Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 519.44/45

НОРМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОЙ ГРУППЫ В РАДИКАЛЬНЫХ КОЛЬЦАХ $R_n(K, J)$

В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова

Аннотация: Пусть $R_n(K, J)$ — кольцо всех $n \times n$-матриц над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей и элементами из идеала J на главной диагонали и над ней. Ранее при условии сильной максимальности идеала J в K (в частности, когда J — максимальный идеал кольца Z_m, $m > 0$, или Z) каждый идеал в кольце $R_n(K, J)$ с $(n, 1)$-проекцией T был охарактеризован определенным порождающим подмножества кольца $R_n(K, J)$, называемым T-границей. При дополнительных ограничениях изучались также лиевы идеалы кольца $R_n(K, J)$. Известно, что нормальные подгруппы присоединенной группы кольца $NT_n(K) = R_n(K, 0)$ нильтреугольных матриц — это в точности идеалы ассоциированного кольца Ли. Показано, что для радикальных колец $R_n(K, J)$, $n \geq 2$, случай $J = 0$ является единственным, когда указанное структурное соответствие выполняется. Основная цель статьи — исследовать гипотезу о существовании алгоритма построения нормальных подгрупп присоединенной группы кольца $R_n(K, J)$ из его лиевых идеалов при естественных ограничениях на K, J.

Вводятся лиевы и нормальные T-границы кольца $R_n(K, J)$. В этих терминах теорема 2 описывает лиевы идеалы кольца $R_n(K, J)$ с сильно максимальным идеалом J таким, что $2I = I$ для любого идеала $I \subset J$ кольца K. При дополнительном условии нильпотентности J теорема 3 аналогично описывает нормальные подгруппы присоединенной группы кольца $R_n(K, J)$ и, по существу, дает алгоритм их получения из лиевых идеалов. Библиогр. 10.

Введение

Кольцо всех $n \times n$-матриц над ассоциативным кольцом K с единицей с элементами из идеала J на главной диагонали и над ней обозначают через $R_n(K, J)$. При $J = 0$ это обычное кольцо $NT_n(K)$ (нижних) нильтреугольных матриц степени n над K. Присоединенная группа кольца $NT_n(K)$ изоморфна унитреугольной группе $UT_n(K)$. Ее нормальные подгруппы суть идеалы кольца Ли, ассоциированного с кольцом $NT_n(K)$, и они допускают явное описание, когда K — тело, см. [1, 2]; позднее аналогичные результаты устанавливались для унипотентных подгрупп групп Шевалле других лиевых типов [3–6]. Кольца $R_n(K, J)$ с квазирегулярным идеалом J всегда радикальны. Известно, однако, что указанное соответствие в них между нормальными подгруппами присоединенной группы кольца $R_n(K, J)$ и его лиевыми идеалами нарушается, если идеал J содержит элемент с ненулевым квадратом [7, пример 1.1]. Оказывается, для радикальных колец $R_n(K, J)$, $n \geq 2$, случай $J = 0$ (с коммутативным кольцом K) является единственным, когда указанное структурное соответствие выполняется (см. пример 1.3 в § 1, предложенный вторым автором, вопрос 6.19 с комментарием Е. И. Хухро и вопрос 10.19 из [8]). С другой стороны, ранее

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–01256).

высказывалась гипотеза (в частности см. [9]) о существовании алгоритма построения нормальных подгрупп присоединенной группы кольца $R_n(K,J)$ из его лиевых идеалов при естественных ограничениях на K, J. Гипотеза исследуется в статье.

Всюду далее K — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Его идеал J назван в [7] *сильно максимальным*, если любой идеал, заключенный между произвольным J-подмодулем L кольца K и JL, совпадает либо с L, либо с JL. Для этого случая в [7] явно описаны в терминах T-границ идеалы кольца $R_n(K,J)$, $n \geq 2$, а в [9] построены лиевы идеалы кольца $R_n(K,J)$ при ограничениях $n > 4$ и $2K = K$.

Теорема 2 настоящей статьи обобщает теорему 2 из [1] и усиливает основную теорему из [9]. Она описывает лиевы идеалы кольца $R_n(K,J)$ в терминах лиевых T-границ (определение 1.1). Последние тесно связаны с введенными в определении 1.4 нормальными T-границами кольца $R_n(K,J)$. С их помощью для случая, когда J — нильпотентный сильно максимальный идеал, теорема 3 дает описание нормальных подгрупп присоединенной группы кольца $R_n(K,J)$ и, по существу, алгоритм их получения из лиевых идеалов.

Примеры сильно максимальных идеалов указаны в [7, предложение 2.5]. В частности, нильпотентными сильно максимальными идеалами являются нулевой идеал произвольного поля и максимальный идеал в любом локальном кольце классов вычетов целых чисел.

§ 1. T-границы кольца $R_n(K,J)$

Множество $H_{km} = \{a_{km} \mid \|a_{st}\| \in H\}$, обозначаемое также через $\pi_{km}(H)$, назовем *(k,m)-проекцией произвольного множества H матриц*. Через e_{uv} будем обозначать $n \times n$-матрицу, у которой (u,v)-проекция равна единице, а остальные проекции нулевые (матричная единица).

Как и в [7], будем использовать частичный порядок $\succeq$ на множестве матричных позиций, полагая $(u,v) \succeq (k,m)$, когда $u \geq k$, $v \leq m$; если еще $(u,v) \neq (k,m)$, то пишем $(u,v) \succ (k,m)$. Для множества $\mathscr{L}$ матричных позиций полагаем также $(u,v) \succeq \mathscr{L}$, если $(u,v) \succeq (k,m)$ хотя бы для одной позиции $(k,m) \in \mathscr{L}$; конечно, при $\mathscr{L} = \varnothing$ позиций (u,v) с таким условием не существует. *Множеством углов степени n* называем пару $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ множеств матричных позиций вида

$$\mathscr{L} = \{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\dots,(i_r,j_r)\}, \qquad r \geq 1, \tag{1}$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n;$$

$$\mathscr{L}' = \{(k_1,m_1),(k_2,m_2),\dots,(k_q,m_q)\}, \quad q \geq 0, \tag{2}$$

$$j_r < m_1 < m_2 < \dots < m_q \leq n, \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_q < i_1.$$

Очевидно, множество углов не содержит двух матричных позиций из одной строки или одного столбца, а также сравнимых позиций $(u,v) \succ (k,m)$, лежащих одновременно либо в $\mathscr{L}$, либо в $\mathscr{L}'$.

Пусть T — какой-либо J-подмодуль кольца K. Согласно [7] *T-границей* кольца $R_n(K,J)$ называется любая его аддитивная подгруппа A, для которой существует множество углов $(\mathscr{L},\mathscr{L}')$ со следующими условиями:

(Г0) $JB \subset A \subset B = \sum\limits_{(i,j)\in\mathscr{L}} Te_{ij} + \sum\limits_{(k,m)\in\mathscr{L}'} (JT)e_{km}$;

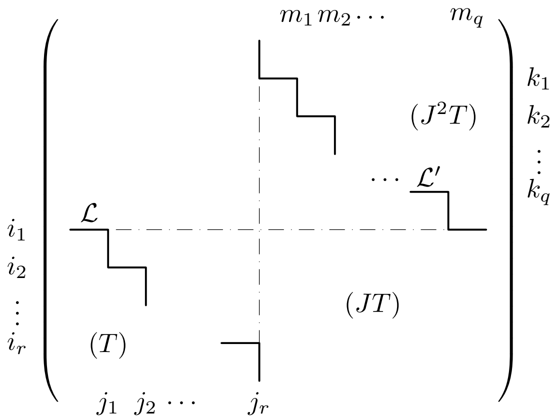
(Г1) $\mathscr{L}' = \varnothing$ при $JT = J^2T$ и $\mathscr{L} = \{(1,n)\}$ при $JT = T$;

(Г2) $\pi_{n1}(A) = T$ при $\mathscr{L} = \{(n,1)\}$, а в остальных случаях идеал $K\pi_{ij}(A)$ совпадает с T при всех $(i,j) \in \mathscr{L}$ и с JT при всех $(i,j) \in \mathscr{L}'$.

Идеал кольца $R_n(K, J)$, порожденный T-границей $A = A(T; \mathscr{L}, \mathscr{L}')$, записывается явно в виде

$$A + \sum_{(i,j)\succ\mathscr{L}} Te_{ij} + \sum_{(k,m)\succ\mathscr{L}'} (JT)e_{km} + \sum_{(k,m)\succeq\{(1,j_r),(i_1,n)\}} (JT)e_{km} + \sum_{(k,m)\succeq(1,n)} (J^2T)e_{km}$$

и представляется наглядно с использованием формальной $n \times n$-матрицы



Оказывается [7], что при условии сильной максимальности идеала J в кольце K любой идеал кольца $R_n(K, J)$ порождается подходящей T-границей. Более точно, справедлива (см. [7, теорема 2.2])

Теорема 1. *Пусть H — произвольный идеал кольца $R_n(K, J)$, $n \geq 2$, и T — его $(n, 1)$-проекция. Если J — сильно максимальный идеал кольца K, то существует и единственна T-граница $A = A(T; \mathscr{L}, \mathscr{L}')$ кольца $R_n(K, J)$, порождающая H, причем $A = H \cap B$.*

Для подобного описания нормальных подгрупп присоединенной группы кольца $R_n(K, J)$ и идеалов ассоциированного кольца Ли ниже вводятся понятия *нормальной* и *лиевой* T-границ.

Кольцо $R_n(K, J)$ порождается аддитивными подгруппами вида $Ke_{v,v-1}$ и Je_{1n}. Для выявления лиевой замкнутости его подмножеств используем понятия связанных углов. Угол (u, v) назовем *право-* (*лево-*) *связанным*, если $\mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$ содержит угол в $(v-1)$-й строке (соответственно в $(u+1)$-м столбце) или $\mathscr{L}$ содержит угол в n-й строке и $v = 1$ (соответственно, в 1-м столбце и $u = n$).

Множеству углов $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$ будем сопоставлять множества $\widetilde{\mathscr{L}}$, $\widetilde{\mathscr{L}'}$ матричных позиций. Множество $\widetilde{\mathscr{L}'}$ получаем присоединением к $\mathscr{L}'$ следующих позиций:

(v, t), если $(v-1, t)$ — угол из $\mathscr{L}'$, лево-связанный с углом из $\mathscr{L}'$;

(i, n), если $(i, 1)$ — право-связанный угол в $\mathscr{L}$, и еще позиция $(i+1, n)$, когда $(i, 1) \in \mathscr{L}$ и $(n, i+1) \in \mathscr{L}$.

Множество $\widetilde{\mathscr{L}}$ получается из $\mathscr{L}$ присоединением позиций:

(v, t), если $(v-1, t)$ — лево-связанный угол в $\mathscr{L}$ или $(v, t+1)$ — угол из $\mathscr{L}$, право-связанный с углом из $\mathscr{L}'$;

$(u+1, v), (u, v-1)$ и $(u+1, v-1)$, когда $(u, v) \in \mathscr{L}$ и $(v-1, u+1) \in \mathscr{L}'$.

Положим

$$\widetilde{B} = \widetilde{B}(T; \mathscr{L}, L') = \sum_{(i,j)\in\widetilde{\mathscr{L}}} Te_{ij} + \sum_{(k,m)\in\widetilde{\mathscr{L}'}} (JT)e_{km}, \quad D = \sum_{u=1}^{n} Je_{uu}. \tag{3}$$

Определение 1.1. Аддитивная подгруппа A кольца $R_n(K, J)$ называется его *лиевой T-границей*, если существует множество углов $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$, которое не содержит позиций главной диагонали, удовлетворяет условиям (Г1), (Г2) и следующим условиям:

(Г3) $J\widetilde{B} \subset A \subset \widetilde{B} + D$;

(Г4) если $\|a_{st}\| \in A$ и $1 \le v < u \le n$, то $K(a_{uu} - a_{vv}) \subset T$ и при $a_{uu} \ne a_{vv} \mod JT$ имеем $(u, v) \succeq \mathscr{L}$ и $(v, u) \succeq \mathscr{L}'$, причем $Te_{uv} \subset A$, $JTe_{un} \subset A$, $JTe_{u+1,n} \subset A$ и $JTe_{vu} \subset A$ соответственно случаям $(u, v) \in \widetilde{\mathscr{L}}$, $(u, n) \in \widetilde{\mathscr{L}'}$, $(u + 1, n) \in \widetilde{\mathscr{L}'}$ и $(v, u) \in \widetilde{\mathscr{L}'}$;

(Г5) если $\|a_{st}\| \in A$, $1 \le v < u \le n$ и $a_{uu} \ne a_{vv} \mod J^2T$, то $(u, v) \succeq \mathscr{L}'$, причем $JTe_{uv} \subset A$, когда $(u, v) \in \widetilde{\mathscr{L}'}$;

(Г6) если $A \subset A_1 \subset \widetilde{B} + D$ и лиевы идеалы в $R_n(K, J)$, которые порождают A и A_1, совпадают, то $A = A_1$.

В терминах введенных лиевых T-границ кольца $R_n(K, J)$ описание его лиевых идеалов по аналогии с теоремой 1 устанавливает основная в § 2 теорема 2. Понятие лиевой T-границы, по существу, вводится уже в [9], однако без условия (Г6). С другой стороны, как выявляется в § 2, именно условие (Г6) обеспечивает утверждение единственности в теореме 2 и позволяет заменить требование аддитивности лиевой T-границы A в определении 1.1 условием $A \subset R_n(K, J)$.

Присоединенное умножение $a \circ b = a + b + ab$ в ассоциативном кольце всегда является полугрупповой операцией. Кольцо называют *радикальным*, если присоединенное умножение — групповая операция. Известно [7], что условие радикальности кольца $R_n(K, J)$ равносильно квазирегулярности идеала J, т. е. $(J, \circ)$ — группа. В этом случае отображение $\alpha \mapsto e + \alpha$ присоединенной группы кольца $R_n(K, J)$ (e — единичная матрица) является ее мономорфизмом в $GL_n(K)$.

Лемма 1.2 (см. [1, теорема 1]). *Лиевы идеалы кольца $NT_n(K) = R_n(K, 0)$, и только они, являются нормальными подгруппами присоединенной группы. В частности, для всякой нормальной подгруппы H присоединенной группы кольца $R_n(K, J)$ пересечение $H \cap NT_n(K)$ будет подкольцом и лиевым идеалом кольца $NT_n(K)$.*

Как показывает теорема 1 из [1], при условии $1 \in K$ или даже при более слабом условии $K = K^2$ на ассоциативное кольцо K класс всех нормальных подгрупп присоединенной группы кольца $NT_n(K)$ совпадает с классом всех идеалов ассоциированного кольца Ли. (Существенность условия $K = K^2$ показывает пример 1 из [1]). Вопрос о характеризации радикальных колец с отмеченным структурным соответствием записан в [8, вопрос 10.19] и остается открытым. Оказывается, для радикальных колец $R_n(K, J)$ (с коммутативным кольцом K), $n \ge 2$, случай $J = 0$ является единственным, когда указанное структурное соответствие выполняется. Это показывает следующий, предложенный вторым автором пример.

Пример 1.3. Подмножество M всех матриц со следом 0 в кольце $R_n(K, J)$, очевидно, будет лиевым идеалом. Однако M не является даже подгруппой присоединенной группы, если $J \ne 0$. Действительно, при ненулевом $y \in J$ присоединенное произведение $e_{21} \circ ye_{12} = e_{21} + ye_{12} + ye_{22}$ матриц из M имеет ненулевой след, равный y, и поэтому не лежит в M.

Ранее в [7, пример 1.1] уже показывалось, что для радикальных колец $R_n(K, J)$, $n \ge 2$, указанное структурное соответствие нарушается, если кольцо K коммутативно, а идеал J содержит элемент с ненулевым квадратом.

Конечно, для описания нормальных подгрупп присоединенной группы кольца $R_n(K,J)$ поиски аналога теоремы 2 целесообразны, лишь когда кольцо $R_n(K,J)$ радикально. Элемент, квазиобратный к α, обозначаем через α', так что $\alpha \circ \alpha' = \alpha' \circ \alpha = 0$. При $\alpha = \|a_{st}\|$ полагаем $\alpha' = \|a^*_{st}\|$.

Определение 1.4. Подмножество A радикального кольца $R_n(K,J)$ называется его *нормальной T-границей*, если существует множество углов $(\mathscr{L},\mathscr{L}')$, которое не содержит позиций главной диагонали, удовлетворяет условиям (Г1)–(Г3) и следующим условиям:

(Г4$'$) если $\|a_{st}\| \in A$ и $1 \le v < u \le n$, то $K(a_{uu}\circ a^*_{vv}) \subset T$ и при $a_{uu}\circ a^*_{vv} \notin JT$ имеем $(u,v) \succeq \mathscr{L}$ и $(v,u) \succeq \mathscr{L}'$, причем $Te_{uv} \subset A$, $JTe_{un} \subset A$, $JTe_{u+1,n} \subset A$ и $JTe_{vu} \subset A$ соответственно случаям $(u,v) \in \widetilde{\mathscr{L}}$, $(u,n) \in \widetilde{\mathscr{L}'}$, $(u+1,n) \in \widetilde{\mathscr{L}'}$ и $(v,u) \in \widetilde{\mathscr{L}'}$;

(Г5$'$) если $\|a_{st}\| \in A$, $1 \le v < u \le n$ и $a_{uu}\circ a^*_{vv} \notin J^2T$, то $(u,v) \succeq \mathscr{L}'$, причем $JTe_{uv} \subset A$, когда $(u,v) \in \widetilde{\mathscr{L}'}$;

(Г6$'$) если $A \subset A_1 \subset \widetilde{B} + D$ и нормальные замыкания подмножеств A и A_1 в присоединенной группе кольца $R_n(K,J)$ совпадают, то $A = A_1$.

Основная в § 3 теорема 3 дает описание нормальных подгрупп присоединенной группы кольца $R_n(K,J)$ в терминах нормальных T-границ.

§ 2. Теорема об идеалах ассоциированного кольца Ли

Цель параграфа — доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть J — сильно максимальный идеал кольца K со свойством $2I = I$ для любого идеала $I \subseteq J$ кольца K. Если H — идеал лиева кольца $R_n(K,J)$, $n \ge 2$, и T — его $(n,1)$-проекция, то существует и единственна лиева T-граница $A = A_L(T;\mathscr{L},\mathscr{L}')$ кольца $R_n(K,J)$, порождающая H как лиев идеал, причем $A = H \cap (\widetilde{B} + D)$.*

По существу, при ограничениях $n > 4$ и $2K = K$ теорему 2 без утверждения единственности устанавливает основная теорема в [9]; схема ее доказательства существенно используется ниже.

Ассоциированное лиево умножение в кольце $R = R_n(K,J)$ обозначаем через $*$, т. е. $\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha$. Через $\Lambda(R)$ обозначаем ассоциированное лиево кольцо. Основные соотношения между матричными единицами дают следующую формулу:

$$\alpha * (xe_{km}) = x\left(\sum_{s=1}^{n} a_{sk}e_{sm} - \sum_{t=1}^{n} a_{mt}e_{kt}\right) \quad (\alpha = \|a_{st}\|,\ x \in K). \tag{4}$$

Лемма 2.1. *Пусть H — идеал лиева кольца $\Lambda(R)$. Тогда*

(а) *$JH_{uv} \subset H_{ij}$ при $u \ne v$;*

(б) *если $(i,j) \succ (u,v)$ и $u \ne v$, то $2KH_{u,u+1} \subset H_{u+1,u}$, когда $v = u+1$ и $(i,j) = (u+1,u)$, и $KH_{uv} \subset H_{ij}$ в остальных случаях;*

(в) *если $\|a_{km}\| \in H$ и $u > v$, то $K(a_{vv} - a_{uu}) \subset H_{uv}$ и $J(a_{vv} - a_{uu}) \subset H_{vu}$;*

(г) *если $T = H_{n1}$, то T — J-подмодуль кольца K и либо $KH_{uv} \ne T$ для всех $(u,v) \ne (n,1)$, $u \ne v$, либо T — идеал кольца K.*

Доказательство следует из (4); см. также лемму 1 из [9].

Пусть $\mathscr{L}(H)$ — множество всех минимальных относительно введенного упорядочения $\succeq$ матричных позиций (i,j), не лежащих на главной диагонали и таких, что идеал, порожденный H_{ij}, содержит T. Через $\mathscr{L}'(H)$ обозначаем множество (возможно, пустое) всех минимальных относительно упорядочения $\succeq$

матричных позиций (k, m), $k \neq m$, для которых H_{km} порождает идеал JT, причем $k < i$ и $m > j$ для всех $(i, j) \in \mathscr{L}(H)$.

Лемма 2.2. *Пусть H — лиев идеал кольца $R_n(K, J)$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(H)$ и $\mathscr{L}' = \mathscr{L}'(H)$. Тогда $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ — множество углов степени n. Если J — сильно максимальный идеал кольца K, то при $(k, m) \notin \mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$, $k \neq m$, имеем либо $(k, m) \succ \mathscr{L}$ и $H_{km} = T$, либо $(k, m) \succ \mathscr{L}'$, $(k, m) \not\succ \mathscr{L}$ и $H_{km} = JT$, либо $(k, m) \not\succ \mathscr{L}'$ и $H_{km} = J^2T$.*

Доказательство. С учетом леммы 2.1 первое утверждение вытекает из определений множества углов и множеств $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$. Пусть J — сильно максимальный идеал кольца K. По лемме 2.1 всякая недиагональная проекция H_{km} лежит в T и содержит J^2T. Следовательно, если она содержит JT, то совпадает с T или JT; при $H_{km} \subset JT$ проекция H_{km} должна совпадать с JT или J^2T в силу выбора J. Учитывая определения $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ и то, что при $(i, j) \in \mathscr{L}$ лемма 2.1 дает также включения $H_{1j} \supset JH_{ij} = JKH_{ij} = JT$ и $H_{in} \supset JH_{ij} = JKH_{ij} = JT$, получаем второе утверждение леммы (см. матрицу $(*)$). Лемма доказана.

Далее предполагаем, что J — сильно максимальный идеал кольца K, H — фиксированный лиев идеал кольца $R_n(K, J)$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(H)$ и $\mathscr{L}' = \mathscr{L}'(H)$. По лемме 2.1 $T = H_{n1}$ является J-подмодулем, а при $\mathscr{L} \neq \{(n, 1)\}$ — даже идеалом кольца K. Наша цель — показать, что H порождается как лиев идеал подходящей лиевой T-границей $A_L(T; \mathscr{L}, \mathscr{L}')$.

В этом параграфе через $P_{ij}(F)$ (аналогично $Q_{ij}(F)$) при $F \subseteq K$ обозначаем аддитивную подгруппу кольца R, порожденную множествами Fe_{km} для всех $(k, m) \succeq (i, j)$ (соответственно $(k, m) \succ (i, j)$), $k \neq m$, и при $i < j$ еще множествами $F(e_{kk} - e_{mm})$, $i \leq k < m \leq j$.

Лемма 2.3. *Пусть H — лиев идеал кольца $R_n(K, J)$ и H_0 — аддитивная подгруппа*

$$\begin{gathered}\sum_{(i,j)\in\mathscr{L}, i<j} [Q_{i+1,j}(T) + Q_{i,j-1}(T)] + \sum_{(i,j)\in\mathscr{L}, i>j} [P_{i+2,j}(T) + P_{i,j-2}(T)] \\ + \sum_{(i,i+1)\in\mathscr{L}} Q_{i,i+1}(T) + (JT)(e_{11} - e_{nn}) \\ + \sum_{(i,j)\in\mathscr{L}} [Q_{1,j-1}(JT) + P_{2j}(JT)] + \sum_{(i,j)\in\mathscr{L}} [Q_{i+1,n}(JT) + P_{i,n-1}(JT)] \\ + \sum_{(k,m)\in\mathscr{L}', k>m} [Q_{k+1,m}(JT) + Q_{k,m-1}(JT)] \\ + \sum_{(k,m)\in\mathscr{L}', k<m} [P_{k+2,m}(JT) + P_{k,m-2}(JT)] + \sum_{(k,k+1)\in\mathscr{L}'} Q_{k,k+1}(JT) + P_{1n}(J^2T).\end{gathered} \tag{5}$$

Если любой идеал $I \subseteq J$ кольца K удовлетворяет условию $2I = I$, то $H \supseteq H_0$.

Доказательство. Поскольку идеал J^2T кольца K лежит в J, то $2J^2T = J^2T$ в силу выбора J в лемме. Поэтому H содержит множество

$$J^2H_{n1}e_{1n} = J^2(2H_{n1})e_{1n} = (Je_{1n} * H) * Je_{1n}$$

и его лиево замыкание $P_{1n}(J^2T)$. Следовательно, включение $H \supset P_{1n}(J^2T)$, доказанное в лемме 2 из [9] при условии $2K = K$, выполняется и при нашем более слабом ограничении на J, K. Включение в H остальных порождающих из (5) получаем аналогично, как и в леммах 2–8 из [9], опираясь на уже доказанное включение. Лемма доказана.

Сопоставим с каждой матрицей $\|a_{st}\|$ кольца $R_n(K,J)$ следующие аддитивные подгруппы:

$$P_{ij}(T)+P_{1j}(JT)+P_{in}(JT) \quad \text{при } i>j, \quad a_{ii}\neq a_{jj} \mod JT; \tag{6}$$

$$P_{ij}(JT), \quad \text{если } J(a_{ii}-a_{jj})\neq 0 \mod J^2T \quad \text{или} \quad i>j, \quad a_{ii}\neq a_{jj} \mod J^2T; \tag{7}$$

$$\left.\begin{array}{r} K(a_{ij}e_{i,j-1}-a_{j-1,i+1}e_{j,i+1}+a_{i+1,j}e_{i+1,j-1}-a_{j-1,i}e_{ji}),\\ K(a_{ij}e_{i+1,j}-a_{j-1,i+1}e_{j-1,i}+a_{i,j-1}e_{i+1,j-1}-a_{j,i+1}e_{ji}),\\ K(a_{ij}e_{i+1,j-1}+a_{j-1,i+1}e_{ji}) \quad ((i,j)\in\mathscr{L},\ (j-1,i+1)\in\mathscr{L}'); \end{array}\right\} \tag{8}$$

$$K(a_{ij}e_{i,j-1}-a_{j-1,m}e_{jm}) \quad ((i,j),(j-1,m)\in\mathscr{L}\cup\mathscr{L}',\ m\neq i+1,\ (i,m)\neq(n,1)); \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{r} K(a_{nj}e_{n,j-1}-a_{j-1,1}e_{j1}+a_{1j}e_{1,j-1}-a_{j-1,n}e_{jn}),\\ J(a_{nj}e_{1j}-a_{j-1,1}e_{j-1,n}+a_{n,j-1}e_{1,j-1}-a_{j1}e_{jn}),\\ J(a_{nj}e_{1,j-1}+a_{j-1,1}e_{jn}) \quad ((n,j),\ (j-1,1)\in\mathscr{L}); \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$J(a_{nj}e_{1j}-a_{i1}e_{in}) \quad ((n,j),(i,1)\in\mathscr{L},\ i\neq j-1). \tag{11}$$

Лемма 2.4. *Лиев идеал H содержит следующие аддитивные подгруппы:*

(а) *$P_{km}(T)$, если либо $(k-1,m)$ — угол из $\mathscr{L}$, не являющийся лево-связанным, либо $(k,m+1)$ — угол из $\mathscr{L}$, не являющийся право-связанным, либо $(k-1,m+1)\in\mathscr{L}$ и $(m,k)\notin\mathscr{L}'$;*

(б) *$P_{km}(JT)$, если либо $(k-1,m)$ — угол из $\mathscr{L}'$, не являющийся лево-связанным, либо $(k,m+1)$ — угол из $\mathscr{L}'$, не являющийся право-связанным, либо $(k-1,m+1)\in\mathscr{L}'$ и $(m,k)\notin\mathscr{L}$;*

(в) *$P_{1j}(JT)$, если либо $(n,j+1)\in\mathscr{L}$ лево-связанный с углом из $\mathscr{L}$, но не является право-связанным с этим углом, либо $(n,j)\in\mathscr{L}$ — угол, не являющийся лево-связанным, либо $(i,j)\in\mathscr{L}$ для $i<n$;*

(г) *$P_{in}(JT)$, если либо $(i-1,1)\in\mathscr{L}$ право-связан с углом из $\mathscr{L}$, но не является лево-связанным с этим углом, либо $(i,1)\in\mathscr{L}$ — угол, не являющийся право-связанным, либо $(i,j)\in\mathscr{L}$ для $j>1$.*

Кроме того, H содержит множества (6)–(11) для любой матрицы $\|a_{st}\|\in H$.

Доказательство. Отметим, что включение в H аддитивных подгрупп (а) и (б) при $k=m$, а также (в) при $j=1$ и (г) при $i=n$ вытекает из леммы 2.3.

Покажем, что множество (6) лежит в H. При $i-j>1$, пользуясь включением $H\supset H*Ke_{ij}+H_0$, находим $H\supset K\{a_{ii}-a_{jj}\mid \|a_{st}\|\in H\}e_{ij}$. Кроме того, в условиях (6) $(i,j)\succeq\mathscr{L}$, и поэтому $H\supset JTe_{ij}$ в силу леммы 2.3. Идеал $K\{a_{ii}-a_jj\mid\|a_{st}\|\in H\}+JT$ кольца K лежит между J-подмодулями JT и T, не совпадает с JT и, значит, совпадает с T, поскольку J — сильно максимальный идеал. Таким образом, получаем включение в H множества Te_{ij}, а следовательно, и множества $P_{ij}(T)+P_{1j}(JT)+P_{in}(JT)$, так как H — лиев идеал. То же самое включение получим и при $j=i-1$. Нужно лишь заметить, что множество $H*Ke_{ij}+JTe_{ij}$ лежит в пересечении

$$(Te_{ij}+Te_{i,j-1}+Te_{i+1,i}+H_0)\cap H$$

и имеет (i,j)-проекцию, равную T. Включение $P_{ij}(JT)\subset H$ в условиях (7) доказывается аналогично.

Рассмотрим (а). В первом случае, когда $(k-1,m)\in\mathscr{L}$, множество $H*Ke_{k,k-1}$ по модулю H_0 лежит в $(Te_{km}+Te_{k,k-1}+JTe_{kn})\cap H$, причем его (k,m)-проекция равна T. Если $H\supset P_{k,k-1}(T)$, то для $m>k$ требуемое включение $H\supset P_{km}(T)$ получим из равенства $H*Ke_{k,k-1}=Te_{km} \mod Q_{km}(T)$.

При $H \not\supset P_{k,k-1}(T)$ имеем $m < k$ и, значит, последнее равенство также выполняется. Второй случай рассматривается аналогично с помощью соотношения $H \supset H * Ke_{m+1,m} \mod H_0$. В третьем случае $H \supset (H * Ke_{m+1,m}) * e_{k,k-1} = Te_{km} \mod H_0$. Включения в случае (б) доказываются аналогично.

Если в случае (в) $(i,j) \in \mathscr{L}$, то при $i \le n-2$ по лемме 2.3 $H \supset P_{i+2,j}(T)$ и $H \supset P_{1j}(JT)$. При $i = n-1$ имеем

$$(H * Ke_{n,n-1}) * Je_{1n} \subset (JTe_{1j} + JTe_{1,n-1} + H_0) \cap H$$

и поэтому либо $H \supset P_{1,n-1}(JT) \supset P_{1j}(JT)$, либо $H \not\supset P_{1,n-1}(JT)$, так что $j \neq n-1$ и $(H * Ke_{n,n-1}) * Je_{1n} = JTe_{1j} \mod Q_{1j}(JT)$, откуда вновь $H \supset P_{1j}(JT)$. Это же включение при $(n, j+1) \in \mathscr{L}$, $(j,1) \notin \mathscr{L}$ получаем аналогично с помощью соотношения $H \supset (H * Ke_{j+1,j}) * Je_{1n}$. Если угол (n,j) лежит в $\mathscr{L}$ и не является лево-связанным, то $H \supset Te_{n,j-1} + JTe_{1,j-1}$ по доказанному и с учетом включения в H множеств $H * Je_{1n}$, H_0 и (7) вновь находим $H \supset JTe_{1j}$.

Включение $H \supset P_{in}(JT)$ в случае (г) доказывается аналогично.

Ясно, что H содержит лиевы произведения

$$e_{i+1,i} * (H * Ke_{j,j-1}), \quad Je_{1n} * (H * Ke_{j,j-1})$$

и, как следствие, последние множества из (8) и (10) соответственно. Прибавляя к произведению $Je_{1n} * \alpha$ матрицы из H_0 и из множеств (а)–(г) и (7), получаем включение в H множества (11) при $i \neq j-1$ и второго множества из (10) для $i = j-1$. Аналогично, используя включения в H множеств (а)–(г), (6), лиевых произведений $Ke_{i+1,i} * H$, $H * Ke_{j,j-1}$, а также лемму 2.3, выводим включения в H первого множества из (10) и множеств (8), (9). Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть α — произвольная матрица из лиева идеала H, а $\widetilde{B}$ и D определены по формуле* (3). *Тогда в пересечении $H \cap (\widetilde{B} + D)$ существует матрица с такими же, как и у α, (u,v)-проекциями при $u = v$ и для всех $(u,v) \in \mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$. Кроме того, H аддитивно порождается пересечением $H \cap (\widetilde{B} + D)$ и множествами* (5), (а)–(г) *из леммы* 2.4, *а также множествами* (6)–(11) *для всевозможных $\|a_{st}\| \in H$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \|a_{st}\| \in H$. Все недиагональные проекции H_{km} и, следовательно, a_{km} $(k \neq m)$, лежат в T, JT или в J^2T в соответствии с их описанием в лемме 2.2. В частности, если $(k,m) \not\geq \mathscr{L}'$, то $a_{km} \in J^2T$. По лемме 2.3 имеем $P_{1n}(J^2T) \subset H$. Поэтому, прибавляя к α элементарные матрицы $-a_{km}e_{km}$ для всевозможных указанных (k,m), находим в H матрицу, у которой все недиагональные (u,v)-проекции при $(u,v) \not\geq \mathscr{L}'$ равны нулю, а остальные проекции такие же, как у α. Далее, аналогично прибавляем к α элементарные матрицы из H, которые выбираются из множества (5) и из множеств (а)–(г) леммы 2.4. Получим матрицу, у которой все элементы на недиагональных позициях вне $\widetilde{\mathscr{L}} \cup \widetilde{\mathscr{L}'}$ являются нулевыми, исключая при $n > 2$, быть может, следующие позиции:

(а) $(j-1,i)$, $(j,i+1)$ или (j,i), когда $(i,j) \in \mathscr{L}$ и $(j-1,i+1) \in \mathscr{L}'$;

(б) $(i,j-1)$ или $(i+1,j)$, когда (i,j) — право- или соответственно лево-связанный угол, причем $(j-1,i+1) \notin \mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$;

(в) $(1,j)$, если (n,j) — лево-связанный угол, и еще позиция $(1,j-1)$, когда (n,j) и $(j-1,1)$ лежат в $\mathscr{L}$.

По лемме 2.4 в исключительном случае (а) можно обратить в нуль $(j-1,i)$- и $(j,i+1)$-проекции матрицы α, прибавляя к ней матрицы из первых двух множеств в (8). Используя также прибавления матриц из последнего множества в (8), обращаем в нуль (j,i)-проекцию α. Исключительные случаи (б), (в) рассматриваем аналогично, учитывая множества (9)–(11) и лемму 2.4. Лемма доказана.

Основной в доказательстве теоремы 2 является следующая

Лемма 2.6. *Пусть H — идеал лиева кольца $R_n(K,J)$, а $\widetilde{B}$ и D определены по формуле* (3). *Тогда пересечение $H \cap (\widetilde{B}+D)$ порождает H как лиев идеал и является лиевой T-границей в $R_n(K,J)$.*

Доказательство. Положим $A = H \cap (\widetilde{B}+D)$. По лемме 2.6 (k,m)-проекции множеств A и H совпадают при $(k,m) \in \mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$ и, следовательно, условия (Г1) и (Г2) для A выполняются. Используя включение $J\widetilde{B} \subset H_0$, получаем $J\widetilde{B} \subset A \subset \widetilde{B}+D$, так что A удовлетворяет условию (Г3). Свойства (Г4) и (Г5) для A также выполняются в силу утверждения леммы 2.5 о диагоналях матриц из пересечения $H \cap (\widetilde{B}+D)$.

По лемме 2.5 множества (5), (а)–(г) из леммы 2.4 и множества (6)–(11) для всевозможных $\|a_{st}\| \in H$, вместе с A, аддитивно порождают H, см. матрицу $(*)$. Кроме того, по лемме 2.5 множества (5), (а)–(г) из леммы 2.4, а также (6), (7), (9) и (11) для всевозможных $\|a_{st}\| \in H$ полностью определяются множеством углов $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ и диагоналями матриц из A, так что в силу лемм 2.3 и 2.4 все они лежат в лиевом замыкании множества A. Очевидно, то же самое верно и для последнего множества как в (8), так и в (10). Порождаемость H как лиева идеала множеством A сейчас будет доказана, если мы покажем, что оставшиеся множества в (8) и (10) также лежат в лиевом замыкании множества A. Для любой матрицы $\alpha = \|a_{st}\| \in R_n(K,J)$ положим

$$\varphi_{ij}(\alpha) = a_{ij}e_{i+1,j-1} + a_{j-1,i+1}e_{ji},$$

$$\varphi^{+}_{ij}(\alpha) = a_{ij}e_{i,j-1} - a_{j-1,i+1}e_{j,i+1} + a_{i+1,j}e_{i+1,j-1} - a_{j-1,i}e_{ji},$$

$$\varphi^{-}_{ij}(\alpha) = a_{ij}e_{i+1,j} - a_{j-1,i+1}e_{j-1,i} + a_{i,j-1}e_{i+1,j-1} - a_{j,i+1}e_{ji}.$$

По лемме 2.4 множества $K\varphi_{ij}(H)$, $K\varphi^{+}_{ij}(H)$ и $K\varphi^{-}_{ij}(H)$ лежат в H при любом выборе $(i,j) \in \mathscr{L}$, $(j-1,i+1) \in \mathscr{L}'$. Первое из них, как уже отмечалось, лежит даже в лиевом замыкании множества A; докажем это же включение для оставшихся множеств.

Пусть $\alpha = \|a_{st}\| \in H$. В силу выбора (i,j) и лемм 2.1, 2.2 (j,i)-, $(j-1,i)$- и $(j,i+1)$-проекции H совпадают с идеалом JT, который, в свою очередь, порождается $(j-1,i+1)$-проекцией H. Поэтому существует конечное семейство матриц $\gamma^{(k)} = \|c^{(k)}_{uv}\| \in H$ таких, что

$$a_{j-1,i} = \sum_k x_k c^{(k)}_{j-1,i+1}, \quad a_{j,i+1} = \sum_k y_k c^{(k)}_{j-1,i+1},$$

$$a_{ji} - \sum_k x_k c^{(k)}_{j,i+1} - \sum_k y_k c^{(k)}_{j-1,i} = -\sum_k z_k c^{(k)}_{j-1,i+1}$$

для некоторых элементов $x_k, y_k, z_k \in K$. Поскольку матрица

$$\alpha + \sum_k x_k\varphi^{-}_{ij}(\gamma^{(k)}) + \sum_k y_k\varphi^{+}_{ij}(\gamma^{(k)}) + \sum_k z_k\varphi_{ij}(\gamma^{(k)}) = \bar{\alpha}$$

имеет нулевые (j,i)-, $(j-1,i)$- и $(j,i+1)$-проекции, то матрицы $\varphi^{+}_{ij}(\bar{\alpha})$ и $\varphi^{-}_{ij}(\bar{\alpha})$ лежат в A. Кроме того,

$$\varphi^{+}_{ij}(\alpha) = \varphi^{+}_{ij}(\bar{\alpha}) - \sum_k x_k\varphi_{ij}(\gamma^{(k)}), \quad \varphi^{-}_{ij}(\alpha) = \varphi^{-}_{ij}(\bar{\alpha}) - \sum_k y_k\varphi_{ij}(\gamma^{(k)}).$$

Отсюда уже следует, что $\varphi_{ij}^{+}(\alpha)$ и $\varphi_{ij}^{-}(\alpha)$ лежат в A.

При $1 < j < n$ полагаем

$$\varphi_j(\alpha) = a_{nj}e_{1,j-1} + a_{j-1,1}e_{jn},$$

$$\varphi_j^{+}(\alpha) = a_{nj}e_{n,j-1} - a_{j-1,1}e_{j1} + a_{1j}e_{1,j-1} - a_{j-1,n}e_{jn},$$

$$\varphi_j^{-}(\alpha) = a_{nj}e_{1j} - a_{j-1,1}e_{j-1,n} + a_{n,j-1}e_{1,j-1} - a_{j1}e_{jn}.$$

При (n, j), $(j-1, 1) \in \mathscr{L}$ множества $J\varphi_j(H)$, $J\varphi_j^{-}(H)$ и $K\varphi_j^{+}(H)$ из (10) лежат в H по лемме 2.4. Более того, как и выше, показывается, что они лежат даже в лиевом замыкании множества A.

Таким образом, H порождается как лиев идеал множеством A. Очевидно также, что если $A \subset A_1 \subset \widetilde{B} + D$ и A_1 порождает H как лиев идеал, то $A_1 \subset H \cap (\widetilde{B} + D) = A$ и $A_1 = A$. Поэтому условие (Г6) для A также выполняется и A является лиевой T-границей. Лемма доказана.

Сейчас теорема 2 легко следует из лемм 2.2 и 2.6. Попутно доказана

Лемма 2.7. *Пусть $A = A_L(T; \mathscr{L}, \mathscr{L}')$ — произвольная лиева T-граница кольца $R_n(K, J)$. Тогда минимальный лиев идеал в $R_n(K, J)$, содержащий A, аддитивно порождается множествами A,* (5), (а)–(г) *из леммы* 2.4 *и еще множествами* (6)–(11) *для всевозможных матриц $\|a_{st}\| \in A$.*

§ 3. Нормальные подгруппы присоединенной группы

Основным результатом параграфа является

Теорема 3. *Пусть J — нильпотентный сильно максимальный идеал кольца K со свойством $2I = I$ для любого идеала $I \subseteq J$ кольца K. Если H — произвольная нормальная подгруппа присоединенной группы кольца $R_n(K, J)$, $n \geq 2$, и T — ее $(n, 1)$-проекция, то существует и единственна нормальная T-граница $A = A_N(T; \mathscr{L}, \mathscr{L}')$ кольца $R_n(K, J)$, нормальное замыкание которой совпадает с H, причем $A = H \cap (\widetilde{B} + D)$.*

Вначале выпишем стандартные соотношения между элементарными матрицами в присоединенной группе кольца $R_n(K, J)$, используя для коммутатора обычное обозначение $[a, b] = a' \circ b' \circ a \circ b$:

$$(xe_{ii})' = x'e_{ii}, \quad (xe_{ij})' = -xe_{ij}, \quad i \neq j;$$

$$[xe_{ii}, ye_{jj}] = [xe_{ij}, ye_{kt}] = 0, \quad j \neq k, \ t \neq i;$$

$$[xe_{ij}, ye_{jt}] = xye_{it}, \quad i \neq j, \ t \neq i.$$

Всюду в этом параграфе кольцо $R = R_n(K, J)$ радикально. Конечно, это условие выполняется при условии нильпотентности идеала J. Через $P_{ij}(F)$ (аналогично $Q_{ij}(F)$) при $F \subset K$ здесь в отличие от § 2 будем обозначать подгруппу присоединенной группы кольца R, порожденную множествами Fe_{km} $(k \neq m)$ при $(k, m) \succeq (i, j)$ (соответственно $(k, m) \succ (i, j)$) и еще, когда $i < j$, множествами $\{xe_{kk} + x'e_{mm} \mid x \in F\}(i \leq k < m \leq j)$. Ясно, что $P_{ii}(F) = Q_{ii}(F)$.

Зафиксируем нормальную подгруппу H присоединенной группы кольца R.

Лемма 3.1. *Для всякого идеала F кольца K при $H \supset Fe_{km}$, $k \neq m$, выполняется включение $H \supset P_{km}(F)$. Кроме того, если $k > m$ и H_{km} — идеал, то $P_{km}(H_{km}) \supset H \cap P_{km}(K)$.*

Доказательство. Последнее утверждение леммы вытекает почти непосредственно из леммы 1.2. Докажем первое утверждение.

Известно (см., например, [10]), что произвольную матрицу $\alpha \in R_n(K, J)$ можно представить, причем единственным способом, в виде $\alpha = \beta \circ \delta \circ \gamma$, где $\beta \in \sum_{i>j} Ke_{ij}$, $\delta \in \sum_{i=1}^{n} Je_{ii}$ и $\gamma \in \sum_{i<j} Je_{ij}$. Установим соответствующее разложение для коммутатора $[xe_{km}, ye_{mk}]$. Согласно его определению имеем

$$[xe_{km}, ye_{mk}] = (x^2y^2 + xy)e_{kk} - xye_{mm} + x^2ye_{km} - xy^2e_{mk}, \quad x \in K,\ y \in J.$$

Легко проверяется равенство

$$[xe_{km}, ye_{mk}] = xt'e_{km} \circ te_{mm} \circ t'e_{kk} \circ (-yt')e_{mk}, \quad t = -xy. \tag{12}$$

Используя (12), получаем

$$H \supset [e_{vu}, Fe_{uv}] = \{t'e_{vu} \circ te_{uu} \circ t'e_{vv} \circ tt'e_{uv} \mid t = -y \in F\}, \quad k \leq u < v \leq m.$$

Учитывая, что $H \supset [Fe_{km}, e_{mv}] = Fe_{kv}$ при всех $v < m$, $v \neq k$ и $H \supset [e_{uk}, Fe_{km}] = Fe_{um}$ при всех $u < k$, $u \neq m$, имеем $H \supset \{t'e_{vu} \circ te_{uu} \circ t'e_{vv} \mid t \in F\}$ и $H \ni [xe_{vu}, t'e_{vu} \circ te_{uu} \circ t'e_{vv}] = (t \circ t)e_{vu} = Kt(2+t)e_{vu}$, $t \in F$. Так как $F \subset J$ при $k < m$, то $H \supset Fe_{vu}$. Отсюда $H \supset \{te_{uu} \circ t'e_{vv} \mid t \in F\}$. Кроме того, $H \supset Fe_{uv}$ для всех $(u, v) \succ (k, m)$, $u \neq v$, и поэтому $H \supset P_{km}(F)$. Лемма доказана.

Вычислим коммутатор произвольной матрицы $\alpha = \|a_{st}\| \in R$ с элементарной матрицей $xe_{km} \in R$. Полагая $\alpha' = \|a^*_{st}\|$, прямыми вычислениями находим

$$\begin{aligned}[xe_{km}, \alpha] &= x \sum_{u \neq k} \sum_{v \neq m} a^*_{uk} a_{mv} e_{uv} + x(1 + a_{mm}) \sum_{u \neq k} a^*_{uk} e_{um} \\ &+ x\big(1 + a^*_{kk} - xa^*_{mk}\big) \sum_{v \neq m} a_{mv} e_{kv} + x\big(a_{mm} \circ a^*_{kk} - xa^*_{mk}(1 + a_{mm})\big)e_{km};\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}[xe_{kk}, \alpha] = x \sum_{u \neq k} \sum_{v \neq k} a^*_{uk} a_{kv} e_{uv} + x(1 + a_{kk}) \sum_{u \neq k} a^*_{uk} e_{uk} \\ - x'(1 + a^*_{kk}) \sum_{v \neq k} a_{kv} e_{kv} + x'\big(a^*_{kk} \circ a_{kk}\big)e_{kk}.\end{aligned} \tag{14}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\alpha = \|a_{st}\| \in H$ и $xe_{km} \in R$, $k \neq m$. Если $\beta = [xe_{km}, \alpha] = \|b_{st}\|$, то в H существует матрица $\bar{\beta} = \|\bar{b}_{st}\|$ с такими же, как у β, недиагональными элементами m-го столбца и нулями в остальных столбцах, быть может, исключая их элементы в k-й и m-й строках. А именно, полагая $\lambda_i = a_{mi}(1 + a_{mm})^{-1}$ при $1 \leq i \leq n$, $i \neq m$, матрицу $\bar{\beta}$ можно задать по правилу*

$$\bar{b}_{st} = \begin{cases} b_{st}, & s \neq m,\ t = m, \\ -x^2 a^*_{mk} a_{mk} - \lambda_k x, & (s,t) = (m,m), \\ \lambda_t x, & s = k,\ t \neq m, \\ \lambda_k \lambda_t x, & s = m,\ t \neq m, \\ 0, & s \neq k, m,\ t \neq m. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\beta = [xe_{km}, \alpha]$ и λ_t выбраны, как в лемме 3.2. Зафиксируем $t \neq m$ и рассмотрим сопряженную с β матрицу

$$\gamma = (\lambda_t e_{mt}) \circ \beta \circ (-\lambda_t e_{mt}) = \beta - e + \lambda_t \sum_{v \neq t} b_{kv} e_{sv} - \lambda_t \sum_{u \neq t} b_{um} e_{ut} - \lambda_t^2 b_{tm} e_{mt}.$$

Она отличается от β самое большее элементами m-й строки и t-го столбца, причем

$$\pi_{mt}(\gamma) = b_{mt} - \lambda_t (b_{tt} - b_{mm}) - \lambda_t^2 b_{tm}, \quad \pi_{mv}(\gamma) = b_{mv} + \lambda_t b_{tv} \quad (v \neq t).$$

В силу выбора λ_t и (12) все элементы t-го столбца матрицы γ нулевые, исключая, быть может, k-й и m-й. Оставшиеся его элементы также восстанавливаются явно, причем $\pi_{kt}(\gamma) = b_{kt} - \lambda_t b_{km} = \lambda_t x$.

К построенной сопряженной матрице будем применять повторно аналогичные сопряжения элементарными матрицами, меняя t. Более точно, построим матрицы $\beta = \beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n)}$ рекуррентно по правилу

$$\beta^{(i)} = \begin{cases} \lambda_i e_{mi} \circ \beta^{(i-1)} \circ (-\lambda_i e_{mi}), & 1 \leq i \leq n, \ i \notin \{k, m\}, \\ \beta^{(i-1)}, & i \in \{k, m\}. \end{cases}$$

Ясно, что матрица $\beta^{(n)}$ может иметь ненулевые элементы лишь в строках и столбцах с номерами k или m; как показано выше, все эти элементы восстанавливаются явно. Несложно убедиться, что матрица $\bar{\beta} = \lambda_k e_{mk} \circ \beta^{(n)} \circ (-\lambda_k e_{mk})$ удовлетворяет всем требованиям леммы 3.2. Лемма доказана.

С использованием аналога (13) для коммутатора $[\alpha, xe_{km}]$ аналогично доказывается

Лемма 3.3. *Пусть $\alpha = \|a_{st}\| \in H$ и $xe_{km} \in R$, $k \neq m$. Если $\beta = [\alpha, xe_{km}] = \|b_{st}\|$, то в H существует матрица $\bar{\beta} = \|\bar{b}_{st}\| \in H$ с такими же, как у β, недиагональными элементами k-й строки и нулями в остальных строках, быть может, исключая их элементы в k-м и m-м столбцах. Более точно, если $\lambda_i = -a_{ik}^* \big(1 + a_{kk}^*\big)^{-1}$, $1 \leq i \leq n$, $i \neq k$, то матрицу $\bar{\beta}$ можно задать по правилу*

$$\bar{b}_{st} = \begin{cases} b_{st}, & s = k, \ t \neq k, \\ -x^2 a_{mk}^* a_{mk} - \lambda_m x, & (s,t) = (k,k), \\ \lambda_s x, & s \neq k, \ t = m, \\ -\lambda_m \lambda_s x, & s \neq k, \ t = k, \\ 0, & s \neq k, \ t \neq k, m. \end{cases}$$

Лемма 3.4. *Пусть $\alpha = \|a_{st}\| \in H$, $v \neq m$ и $u \neq k$. Тогда*
(a) *если $k > m$, то $Ka_{mv} \subset H_{kv}$ и $Ka_{uk} \subset H_{um}$;*
(б) *$Ja_{mv} \subset H_{kv}$ и $Ja_{uk} \subset H_{um}$.*

Доказательство. При всех $x \in K$ из (13) получаем включения $xa_{uk}^*(1 + a_{mm}) \in H_{um}$ $(u \neq k)$ и $x\big(1 + a_{kk}^* - xa_{mk}^*\big)a_{mv} \in H_{kv}$ $(v \neq m)$. Учитывая обратимость элементов $1 + a_{mm}$ и $1 + a_{kk}^* - xa_{mk}^*$, получаем требуемые в (a) включения.

Случай (б) рассматривается аналогично при $k \neq m$, а при $k = m$ достаточно заметить, что в силу (14)

$$J\big(1 + a_{kk}^*\big)a_{kv} = Ja_{kv} \subset H_{kv} \ (v \neq k), \quad J(1 + a_{kk})a_{uk}^* = Ja_{uk} \subset H_{uk} \ (u \neq k).$$

Остается воспользоваться произволом α в H. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть $(k,m) \prec (u,v)$ и $k \neq m$. Если $2I = I$ для любого идеала $I \subset J$ кольца K, то H_{uv} содержит идеал, порожденный проекцией H_{km} в K.*

Доказательство. Вначале докажем включение $Ka_{km} \subset H_{uv}$ для произвольной матрицы $\alpha = \|a_{st}\| \in H$. В силу леммы 3.4 (a) достаточно рассмотреть случай, когда $m = k+1$ и $(u,v) = (k+1,k)$. Пусть $x \in K$ и $\beta = [\alpha, xe_{k+1,k}]$. Тогда H содержит матрицу $\bar{\beta}$, коэффициенты которой определяются по лемме 3.2. Следовательно, H содержит матрицу $[e_{k+1,k}, \bar{\beta}]$ с $(k+1,k)$-проекцией $x\lambda_k(2+d)$, где $\lambda_k = -a^*_{k,k+1}\bigl(a^*_{k+1,k+1}+1\bigr)^{-1}$ и $d = \lambda_k + x\lambda_k + x\lambda_k^2$. По условию $2Ka_{k,k+1} = Ka_{k,k+1}$ и, в частности, существует элемент $c \in Ka^*_{k,k+1}$ такой, что

$$d = 2c, \quad K\lambda_k(2+d) = 2K\lambda_k(1+c) = 2K\lambda_k = K\lambda_k = Ka^*_{k,k+1}.$$

Учитывая произвол в выборе $\alpha \in H$, получаем включение $Ka_{k,k+1} \subset H_{k+1,k}$ и, следовательно, включение $Ka_{km} \subset H_{uv}$ доказано.

Если $v < m$, то $H \supset [Ke_{mv}, \alpha']$ и в силу равенств $\pi_{kv}[Ke_{mv}, \alpha'] = Ka_{km}(1 + a^*_{vv}) = Ka_{km}$ должны иметь $\pi_{kv}([Ke_{mv}, \alpha']) = Ka_{km}$. Отсюда для любого конечного семейства матриц $\alpha_i = \bigl\|a^{(i)}_{st}\bigr\| \in H$ прямыми вычислениями находим

$$\pi_{kv}([Ke_{mv}, \alpha'_1] \circ \cdots \circ [Ke_{mv}, \alpha'_s]) = Ka^{(1)}_{km} + \cdots + Ka^{(s)}_{km}.$$

Поэтому проекция H_{kv} содержит идеал, порожденный H_{km} в K. Аналогично $KH_{km} \subset H_{um}$, $u > k$. Комбинируя полученные включения, получаем утверждение леммы для всех $(k,m) \prec (u,v)$, исключая случай, когда $m = k+1$ и $(u,v) = (k+1,k)$. То же самое включение в исключительном случае получаем, используя дополнительно соотношения $\pi_{k+1,k}([e_{k+1,k}, [Ke_{k+1,k}, \alpha']]) = Ka_{k,k+1}$. Лемма доказана.

Как следствие должны иметь $KH_{uv} \subset H_{n1}$ для всех $(u,v) \neq (n,1)$, $u \neq v$. Доказанная лемма показывает, что определение множеств $\mathscr{L}(H)$ и $\mathscr{L}'(H)$ после леммы 2.1 в § 2 дословно переносится и на случай нормальной подгруппы H присоединенной группы. Когда J — сильно максимальный идеал, легко переносится и лемма 2.2 вместе с доказательством. С учетом леммы 3.5 получается

Лемма 3.6. *Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(H)$, $\mathscr{L}' = \mathscr{L}'(H)$ и $T = H_{n1}$. Тогда $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ — множество углов степени n, и если $\mathscr{L}(H) \neq \{(n,1)\}$, то T — идеал кольца K. Если J — сильно максимальный идеал кольца K, то при $(k,m) \notin \mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$, $k \neq m$, имеем либо $(k,m) \succ \mathscr{L}$ и $H_{km} = T$, либо $(k,m) \succ \mathscr{L}'$, $(k,m) \not\succ \mathscr{L}$ и $H_{km} = JT$, либо $(k,m) \not\succ \mathscr{L}'$ и $H_{km} = J^2T$.*

Лемма 3.7. *Пусть F — идеал кольца K, $\alpha = \|a_{st}\| \in H$ и $H \supset P_{km}(F)$, $k \neq m$. Тогда найдется матрица $\beta = \|b_{st}\| \in H$ такая, что $\det(\beta + e) = \det(\alpha + e)$ и*

(а) *$b_{uv} = a_{uv}$ при $u < k$, и $b_{uv} = a_{uv} \mod JF$ при $u \geq k$, $v > m$;*

(б) *если $(u,v) \succeq (k,m)$ и $a_{uv} \notin F$, то $b_{uv} = a_{uv} \mod JF$;*

(в) *если $(u,v) \succeq (k,m)$ и $a_{uv} \in F$, то $b_{uv} = 0 \mod JF$, исключая, быть может, фиксированную (произвольно) позицию (t,t) с условием $k \leq t \leq m$.*

Доказательство. Покажем, что требуемую матрицу β можно найти, умножая матрицу $\alpha \in H$ на элементарные матрицы из $P_{km}(F)$. Вначале преобразуем в α коэффициенты a_{uv} при $(u,v) \succeq (k,m)$, $u \neq v$. Произведение $xe_{uv} \circ \alpha = xe_{uv} + \alpha + x\sum_j a_{vj}e_{uj}$ имеет (u,v)-проекцию $x(1+a_{vv}) + a_{uv}$. Поэтому при $a_{uv} \in F$ существует $x \in F$, при котором произведение лежит в H, а его (u,v)-проекция равна нулю. Ясно, что определитель матрицы $\alpha + e$ не изменился. Элементы матрицы α, расположенные выше u-й строки, не изменились, а расположенные правее v-го столбца, не изменились по модулю JF. Аналогично умножаем α на элементарные матрицы xe_{uv} при $a_{uv} \in F$ и $u \geq k$ последовательно для $v = m, m-1, \dots, 1$. Получаем матрицу, у которой все элементы удовлетворяют условиям леммы, исключая, быть может, элементы на позициях (t,t), $k \leq t \leq m$.

Зафиксируем указанное t при $k < m$, и пусть $a_{vv} \in F$, $k \leq v \leq m$, $v \neq t$. Положим $x = a'_{vv}$. Тогда матрица

$$H \ni x'e_{tt} \circ xe_{vv} \circ \alpha = x'e_{tt} + xe_{vv} + \alpha + x'\sum_j a_{tj}e_{tj} + x\sum_j a_{vj}e_{vj}$$

лежит в H. По модулю JF она совпадает с $x'e_{tt} + xe_{vv} + \alpha$, а ее (v,v)-проекция равна нулю. Кроме того, проведенное преобразование не изменяет элементов выше k-й строки. В силу произвола в выборе v лемма доказана.

Лемма 3.8. *Если J — нильпотентный идеал, то $H \supset P_{1n}(J^2T)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in H$, $x, y \in J$. Тогда $H \ni [xe_{1n}, \alpha] = \beta$. Выберем в H матрицу $\bar\beta$, как указано в лемме 3.2, в частности, $\pi_{un}(\bar\beta) = \pi_{un}(\beta)$ при $u \neq n$. Коммутатор $\gamma = \|c_{st}\| = [ye_{1n}, \bar\beta']$, а при $n > 2$ также коммутаторы

$$[e_{n,n-1}, \gamma'] = c_{nn}e_{n,n-1} \circ c_{1n}e_{1,n-1}, \quad [c_{nn}e_{n,n-1} \circ c_{1n}e_{1,n-1}, e_{n1}] = c_{1n}e_{n,n-1}$$

лежат в H, причем $c_{nn} \in J^2T$. Как и в доказательстве леммы 3.5, $(1,n)$-проекции коммутаторов $[ye_{1n}, \bar\beta']$ $(n \geq 2)$ для всевозможных $y \in J$ и $\alpha \in H$ пробегают весь идеал J^2T. Поэтому $H \supset J^2Te_{n,n-1}$ и, следовательно, $H \supset J^2Te_{1,n-1}$. Аналогично $H \supset J^2Te_{2n}$ и по лемме 3.1 $H \supset Q_{1n}(J^2T)$. Применяя к матрице γ лемму 3.7 и учитывая равенство $\det(\gamma+e) = 1$, получаем $H \supset J^2Te_{1n}$. Таким образом, включение $H \supset P_{1n}(J^2T)$ при $n > 2$ доказано.

Пусть $n = 2$. Поскольку утверждение леммы тривиально при $J^2 = 0$, будем предполагать, что ступень нильпотентности m идеала J больше 2. Как отмечалось выше, $(1,2)$-проекция множества $M = \{[ye_{12}, \bar\beta'] \mid y \in J,\ \alpha \in H\}$ совпадает с J^2T. Нетрудно убедиться, что его диагональные проекции также лежат в J^2T, а $(2,1)$-проекция — в J^3T. С помощью соотношения (14) исследуем следующий коммутатор веса $s+1 \geq 1$: $[[\dots[[M, Je_{11}], Je_{11}]\dots], Je_{11}] = M_s$. Его $(1,2)$-проекция равна $J^{s+2}T$, а диагональные проекции и $(2,1)$-проекция лежат соответственно в $J^{s+2}T$ и в $J^{s+3}T$. Кроме того, $M_{m-3} = J^{m-1}Te_{12}$, и, следовательно, $H \supset P_{12}(J^{m-1}T)$. Допустим, что включение $H \supset P_{12}(J^tT)$ уже доказано для некоторого t, $2 < t \leq m$. Взаимный коммутант $[Ke_{21}, M_{t-3}]$ по модулю $P_{12}(J^tT)$ совпадает с множеством $\{xe_{11} + x'e_{22} | x \in J^{t-1}T\}$, и поэтому последнее лежит в H. Отсюда и из приведенного выше описания M_{t-3} легко следует включение $H \supset J^{t-1}Te_{12}$ и, как следствие, $H \supset P_{1n}(J^{t-1}T)$. Индукция по $m - t$ завершает доказательство леммы.

Далее предполагаем, что J — нильпотентный сильно максимальный идеал, причем $2I = I$ для любого идеала $I \subset J$ кольца K.

Лемма 3.9. *Пусть $M \subset H \cap (P_{km}(JT) + P_{1n}(J^2T))$ и $M_{km} = JT$ для фиксированной позиции (k,m), $k \neq m$, причем $\det(\alpha + e) = 1$ для всех $\alpha \in M$. Тогда $H \supset P_{km}(JT)$.*

Доказательство. По лемме 3.8 $H \supset P_{1n}(J^2T)$, так что достаточно рассмотреть случай, когда $M \subset H \cap P_{km}(JT)$ и $M_{km} = JT$. При $k > m$ требуемое в лемме включение вытекает сейчас непосредственно из последнего утверждения леммы 3.1. Если $m = k+1$, то пересечение $H \cap NT_n(K)$ содержит множества

$$[e_{k+1,k}, [Ke_{k+1,k}, M]], \quad [e_{k,k-1}, [Ke_{k+1,k}, M]], \quad [e_{k+2,k+1}, [Ke_{k+1,k}, M]]$$

и по доказанному множества $P_{k+1,k}(JT)$, $P_{k,k-1}(JT)$ и $P_{k+2,k+1}(JT)$ соответственно. Учитывая также соотношение $H \supset [Ke_{k+1,k}, M]$, как и выше, находим $H \supset P_{k,k+1}(JT)$.

Далее проводим индукцию по $m-k$. Выберем для каждой матрицы $\alpha \in M$ матрицу $\beta = \beta_\alpha \in H$ так, как указано в лемме 3.7 при $F = J^2T$. Все (u,v)-проекции множества β_M лежат в JT при $(u,v) \succeq (k,m)$, исключая, быть может, случай $(u,v) = (t,t)$ для фиксированного t, а в остальных случаях они лежат в J^3T. Кроме того, (k,m)-проекция множества β_M равна JT по построению. Далее применяем лемму 3.7 к матрицам из множества β_M при $F = J^3T$, и т. д. В силу нильпотентности идеала J через конечное число шагов найдем множество $M' \subset (P_{km}(JT) \circ J^2Te_{tt}) \cap H$ с условием $M'_{km} = JT$. Ввиду выбора M по лемме 3.7 определители матриц из множеств $e+M$ и $e+M'$ равны 1 и поэтому $M' \subset P_{km}(JT) \cap H$. К множествам $[Ke_{m,m-1}, M]$ $(m > 1)$ и $[Ke_{k+1,k}, M]$ $(k < n)$ применимо индуктивное предположение. Получаем соответственно включения $H \supset P_{k,m-1}(JT)$ и $H \supset P_{k+1,m}(JT)$. Отсюда вытекают включения $H \supset JTe_{km}$ и $H \supset P_{km}(JT)$. Лемма доказана.

Лемма 3.10. *Пусть $M \subset H \cap (P_{km}(T) + P_{1m}(JT) + P_{kn}(JT) + P_{1n}(J^2T))$ и $M_{km} = T$ для фиксированной позиции (k,m), $k \neq m$, причем $\det(\alpha + e) = 1$ для всех $\alpha \in M$. Тогда $H \supset P_{km}(T)$.*

Доказательство. Множество $[Je_{1k}, M]$ лежит в H. При $k > 1$ к нему применима лемма 3.9, и с ее помощью получим $H \supset P_{1m}(JT)$. Аналогично при $m < n$ должны иметь $H \supset P_{kn}(JT)$. Поскольку также по лемме 3.7 $P_{1n}(J^2T) \subset H$, можно предполагать, что $M \subset H \cap P_{km}(T)$ и по-прежнему $M_{km} = T$. Включение $H \supset P_{km}(T)$ при $k > m$ вытекает сейчас из леммы 3.1; при $k < m$ оно доказывается индукцией по $m-k$ по аналогии с доказательством предыдущей леммы. Лемма доказана.

Следующие леммы 3.11–3.18 переносят на наш случай леммы 2.3 и 2.4 о включении в H определенных множеств.

Лемма 3.11. *Если $(i,j) \in L(H)$, то $H \supset Q_{i+1,j-1}(T)$ при $2 \leq j < i \leq n-1$ и $H \supset P_{i+1,j-1}(T)$ при $i < j$.*

Доказательство. Поскольку $H \supset [e_{i+2,i+1}, [e_{i+1,i}, [Ke_{j,j-1}, H]]]$ и $H \supset [e_{j-1,j-2}, [e_{i+1,i}, [Ke_{j,j-1}, H]]]$, из лемм 3.7–3.10 вытекает первое включение, а также второе включение при $j = i+2$. Случаи $j = i+1$ и $i < j-2$ рассматриваются аналогично с использованием соотношения $H \supset [e_{i+1,i}, [Ke_{i+1,i}, H]]$ и соответственно $H \supset [e_{i+1,i}, [H, Ke_{j,j-1}]]$. Лемма доказана.

Аналогично лемме 3.11 доказывается

Лемма 3.12. *Если $(k,m) \in \mathscr{L}'(H)$, то $H \supset Q_{k+1,m-1}(JT)$ при $k < m$ и $H \supset P_{k+1,m-1}(JT)$ при $2 \leq m < k \leq n-1$.*

Лемма 3.13. *Пусть $(i,j) \in L(H)$. Тогда H содержит подгруппы $Q_{1,j-1}(JT)$, $Q_{i+1,n}(JT)$ при $1 < j < i < n$ и подгруппы $P_{1,j-1}(JT)$, $P_{i+1,n}(JT)$ при $i < j$.*

Доказательство. При $1 < j < i < n$ по лемме 3.9 в силу включений $H \supset [Ke_{21}, [e_{j,j-1}, [Je_{1i}, H]]]$ и $H \supset [e_{j-1,j-2}, [e_{j,j-1}, [Je_{1i}, H]]]$ имеем $H \supset P_{2,j-1}(JT)$ и $H \supset P_{1,j-2}(JT)$ соответственно. Отсюда $H \supset Q_{1,j-1}(JT)$. Включение $H \supset Q_{i+1,n}(JT)$ получаем аналогично. Утверждение леммы для $i < j$ вытекает непосредственно из леммы 3.11. Лемма доказана.

Очевидно, если $\mathscr{L}(H) = \{(1,n)\}$, то $H \circ D = Q_{1n}(T) \circ (H_{1n}e_{1n}) \circ D$ и по лемме 3.11 $H = Q_{1n}(T) \circ (H \cap (D \circ H_{1n}e_{1n}))$.

Лемма 3.14. *Пусть $(i,j) \in \mathscr{L}(H)$. Тогда*
(а) *$H \supset P_{i,j-2}(T)$ при $j > 2$ и $H \supset P_{i+2,j}(T)$ при $i < n-1$;*
(б) *$H \supset Q_{ij}(T)$ при $j = i+1$;*
(в) *H содержит подгруппы $Q_{i,j-1}(T)$, $Q_{i+1,j}(T)$ при $j = i+2$;*
(г) *H содержит подгруппы $P_{2j}(JT)$, $P_{i,n-1}(JT)$;*
(д) *$H \supset P_{1j}(JT)$ при $i < n$ и $H \supset P_{in}(JT)$ при $j > 1$.*

Доказательство. Утверждение (а) вытекает из лемм 3.11, 3.13 и соотношений $H \supset [e_{j-1,j-2}, [Ke_{j,j-1}, H]]$ и $H \supset [e_{i+2,i+1}, [Ke_{i+1,i}, H]]$. Применяя (а) к соотношению $H \supset [Ke_{i+1,i}, H]$ и те же леммы, получаем утверждение (б). С помощью включений $H \supset [e_{i+1,i}, [Ke_{i+2,i+1}, H]]$ и $H \supset [e_{i+2,i+1}, [Ke_{i+1,i}, H]]$ аналогично доказывается утверждение (в).

Утверждение (г) следует из включений $H \supset [Je_{2i}, H]$, $H \supset [Je_{j,n-1}, H]$ и леммы 3.13. По лемме 3.14 (а) первое и второе включения в (д) выполняются при $i \leq n-2$ или $j \geq 3$ соответственно или когда $i < j$. С другой стороны, используя включение $H \supset [Je_{1n}, [e_{j,j-1}, [Ke_{n,n-1}, H]]]$ при $i = n-1$, находим $H \supset P_{1,j-1}(JT)$. Случай $j = 2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Точно так же доказывается следующая

Лемма 3.15. *Пусть $(k,m) \in \mathscr{L}'(H)$. Тогда*
(а) *$H \supset P_{k,m-2}(JT)$ при $m > 2$ и $H \supset P_{k+2,m}(JT)$ при $k < n-1$;*
(б) *$H \supset Q_{km}(JT)$ при $m = k+1$;*
(в) *H содержит подгруппы $Q_{k,m-1}(JT)$, $Q_{k+1,m}(JT)$ при $m = k+2$.*

Лемма 3.16. *Множество $\{xe_{11} + x'e_{nn} \mid x \in JT\}$ лежит в H.*

Доказательство. Если существует матрица $\|a_{st}\| \in H$ такая, что $a_{11} \circ a^*_{nn} \notin JT$, то $J\big(a_{11} \circ a^*_{nn}\big) + J^2T = JT$ в силу сильной максимальности J. Поэтому, применяя лемму 3.9 к множеству $[Je_{1n}, H]$ с $(1,n)$-проекцией JT, получим $H \supset P_{1n}(JT) \supset \{xe_{11} + x'e_{nn} \mid x \in JT\}$. Допустим, что $a_{11} \circ a^*_{nn} \in JT$ для всякой матрицы $\|a_{st}\| \in H$. Тогда $[Je_{1n}, H] = [Te_{n1}, Je_{1n}]$ по модулю $P_{1n}(J^2T)$ при $\mathscr{L} = \{(n,1)\}$. С другой стороны, нормальная подгруппа H при $\mathscr{L} \neq \{(n,1)\}$ всегда содержит подмножество, у которого $(n,1)$-проекция равна T, а остальные проекции лежат в JT. Поскольку $P_{1n}(J^2T) \circ P_{n1}(JT) \supset H$ в силу лемм 3.7 и 3.14 (г), то во всех случаях получаем включение $H \supset [Te_{n1}, Je_{1n}]$. Принимая сейчас во внимание (12), получаем требуемое в лемме включение. Лемма доказана.

Напомним, что по лемме 3.6 проекция $T = H_{n1}$ при $\mathscr{L}(H) \neq \{(n,1)\}$ — идеал кольца K. Исключительный случай рассматривает

Лемма 3.17. (а) *Если $\mathscr{L}(H) = \{(n,1)\}$, то T есть J-подмодуль кольца K;*
(б) *если $\|a_{st}\| \in H$, то $J\big(a^*_{kk} \circ a_{mm}\big) \subset H_{km}$ для всех $k \neq m$ и $K\big(a^*_{kk} \circ a_{mm}\big) \subset H_{km}$ при $k > m$.*

Доказательство. (а) Пусть $\alpha = \|a_{st}\|$, $\beta = \|b_{st}\| \in H$. Из условия леммы следует, что $H^2 \subset P_{1n}(JT)$, и по лемме 3.14 (г) $H \supset JTe_{n1}$. В частности, $JT \subset T$. Поскольку $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta$, то $(n,1)$-проекции в $\alpha \circ \beta$ и $\alpha + \beta$ различаются на элемент $c_1 \in JT$, в $\alpha \circ \beta \circ (-c_1e_{n1})$ и $\alpha + \beta$ — на элемент $c_2 \in J^2T$, в $\alpha \circ \beta \circ [(-c_1e_{n1}) \circ (-c_2e_{n1})$ и $\alpha + \beta$ — на элемент $c_3 \in J^3T$, и т. д. В силу нильпотентности идеала J через конечное число шагов найдется элемент $\gamma \in JTe_{n1}$ такой, что $(n,1)$-проекция произведения $\alpha \circ \beta \circ \gamma$ равна $a_{n1} + b_{n1}$. Аналогично существует элемент $\gamma \in JTe_{n1}$ такой, что $(n,1)$-проекция произведения $\alpha' \circ \gamma$ равна $-a_{n1}$. Это доказывает аддитивность T.

Обозначим через H_0 подгруппу присоединенной группы, порожденную множествами из H, перечисленными в леммах 3.8, 3.11–3.16. Тогда утверждение (б) следует из соотношений (13) и включения $H \supset H_0$. Лемма доказана.

В соответствии с введенными в начале параграфа обозначениями будем рассматривать множества (а)–(г) из леммы 2.4 как подгруппы присоединенной группы; подгруппа H_0 из доказательства предыдущей леммы используется вместо множества (5). Кроме того, сопоставим с каждой матрицей $\|a_{st}\| \in R$ следующие множества:

$$P_{ij}(T),\ P_{1j}(JT),\ P_{in}(JT) \quad \text{при } i > j,\ a_{ii} \circ a_{jj}^* \notin JT; \tag{15}$$

$$P_{ij}(JT), \quad \text{если } J(a_{ii} \circ a_{jj}^*) \not\subset J^2T \quad \text{или } i > j,\ a_{ii} \circ a_{jj}^* \notin J^2T; \tag{16}$$

$$\left.\begin{array}{r} K(a_{ij}e_{i,j-1} + a_{j-1,i+1}^*e_{j,i+1} + a_{i+1,j}e_{i+1,j-1} + a_{j-1,i}^*e_{ji}), \\ K(a_{ij}e_{i+1,j} + a_{j-1,i+1}^*e_{j-1,i} + a_{i,j-1}e_{i+1,j-1} + a_{j,i+1}^*e_{ji}), \\ K(a_{ij}e_{i+1,j-1} + a_{j-1,i+1}e_{ji}) \quad ((i,j) \in \mathscr{L},\ (j-1,i+1) \in \mathscr{L}'); \end{array}\right\} \tag{17}$$

$$K(a_{ij}e_{i,j-1} + a_{j-1,m}^*e_{jm}) \quad ((i,j),(j-1,m) \in \mathscr{L} \cup \mathscr{L}',\ m \neq i+1,\ (i,m) \neq (n,1)); \tag{18}$$

$$\left.\begin{array}{l} K(a_{nj}e_{n,j-1} + a_{j-1,1}^*e_{j1} + a_{1j}e_{1,j-1} + a_{j-1,n}^*e_{jn}), \\ J(a_{nj}e_{1j} + a_{j-1,1}^*e_{j-1,n} + a_{n,j-1}e_{1,j-1} + a_{j1}^*e_{jn}), \\ J(a_{nj}e_{1,j-1} + a_{j-1,1}e_{jn}) \quad ((n,j),\ (j-1,1) \in \mathscr{L}); \end{array}\right\} \tag{19}$$

$$J(a_{nj}e_{1j} + a_{i1}^*e_{in}) \quad ((n,j),\ (i,1) \in \mathscr{L},\ i \neq j-1). \tag{20}$$

Лемма 3.18. *Нормальная подгруппа H присоединенной группы кольца R содержит подгруппы* (а)–(г) *из леммы* 2.4 *и, кроме того, для любой матрицы $\|a_{st}\| \in H$ множества* (15)–(20).

Доказательство является несложным перенесением доказательства леммы 2.4, и мы его опускаем.

Как и в § 1, определяем множества $\widetilde{\mathscr{L}}$, $\widetilde{\mathscr{L}'}$, а по формулам (3) определены также подгруппы $\widetilde{B}$ и D присоединенной группы кольца R.

Лемма 3.19. *H совпадает с нормальным замыканием пересечения $H \cap (\widetilde{B} + D)$, а как подгруппа присоединенной группы порождается подгруппами* (а)–(г) *из леммы* 2.4, *H_0, $H \cap (\widetilde{B} + D)$ и множествами* (15)–(20) *для всевозможных матриц $\|a_{st}\| \in H$. Кроме того, пересечение $H \cap (\widetilde{B} + D)$ является нормальной T-границей в кольце R.*

Доказательство. Пусть $\beta = \|b_{st}\| \in H$. Все недиагональные проекции H_{uv} и, следовательно, b_{uv} $(u \neq v)$, лежат в T, JT или J^2T в соответствии с их описанием в лемме 3.6. По аналогии с доказательством леммы 2.5 будем аннулировать недиагональные элементы на позициях $(u,v) \notin \widetilde{\mathscr{L}} \cup \widetilde{\mathscr{L}'}$. Вначале рассмотрим позиции (u,v), перечисленные в пп. (а)–(в) доказательства леммы 2.5. Умножением (присоединенным) β на подходящую матрицу из множеств (17)–(20) аннулируем по модулю J^2T коэффициенты b_{uv} для всевозможных позиций (u,v) из пп. (а), (в) и для позиций $(u,v) \not\in \mathscr{L}$ из п. (б). Используя также множества (18) и первое множество из (19), аннулируем по модулю JT коэффициенты b_{uv} для оставшихся позиций (u,v) из п. (б).

Очевидно, найденные условия для перечисленных позиций не изменяются, если использовать умножения слева на элементарные матрицы из множеств (а)–(г) леммы 2.4 в H и из H_0: $-b_{uv}e_{uv} \circ \beta = -b_{uv}e_{uv} + \beta - b_{uv} \sum\limits_j b_{vj}e_{uj}$. С другой стороны, такие умножения позволяют аннулировать по модулю JT недиагональные коэффициенты на позициях $(u,v) \notin \widetilde{\mathscr{L}} \cup \widetilde{\mathscr{L}'}$, $(u,v) \succ \mathscr{L}$; умножения проводим последовательно: вначале для позиций из j_r-го столбца, затем (j_r-1)-го, …, 1-го столбцов, см. (1) и $(*)$.

Отметим, что после указанных преобразований β ее диагональные коэффициенты на позициях (u,u) не изменяются по модулю JT при $u \geq i_1$ (в обозначениях (1)) и не изменяются по модулю J^2T при $u < i_1$.

Будем аналогично аннулировать недиагональные элементы на позициях $(u,v) \notin \widetilde{\mathscr{L}} \cup \widetilde{\mathscr{L}'}$ по модулю J^2T. При этом используем умножения слева только на элементарные матрицы $-a_{uv}e_{uv}$ из множеств (б)–(г) леммы 2.4 в H и из H_0, причем рассматриваем последовательно случаи $v = n, n-1, \dots, 1$. Кроме того, если в v-м столбце встречается угол (k,v) из $\mathscr{L}$, то добавку из JT к коэффициенту a_{kv}, возможную на предыдущем этапе, аннулируем по модулю J^2T, пользуясь включением $H \supset P_{kv}(JT)$ из леммы 3.14 (г), (д). Заметим также, что диагональные коэффициенты матрицы, полученной на предыдущем этапе, не изменились по модулю J^2T.

Включение $P_{1n}(J^2T) \subset H$ позволяет далее аналогично аннулировать недиагональные элементы на позициях $(u,v) \notin \widetilde{\mathscr{L}} \cup \widetilde{\mathscr{L}'}$ по модулю J^3T, и т. д. В силу нильпотентности идеала J матрица β через конечное число шагов преобразуется к матрице $\gamma \in H \cap (\widetilde{B} + D)$. Коэффициенты матрицы β на позициях $(u,v) \in \mathscr{L} \cup \mathscr{L}'$ остаются без изменений, а ее диагональные коэффициенты b_{uu} не изменяются по модулю JT при $u \geq i_1$ и не изменяются по модулю J^2T при $u < i_1$.

Таким образом, множества (15)–(20) для всевозможных матриц $\|a_{st}\| \in H$ и подгруппы (а)–(г) из леммы 2.4, H_0 и $H \cap (\widetilde{B} + D)$ порождают произвольную матрицу β из H, а следовательно, порождают H как подгруппу присоединенной группы.

Как и в доказательстве леммы 2.6, множество $A = H \cap (\widetilde{B} + D)$ удовлетворяет условиям (Г1)–(Г3). Множества (17)–(20) для всевозможных $\|a_{st}\| \in H$, кроме последних множеств в (17) и (19), и подгруппы H_0, (а)–(г) из леммы 2.4 полностью определяются множеством углов $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$, и по построению все они лежат в нормальном замыкании множества A. Последнее включение выполняется и для исключительных множеств в (17) и (19); это несложно устанавливается перенесением соответствующего доказательства леммы 2.6.

Допустим, что для матрицы β имеем $b_{uu} \circ b^*_{vv} \notin J^kT$; в этом случае будем говорить, что β удовлетворяет $((u,v),\ J^kT)$-условию. Рассмотрим случай, когда $k=1$ и, следовательно, множества $P_{ij}(T)$, $P_{1j}(JT)$ и $P_{in}(JT)$ из (15) по лемме 3.18 лежат в H. Используем отмеченное выше свойство диагональных элементов матрицы β при ее преобразовании к матрице γ из A. Нетрудно убедиться, что либо γ также удовлетворяет $((u,v), JT)$-условию, либо указанные множества входят уже в подгруппу H_0 из H в силу описания H_0. Исследуя аналогично $((u,v), J^2T)$-условие матриц из H, устанавливаем включение множеств (15) и (16) в нормальное замыкание множества A; это завершает доказательство равенства H и нормального замыкания множества A в присоединенной группе. Вместе с тем получаем справедливость свойств (Г4$'$) и (Г5$'$) для A.

Сейчас очевидно, что если $A \subset A_1 \subset \widetilde{B} + D$ и нормальное замыкание множества A_1 совпадает с H, то $A_1 \subset H \cap (\widetilde{B} + D) = A$ и $A_1 = A$. Поэтому условие (Г6$'$) для A также выполняется и A является нормальной T-границей. Лемма доказана.

В доказательстве леммы 3.19 установлена также

Лемма 3.20. *Пусть* $A = A(T; \mathscr{L}, \mathscr{L}')$ *— произвольная нормальная* T*-граница кольца* R. *Тогда минимальная нормальная подгруппа присоединенной группы* R, *содержащая* A, *порождается как присоединенная группа множествами* A, H_0, (а)–(г) *из леммы* 3.17 *и еще множествами* (15)–(20) *для всевозможных матриц* $\|a_{st}\| \in A$.

Теорема 3 легко следует из лемм 3.6 и 3.19.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левчук В. М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 5. С. 558–578.
2. *Левчук В. М.* Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы // Мат. заметки. 1987. Т. 42, № 5. С. 631–641.
3. *Levchuk V. M.* Chevalley groups and their unipotent subgroups // Contem. Math. 1992. V. 131, N 1. P. 227–242.
4. *Мартынова Л. А.* Нормальное строение и автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиевых типов. Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1994.
5. *Левчук В. М., Сулейманова Г. С.* Нормальное строение унипотентной подгруппы группы Стейнберга над полем // Вестн. Красноярск. гос. техн. ун-та. 1999. С. 44–48.
6. *Сулейманова Г. С.* Нормальное строение максимальной унипотентной подгруппы унитарной группы над полем // Симметрия и дифференциальные уравнения. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2000. С. 206–209.
7. *Kuzucuoglu F., Levchuk V. M.* Ideals of some matrix rings // Comm. Algebra. 2000. V. 28, N 7. P. 3503–3513.
8. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). 12-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992.
9. *Сулейманова Г. С.* Об идеалах некоторых матричных лиевых колец // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып. 15. С. 89–97.
10. *Левчук В. М.* Коммутаторное строение некоторых подгрупп групп Шевалле // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, № 6. С. 786–795.

Статья поступила 14 сентября 2001 г.

Левчук Владимир Михайлович
Красноярский гос. университет, математический факультет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`levchuk@lan.krasn.ru, levchuk@home.krasnoyarsk.ru`

Сулейманова Галина Сафиуллановна
Красноярский гос. университет, математический факультет,
кафедра алгебры и математической логики.