_j) \leq \ln \mu(\tau_j)$ для любого τ_j $(j \geq j_1)$. Рассмотрим множество $A_j = \{x : x \geq \tau_j, \ \ln \mu(\tau_j) < (3/2)\ln \mu^*(x)\}$ $(j \geq j_1)$. Поскольку $\tau_j \notin A_j$ для $j \geq j_1$, из непрерывности функции $\mu^*(\sigma)$ следует, что $\ln \mu(\tau_j) = \frac{3}{2}\ln \mu^*(x_j)$, где $x_j = \inf\{x : x \in A_j\}$. Следовательно, из (24), (32) получаем, что $w^*(v(\tau_j)) = w^*(x(x_j))$, т. е. $v(\tau_j) = x(x_j)$ $(j \geq j_1)$. Из (33) следует, что $(\tau_j, x_j) \subset e_1$. Так как $m(e_1 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$ при $\tau_j \to 0-$, то при этом $x_j - \tau_j = o(|\tau_j|)$, т. е. $x_j = (1 + o(1))\tau_j$. Значит, учитывая (25) и оценку типа (35), имеем

$$\frac{1}{|x_j|} J(x(x_j); w^*) = \frac{1}{(1 + o(1))|\tau_j|} J(v_j; w^*) \to 0$$

при $j \to \infty$ $(v_j = v(\tau_j))$. Видим, что функции w^* и $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu^*(\sigma)$ удовлетворяют всем условиям леммы. Значит, согласно лемме оценка (36), а следовательно, и (37), справедлива при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_3 \subset [-1, 0)$, $m(e_3 \cap [x_j, 0)) = o(|x_j|)$, $x_j \to 0-$. Тем более $m(e_3 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, $\tau_j \to 0-$. Таким образом, при $\sigma \to 0-$ вне множества $e_4 = e_2 \cup e_3$, $m(e_4 \cap [\tau_{j_n}, 0)) = o(|\tau_{j_n}|)$ $(\tau_{j_n} \to 0-)$, имеет место оценка (37). Но это означает, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq x(\sigma)$, если $\sigma \in [\sigma_3, 0) \setminus e_4$. Тем самым из (31) получаем, что для таких σ

$$\mu^*(\sigma) \leq \mu(\sigma) e^{w(x(\sigma))} = \mu(\sigma)\mu^*(\sigma)^{o(1)},$$

т. е.

$$(1 + o(1))\ln \mu^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma). \tag{38}$$

Из оценок (30), (38) окончательно получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне множества $e = e_1 \cup e_4$, $m(e \cap [\tau_{j_n}, 0)) = o(|\tau_{j_n}|)$ $(\tau_{j_n} \to 0-)$, выполняется требуемое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1))\ln \mu^*(\sigma).$$

Поскольку $de = 0$, достаточность установлена.

Необходимость. Мы должны показать, что если последовательность $\{b_n\}$ W_φ-нормальна, а для любой функции $F \in \underline{D}_o(\Phi)$ максимальный член представляющего ее ряда (2) $B(d)$-устойчив, то существует функция $w \in \underline{W}_\varphi$ такая, что

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leq e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N).$$

Пусть это не так. Тогда для последовательности $\{\ln|b_n|\}_{n=N}^{\infty}$ не существует мажоранты $w(\lambda_n)$, $w \in \underline{W}_{\varphi}$. Это означает, что

$$\varliminf_{t\to\infty} \varphi(t) \int\limits_t^{\infty} \frac{\alpha(x)}{x^2} dx > 0, \tag{39}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{\ln|b_n|\}_{n=N}^{\infty}$, т. е. $\alpha(t) = \max\limits_{\lambda_n \le t}\{\ln|b_n| : n \ge N\}$. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha(t) > 0$ при $t \ge \lambda_N$. Заметим, что $\alpha(t)$ — непрерывная справа ступенчатая функция. Пусть $T = \{t_n\}$ — последовательность всех точек разрыва функции $\alpha(t)$. Ясно, что $T \subset \Lambda$. Пусть $q \quad (0 < q < 1)$ — произвольное, но фиксированное число, $\beta(t) = q\alpha(t)$, $I_n = J(t_n;\beta)$, $G_n = -t_n I_n$ $(n \ge 1)$. Положим

$$a_k = \begin{cases} e^{-G_1}, & \text{если } k = 1, 2, \dots, j_1; \\ e^{-G_n}, & \text{если } k = j_n \quad (n \ge 1); \\ e^{-\gamma_n(\lambda_k)-1}, & \text{если } j_n < k < j_{n+1} \quad (n \ge 1), \end{cases}$$

где $y = \gamma_n(x)$ — уравнение прямой, проходящей через точки $P_n = (t_n, G_n)$ и $P_{n+1} = (t_{n+1}, G_{n+1})$.

Убедимся, что $R_n \uparrow 0$ при $n \to \infty$, где

$$R_n = \frac{G_{n+1} - G_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Действительно, $R_n = -I_n + \frac{\beta(t_n)}{t_n} \quad (n \ge 1)$ (мы воспользовались тем, что $\beta(t) = q\alpha(t)$, а $\alpha(t) = \alpha(t_n)$ при $t_n \le t < t_{n+1}$). Отсюда получаем, что

$$R_{n+1} - R_n = q\left(\frac{\alpha(t_{n+1}) - \alpha(t_n)}{t_{n+1}}\right) > 0 \quad (n \ge 1).$$

Но так как $G_n = o(t_n)$ при $n \to \infty$, то, действительно, $R_n \uparrow 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, совокупность всех отрезков прямых, соединяющих точки P_n и P_{n+1} $(n \ge 1)$ является выпуклым полигоном Ньютона $L(F)$ для ряда Дирихле [1]

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s}. \tag{40}$$

Поскольку точки $(\lambda_k, -\ln|a_k|)$ при $j_n < k < j_{n+1}$ $(n \ge 1)$ лежат выше $L(F)$, вершинами полигона $L(F)$ являются как раз точки $P_n = (t_n, G_n)$, $t_n = \lambda_{j_n}$ $(n \ge 1)$. Имея это в виду, оценим максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (40) сверху. При $R_{n-1} \le \sigma < R_n$ максимальный член равен $|a_n|e^{\lambda_n \sigma}$ [1]. Следовательно, для любого $n \ge 1$

$$\ln\mu(\sigma) = -G_n + t_n\sigma = t_n(I_n + \sigma) < \frac{t_n t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\beta(x)}{x^2}\, dx = q\alpha_n. \tag{41}$$

С другой стороны,

$$\mu^*(\sigma) \ge |a_{j_n} b_{j_n}| e^{\lambda_{j_n}\sigma}, \quad b_{j_n} = e^{\alpha(t_n)}, \quad \alpha(t_n) = \alpha_n \quad (n \ge 1).$$

Поэтому для $R_{n-1} \le \sigma < R_n$ получаем

$$\ln\mu^*(\sigma) = \alpha_n + t_n(I_n + \sigma) = \alpha_n + \ln\mu(\sigma) > \alpha_n \quad (n \ge 1). \tag{42}$$

Таким образом, из (41), (42) следует, что $\ln\mu(\sigma) < q\ln\mu^*(\sigma)$, если $R_{n-1} \le \sigma < R_n$ $(n \ge 1)$. Значит,

$$\varlimsup_{\sigma\to\, 0-} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\ln\mu^*(\sigma)} \le q < 1,$$

и максимальный член $\mu(\sigma)$ не обладает свойством $B(d)$-устойчивости.

Убедимся, что $F \in \underline{D}_o(\Phi)$. Действительно, из представления [1]

$$\ln \mu(\sigma) = \ln \mu(-1) + \int_{-1}^{\sigma} \lambda_{\vartheta(t)}\, dt$$

получаем, что

$$\ln \mu\left(\frac{\sigma}{2}\right) \geq \int_{\sigma}^{\sigma/2} \lambda_{\vartheta(t)} dt \geq \frac{|\sigma|}{2} \lambda_{\vartheta(\sigma)} \quad (\sigma < 0). \tag{43}$$

Далее, $R_n = -I_n + \frac{\beta(t_n)}{t_n}$, $\beta(t_n) = \alpha_n q \quad (n \geq 1)$. Следовательно, с учетом (12), (39) имеем

$$|R_n|\varphi(t_n) = I_n \varphi(t_n) - \frac{\beta(t_n)}{t_n}\varphi(t_n) \geq \gamma > 0 \quad (n \geq 1).$$

Пусть $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$. Тогда $\lambda_{\vartheta(\sigma)} = t_n$, и $\varphi(\lambda_\vartheta) \geq \gamma/|R_n| > \gamma/|\sigma|$, $\vartheta = \vartheta(\sigma)$. Тем самым из (43) выводим, что для $R_{n-1} \leq \sigma < R_n$ $(n \geq 1)$

$$\ln \mu\left(\frac{\sigma}{2}\right) > \frac{|\sigma|}{2} \lambda_\vartheta > \frac{|\sigma|}{2} \Phi\left(\frac{\gamma}{|\sigma|}\right), \quad n \to \infty.$$

Это означает, что

$$\varliminf_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma| \Phi(\frac{\tau}{|\sigma|})} > 0, \quad \tau = \frac{\gamma}{2}.$$

Значит, $F \in \underline{D}_o(\Phi)$.

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Если $B = \left\{\lambda_n^m\right\}_{n=1}^{\infty}$ $(m = 1, 2, \dots)$, то из теоремы 2 вытекает, что для любой функции $F \in \underline{D}_o(\Phi)$ при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$, $de = 0$, будет $\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu_m(\sigma)$, где $\mu_m(\sigma)$ — максимальный член ряда

$$F^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{\lambda_m s},$$

а $F^{(m)}(s)$ — производная порядка m функции $F(s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
2. *Гайсин А. М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 6. С. 735–737.
3. *Гайсин А. М.* Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 53, № 4. С. 173–185.
4. *Цегелик Г. Г.* Свойства мажоранты и диаграммы Ньютона функции, аналитической в круге // Укр. мат. журн. 1997. Т. 29, № 4. С. 560–562.

Статья поступила 3 июля 2000 г., окончательный вариант — 23 февраля 2001 г.

Гайсин Ахтяр Магазович
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН, ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077
gaisin@imat.rb.ru

Белоус Татьяна Ивановна
Уфимский гос. авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, корп. 8, комн. 313, Уфа 450000
belousti@yandex.ru