Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 519.41.47

ГРУППЫ С УСЛОВИЯМИ π–МИНИМАЛЬНОСТИ И π–СЛОЙНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ. II

Н. С. Черников

Аннотация: Для произвольного множества π простых чисел исследуются свойства и строение групп, удовлетворяющих условиям π-минимальности и π-слойной минимальности. В частности, раскрыто строение почти RN-групп (вместе с тем локально разрешимых групп) с этими условиями, а в предположении $2 \in \pi$ — локально ступенчатых (вместе с тем локально конечных групп) с этими условиями. Библиогр. 19.

Работа является непосредственным продолжением работы [1]. Напомним, что группа, в которой множество элементов каждого порядка конечно, называется *слойно конечной* (С. Н. Черников, см., например, [2, с. 43]). Легко видеть, что произвольная черниковская группа почти слойно конечна.

Лемма 7. *Пусть G — квазиполная группа, $L, N \trianglelefteq G$, $L \subseteq N$ и фактор-группа N/L почти слойно конечна. Тогда $N/L \subseteq Z(G/L)$.*

Доказательство. Можно считать, что $L = 1$. Пусть K — произведение всех слойно конечных нормальных делителей подгруппы N. Ясно, что $|N : K| < \infty$ и $K \trianglelefteq G$. Так как, очевидно, подгруппа K является произведением конечного числа из них, то ввиду теоремы С. Н. Черникова (см. [2, с. 140]) она слойно конечна. Для произвольного $g \in K$ имеем $|g^G| < \infty$, а потому $|G : C_G(g)| < \infty$ и, значит, $C_G(g) = G$ т. е. $g \in Z(G)$. Вместе с тем $K \subseteq Z(G)$. С учетом того, что K периодическая абелева и $|N : K| < \infty$, ввиду леммы О. Ю. Шмидта N локально конечна и, следовательно, для некоторой конечной подгруппы $D \subseteq N$ будет $N = DK$. Очевидно, $D \trianglelefteq N$. Поэтому $D \subseteq K$ и тем самым $N = K$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть группа G обладает подгруппами $G_1, \dots, G_m$ конечного индекса такими, что в каждой из них все π-элементы порождают черниковскую подгруппу, и каждый примарный π-элемент группы G принадлежит одной из них. Тогда все π-элементы группы G порождают черниковскую подгруппу.*

Доказательство. Зафиксируем какое-нибудь $i \le m$. Пусть H_i — подгруппа, порожденная всеми π-элементами G_i. Возьмем в G_i какую-нибудь $N \trianglelefteq G$ с $|G : N| < \infty$. Так как, очевидно, $|G : N_G(H_i \cap N)| < \infty$ и $(H_i \cap N)^g \trianglelefteq N$ для любого $g \in G$, то $\langle (H_i \cap N)^G \rangle$ — произведение конечного числа черниковских нормальных делителей подгруппы N и потому является черниковской подгруппой. Пусть $K = G/\langle (H_i \cap N)^G \rangle$ и $L = H_i \langle (H_i \cap N)^G \rangle / \langle (H_i \cap N)^G \rangle$. Поскольку $|L| < \infty$ и $|K : N_K(L)| < \infty$, ввиду леммы Дицмана $|\langle L^K \rangle| < \infty$. Поэтому

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00488).

$\left|\left\langle H_i^G\right\rangle : \langle (H_i \cap N)^G\rangle\right| < \infty$. Следовательно, $\left\langle H_i^G\right\rangle$ черниковская, и подгруппа $\left\langle H_1^G\right\rangle \ldots \left\langle H_m^G\right\rangle$, содержащая все π-элементы группы G, тоже черниковская. Лемма доказана.

Напомним, что *абсолютно простой* называется группа $G \neq 1$, у которой $\{1, G\}$ — единственная нормальная система. Абсолютно простая группа является простой.

Предложение 9. *Пусть G — нечерниковская группа, порождаемая своими π-элементами, такая, что в каждой ее собственной подгруппе с конечным или счетным множеством образующих все π-элементы порождают черниковскую подгруппу. Тогда группа G счетна, удовлетворяет условию π-min и обладает подгруппой $H \triangleleft G$ и черниковской подгруппой $K \subseteq H$, $K \triangleleft G$, такими, что:*

1) K порождается своими π-элементами, и $\pi \cap \pi(H/K) = \varnothing$;

2) если группа G квазиполная, то фактор-группа G/H бесконечна и абсолютно проста;

3) если G неквазиполная, то $H = J(G)$, подгруппа H является квазиполной, $G = H\langle g\rangle$ для некоторого p-элемента $g \in G\setminus 1$ с $p \in \pi$ и инвариантная подгруппа $L = K\langle (g^p)^G\rangle$ черниковская;

4) если группа G не локально конечна, то она конечнопорожденная и, более того, для любого ее π-элемента a, лежащего вне K и вне L, соответственно когда G квазиполная и неквазиполная, найдется конечное множество X элементов такое, что $G = \langle a^X\rangle$.

Доказательство. 1°. Покажем, что G удовлетворяет условию π-min. Пусть F — произвольная счетная подгруппа группы G и T — произвольная собственная подгруппа группы F. Тогда все π-элементы T порождают черниковскую подгруппу и, значит, в силу леммы 1 T удовлетворяет условию π-min. Поэтому F удовлетворяет этому условию ввиду произвольности T. Следовательно, с учетом произвольности F и ввиду леммы 1 G удовлетворяет π-min.

2°. Покажем, что G счетна. В самом деле, пусть это не так, и F — произвольная счетная подгруппа группы G. Легко убедиться в том, что F вкладывается в счетную подгруппу T, которая порождается π-элементами. Так как $T \neq G$, то T, а вместе с ней и F, черниковские. В частности, T обладает квазициклической подгруппой. Пусть D — подгруппа, порожденная всеми квазициклическими подгруппами группы G. Любые две квазициклические подгруппы порождают счетную, а потому черниковскую, подгруппу. Следовательно, они поэлементно перестановочны. Таким образом, D полная абелева. Пусть R/D — произвольная счетная подгруппа группы G/D. Тогда R счетная и, значит, черниковская. Но в таком случае, поскольку R/D бесконечна, R обладает квазициклической подгруппой, не лежащей в D. Противоречие.

3°. Пусть G квазиполная и $\mathscr{M}$ — какая-нибудь ее композиционная система. Покажем, что G имеет в $\mathscr{M}$ предшествующий член. Его возьмем в качестве H, а в качестве K — подгруппу, порожденную всеми π-элементами H.

Допустим, что у группы G в системе $\mathscr{M}$ предшествующего члена нет. Зафиксируем π-элемент $g \in G \setminus Z(G)$. Ввиду леммы 7 $\langle g^G\rangle$ нечерниковская. Следовательно, $\langle g^G\rangle = G$. Далее, для произвольного конечного множества $X \subseteq G$ найдется $M \in \mathscr{M} \setminus \{G\}$, $M \supseteq g^X$. Поэтому $\langle g^X\rangle$ черниковская и, значит, конечная. В силу произвольности X G локально конечна. Возьмем любую подгруппу $M \in \mathscr{M}$, $M \neq G$, содержащую g. Поскольку $\langle g^M\rangle$ удовлетворяет условию минимальности, то в ней найдется системная подгруппа R такая, что $\langle R^G\rangle = G$ и для произвольной $T \lhd R$ справедливо соотношение $\langle T^G\rangle \neq G$.

Так как G локально конечна, то ввиду теоремы А и леммы 3 из [3] нормальное замыкание в $G/\langle (O^{\pi'}(R))^G\rangle$ подгруппы $R\langle (O^{\pi'}(R))^G\rangle/\langle (O^{\pi'}(R))^G\rangle$ есть π'-группа. Но оно совпадает с $G/\langle (O^{\pi'}(R))^G\rangle$. Следовательно, последняя является π'-группой и, значит, будучи порожденной π-элементами, равна единице. Поэтому $O^{\pi'}(R) = R$, т. е. R порождается π-элементами.

Покажем, что $R \neq J(R)$. В самом деле, пусть $R = J(R)$. Возьмем любой элемент $a \in G$. Тогда a и R содержатся в некоторой подгруппе $M^* \in \mathscr{M}$, $M^* \neq G$. Так как подгруппа $\langle R, R^a\rangle$ группы M^* порождается π-элементами, она является черниковской. Тем самым $[R, R^a] = 1$ ввиду полноты R. Следовательно, G — полная абелева группа в силу произвольности a. Поэтому она разлагается в прямое произведение некоторой совокупности квазициклических подгрупп. Поскольку G нечерниковская, эта совокупность бесконечна. Но произведение подгрупп из любой ее собственной счетной подсовокупности является собственной и, значит, черниковской подгруппой группы G. Противоречие.

Так как $R \neq J(R)$, то R/T — конечная простая группа для некоторой $T \lhd R$. Тогда $R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle$ — конечная простая группа. Так как G локально конечна, ввиду теоремы А и леммы 2 из [3] $R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle$ субнормальна в любой содержащей ее конечной подгруппе группы $G/\langle T^G\rangle$.

Покажем, что группа $R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle$ неабелева. В самом деле, допустим, что $|R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle| = p$ $(\in \pi)$. Тогда ввиду леммы 3 из [3] с учетом соотношения $G = \langle R^G\rangle$ получаем, что $G/\langle T^G\rangle$ — p-группа. Все ее собственные подгруппы, как легко видеть, черниковские. Поэтому вследствие теоремы С. Н. Черникова о черниковости локально конечной p-группы с условием минимальности (см., например, [2, теорема 1.5]) она является черниковской и, значит, будучи квазиполной, абелева. Но в таком случае $G/\langle T^G\rangle = R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle$ и тем самым $1 < |G : \langle T^G\rangle| < \infty$. Противоречие.

Возьмем произвольный $a \in G/\langle T^G\rangle$. Так как подгруппа $R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle$ субнормальна в группе $\langle R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle, a\rangle$ и неабелева, то она либо поэлементно перестановочна с подгруппой $(R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle)^a$, либо совпадает с ней. Следовательно, с учетом соотношения $G = \langle R^G\rangle$ $G/\langle T^G\rangle$ — прямое произведение подгрупп, сопряженных с $R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle$. Но тогда, очевидно, $G/\langle T^G\rangle = R\langle T^G\rangle/\langle T^G\rangle$ и, значит, $1 < |G : \langle T^G\rangle| < \infty$. Последнее невозможно. Полученное противоречие доказывает, что G имеет в $\mathscr{M}$ предшествующий член.

4°. Покажем, что в случае, когда G не является квазиполной, в качестве H и K можно взять соответственно $J(G)$ и подгруппу, порожденную всеми π-элементами $J(G)$, и что L черниковская. Пусть N — произвольный нормальный делитель конечного индекса группы G. Тогда найдутся примарные π-элементы $g_1, \dots, g_n$ группы G такие, что каждый ее примарный π-элемент содержится в $\bigcup\limits_{k=1}^{n} g_k N$. Так как G нечерниковская и порождается своими π-элементами, то в силу леммы 8 $G = \langle g_i\rangle N$ для некоторого g_i. Следовательно, G/N примарная циклическая. Поэтому ввиду произвольности N $G/J(G)$ абелева и каждый ее конечный гомоморфный образ представляет собой примарную циклическую группу. Далее, с учетом того, что $G/J(G)$ абелева и порождается π-элементами, она периодична. Используя эти свойства фактор-группы $G/J(G)$, а также ее финитную аппроксимируемость, легко убеждаемся в том, что она является примарной циклической. Итак, для некоторого p элемента $g \in G \setminus 1$ с $p \in \pi$ будет

$G = \langle g\rangle J(G)$. Поскольку $|G : J(G)| < \infty$, то, очевидно, подгруппа $H = J(G)$ квазиполная. Так как $H\langle g^p\rangle \neq G$, то подгруппа K, порожденная всеми π-элементами H, и подгруппа $L = K\langle (g^p)\rangle^G$ черниковские.

5°. Покажем, что справедливо утверждение 4. Пусть G не локально конечна и для любого конечного множества X ее элементов $\langle a^X\rangle \neq G$; N совпадает с K и L, соответственно когда G квазиполная и когда нет. Поскольку $\langle a^X\rangle$ черниковская, то $\langle a^G\rangle$ локально конечна ввиду произвольности X. Поэтому $\langle a^G\rangle \neq G$. Следовательно, подгруппа $\langle a^G\rangle$ и вместе с тем подгруппа $\langle a^G\rangle N$ черниковские. Так как, очевидно, G/HN проста и $a \notin HN$, то $G = \langle a^G\rangle HN$. Поэтому с учетом соотношений $\pi\cap\pi(H/K) = \varnothing$ и $K \subseteq N$ получим $\pi\cap\pi(G/\langle a^G\rangle N) = \varnothing$. Следовательно, поскольку G порождается π-элементами, то $\langle a^G\rangle N = G$. Противоречие. Предложение доказано.

Для произвольного класса $\mathfrak{X}$ групп ниже через $\overline{\mathfrak{X}}$ будем обозначать класс, состоящий из всех не входящих в $\mathfrak{X}$ групп и единичной группы.

Лемма 9. *Пусть $G \neq 1$ и $\mathfrak{X}$ — некоторые группа с условием π-min и класс групп, не содержащий G. Тогда в G найдется $\overline{\mathfrak{X}}$-подгруппа H, все π-элементы которой порождают группу с собственными $\mathfrak{X}$-подгруппами.*

Доказательство. Пусть $G_1 = G$ и по индукции: если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ определена $\overline{\mathfrak{X}}$-подгруппа G_k и G_k еще нельзя взять в качестве H, то в качестве G_{k+1} возьмем любую собственную $\overline{\mathfrak{X}}$-подгруппу группы, порожденной всеми π-элементами из G_k. Очевидно, $G_k \setminus G_{k+1}$ обладает π-элементом. С учетом этого на каком-то n-м шаге получим подгруппу G_n, которую можно взять в качестве H. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если в группе G с условием π-min π-элементы порождают нечерниковскую подгруппу, то G обладает нечерниковской подгруппой K такой, что:* 1) *K порождается π-элементами;* 2) *в каждой собственной подгруппе группы K все π-элементы порождают черниковскую подгруппу.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, у которых подгруппа, порожденная всеми π-элементами, черниковская. Тогда ввиду леммы 9 G обладает подгруппой H, все π-элементы которой порождают нечерниковскую подгруппу K, удовлетворяющую условию 2. Лемма доказана.

Из предложения 9 и леммы 10 с учетом предложения 1 вытекает

Предложение 10. *Если в периодической группе G с условием π-min π-элементы порождают нечерниковскую подгруппу, то G обладает нечерниковской счетной секцией X/Y с условием π-min, где подгруппа Y черниковская, такой, что:*

1) *X/Y порождается π-элементами, и в каждой ее собственной подгруппе все π-элементы порождают черниковскую подгруппу;*

2) *X/Y либо абсолютно проста и является квазиполной, либо для некоторого $p \in \pi$ представима в виде полупрямого произведения $X/Y = A\lambda\langle b\rangle$ квазиполной π'-подгруппы A и подгруппы $\langle b\rangle$ порядка p.*

Лемма 11. *Пусть π и G — некоторые множество простых чисел и группа, разложимая в полупрямое произведение $G = A\lambda\langle b\rangle$ абелевой π'-подгруппы A и π-подгруппы $\langle b\rangle$; $D = [A, b]$ и K — подгруппа, порожденная всеми π-элементами группы G. Тогда*

1) *$K = D\lambda\langle b\rangle$, и произвольный элемент $d \in D$ представим в виде $d = [a, b]$ с $a \in D$;*

2) *для произвольного гомоморфизма* φ *группы* G *имеем* $C_{D^\varphi}(b^\varphi) = 1$*;*

3) *для любой подгруппы* $N \trianglelefteq K$ *группы* D *имеем* $[N, b] = N$*, и подгруппа* $N\lambda\langle b\rangle$ *порождается своими* π*-элементами.*

Доказательство. Действительно, $[a, b] = (b^{-1})^a b \in K$ для каждого $a \in A$ и потому $D\langle b\rangle \subseteq K$. Так как $\pi(G/D\langle b\rangle) \cap \pi = \varnothing$, то $K \subseteq D\langle b\rangle$. Следовательно, $K = D\lambda\langle b\rangle$. Поскольку $\pi(D\langle b\rangle/[D, b]\langle b\rangle) \cap \pi = \varnothing$, то $K \subseteq [D, b]\langle b\rangle$ и, значит, $K = [D, b]\lambda\langle b\rangle$. Тем самым $D = [D, b]$. Далее, для любых $a, c \in D$

$$[a, b][c, b] = [a, b]^c[c, b] = [ac, b], \quad [a, b]^{-1} = [b, a] = [b, a]^{a^{-1}} = [a^{-1}, b].$$

Поэтому справедливо второе заключение утверждения 1.

Докажем утверждение 2. Пусть $d \in C_{D^\varphi}(b^\varphi)$. Тогда $d = [a, b^\varphi]$ с $a \in D^\varphi$ (см. утверждение 1). Очевидно, $1 = [a, (b^\varphi)^{|b|}] = d^{|b|}$. Следовательно, $d = 1$, поскольку $(|d|, |b|) = 1$.

Докажем утверждение 3. Пусть φ — гомоморфизм G на $G/[N, b]$. Тогда $N^\varphi \subseteq C_{D^\varphi}(b^\varphi)$ и, значит, ввиду утверждения 2 $N^\varphi = 1$. Поэтому $N = [N, b]$ и, очевидно, $N\langle b\rangle = \langle b^a \mid a \in N\rangle$. Лемма доказана.

Предложение 11. *Пусть* G *— группа и* M *— некоторая ее система образующих;* $R \neq \varnothing$ *и* $T \neq \varnothing$ *— не более чем счетные множества элементов группы* G*, первое из которых принадлежит к* $J(G)$*. Тогда в* M *найдется не более чем счетное подмножество* $L \neq \varnothing$ *такое, что* $R \subseteq J(\langle L\rangle)$ *и* $T \subseteq \langle L\rangle$*.*

Доказательство настоящего предложения сводится к случаю, когда $R = T = \{g\}$. Действительно, если для каждого $h \in R$ найдется не более чем счетное $M_h \subseteq M$ такое, что $h \in J(\langle M_h\rangle)$, и M^* — произвольное не более чем счетное подмножество множества M, для которого $T \subseteq \langle M^*\rangle$, то положим $L = \bigcup\limits_{h \in R} M_h \cup M^*$. Очевидно, L не более чем счетно, и для каждого $h \in R$ будет $J(\langle M_h\rangle) \subseteq J(L)$, а потому $R \subseteq J(L)$.

Пусть M_α, $\alpha \in I$, — все конечные подмножества множества M. Если $g \in J(\langle M_\alpha\rangle)$ для некоторого $\alpha \in I$, то доказывать нечего. Пусть $g \notin J(\langle M_\alpha\rangle)$ для каждого α и n_α — минимум индексов $|\langle M_\alpha\rangle : F|$ по всем подгруппам $F \subseteq \langle M_\alpha\rangle$, не содержащим g.

Покажем, что среди n_α есть сколь угодно большие числа. Действительно, пусть это не так; $n = \max(n_\alpha \mid \alpha \in I)$, и для каждого $\alpha \in I$ A_α — множество всех подгрупп $F \subseteq \langle M_\alpha\rangle$ таких, что $|\langle M_\alpha\rangle : F| \leq n$ и $g \notin F$. При $M_\alpha \subseteq M_\beta$ положим $A_\alpha \leq A_\beta$ и обозначим через $\pi_{\beta\alpha}$ отображение A_β в A_α, сопоставляющее каждой $F \in A_\beta$ подгруппу $F \cap \langle M_\alpha\rangle \in A_\alpha$. Так как ввиду теоремы Б. Неймана каждое A_α конечно, то вследствие теоремы о полном проекционном множестве [4, с. 351–353; 5]) найдутся подгруппы $F_\alpha \in A_\alpha$, где α пробегает I, такие, что $F_\alpha = F_\beta \cap \langle M_\alpha\rangle$ при $A_\alpha \leq A_\beta$. Пусть $F = \bigcup\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$. Тогда F — подгруппа группы G и $g \notin F$. Возьмем какой-нибудь $\iota \in I$, для которого индекс $|\langle M_\iota\rangle : F_\iota|$ максимален. Пусть C — какая-нибудь система представителей левых смежных классов $\langle M_\iota\rangle$ по F_ι, β — произвольный индекс из I, для которого $M_\iota \subseteq M_\beta$. Так как $M = \bigcup\limits_\beta M_\beta$, $F = \bigcup\limits_\beta F_\beta$ и, очевидно, $\langle M_\beta\rangle = CF_\beta$, то $G = CF$. Поэтому $|G : F| < \infty$. Но тогда $g \notin J(G)$. Противоречие.

При каждом $k \in \mathbb{N}$ возьмем какое-нибудь множество M_α, для которого $g \in M_\alpha$ и $n_\alpha > k$, и положим $L_k = M_\alpha$, $L = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} L_k$. Пусть N — произвольная подгруппа конечного индекса группы $\langle L\rangle$. Тогда $|\langle L_k\rangle : \langle L_k\rangle \cap N| < n_\alpha$ при

$k \geq |\langle L\rangle : N|$ и потому $g \in \langle L_k\rangle \cap N$. Следовательно, $g \in J(\langle L\rangle)$. Предложение доказано.

Предложение 12. *Пусть G — квазиполная группа, M — некоторая ее система образующих и T — не более чем счетное множество элементов группы G. Тогда M обладает локальной системой $\mathscr{M}$ непустых не более чем счетных подмножеств таких, что для каждого $L \in \mathscr{M}$ подгруппа $\langle L\rangle$ квазиполная и $T \subseteq \langle L\rangle$.*

Доказательство. Действительно, в M найдется не более чем счетное подмножество $M_1 \neq \varnothing$ такое, что $T \subseteq M_1$. Далее, по индукции: если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ уже определено не более чем счетное множество $M_k \subseteq M$, то пусть M_{k+1}, существующее ввиду предложения 11, не более чем счетное подмножество множества M, для которого $M_k \subseteq J(\langle M_{k+1}\rangle)$. Пусть $F = \langle M_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ и H — произвольная подгруппа конечного индекса группы F. Подгруппа F не более чем счетна, и $T \subseteq F = \langle F \cap M\rangle$. Далее, при каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем $M_k \subseteq J(M_{k+1}) \subseteq \langle M_{k+1}\rangle \cap H \subseteq H$, а значит, $H = F$. Следовательно, F квазиполная.

Пусть теперь R — любое непустое не более чем счетное подмножество множества M и F_1, F_2 — любые не более чем счетные квазиполные подгруппы группы G такие, что $R, T \subseteq F_i = \langle F_i \cap M\rangle$, $i = 1, 2$. Тогда $D = \langle F_1, F_2\rangle$ — не более чем счетная квазиполная группа и $R, T \subseteq D = \langle D \cap M\rangle$. Отсюда следует, что все не более чем счетные подмножества $L \neq \varnothing$ множества M, для которых подгруппа $\langle L\rangle$ квазиполная и $T \subseteq \langle L\rangle$, образуют локальную систему множества M. Предложение доказано.

Из предложения 12 вытекает

Предложение 13. *Бесконечная группа является квазиполной тогда и только тогда, когда она обладает локальной системой счетных квазиполных подгрупп.*

Предложение 14. *Пусть p — простое число, G — не более чем счетная локально конечная группа, являющаяся расширением p'-группы с помощью p-группы, и G_k, $k \in \mathbb{N}$, — конечные подгруппы группы G такие, что $G_k \subseteq G_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, и $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Тогда для произвольного простого q в G найдутся силовские соответственно p- и q-подгруппы P и Q такие, что PQ является силовской $\{p, q\}$-подгруппой группы G, $G = O_{p'}(G)\lambda P$, и при произвольном $k \in \mathbb{N}$ соответственно $G_k \cap P$, $G_k \cap Q$ и $G_k \cap PQ$ суть силовские p-, q-подгруппы и холлова $\{p, q\}$-подгруппа группы G_k.*

Доказательство. Действительно, очевидно, в G конечные подгруппы $\{p, q\}$-отделимы. Поэтому ввиду предложения 2 из [6] G обладает силовской $\{p, q\}$-подгруппой S такой, что $G_k \cap S$ при произвольном $k \in \mathbb{N}$ есть холлова $\{p, q\}$-подгруппа группы G_k. Далее, S обладает силовскими p- и q-подгруппами P и Q такими, что при произвольном $k \in \mathbb{N}$ $(S \cap G_k) \cap P$ и $(S \cap G_k) \cap Q$ — силовские p- и q-подгруппы группы $S \cap G_k$ (например, ввиду предложения 2 из [6]). Очевидно, при произвольном $k \in \mathbb{N}$ подгруппы $(S \cap G_k) \cap P = G_k \cap P$ и $(S \cap G_k) \cap Q = G_k \cap Q$ соответственно силовские p- и q-подгруппы группы G_k и $S \cap G_k = (G_k \cap P)(G_k \cap Q)$, $G_k = (G_k \cap O_{p'}(G))P$.

Отсюда вытекает, что P и Q — силовские соответственно p- и q-подгруппы группы G и что $S = PQ$ и $G = O_{p'}(G)\lambda P$. Предложение 1 доказано.

Предложение 15. *Пусть для некоторого простого p все p-подгруппы локально конечной группы G абелевы и все ее элементарные p-подгруппы принадлежат $Z(G)$. Тогда $G = O_{p',p}(G)$ и $G' \subseteq O_{p'}(G)$.*

Доказательство. Можно считать, что $G \neq 1$. Пусть $M \neq 1$ — конечное множество p'-элементов группы G, P — силовская p-подгруппа группы $H = \langle M \rangle$. Так как $N_H(P) \setminus Z(N_H(P))$ не содержит элементов порядка p, то, очевидно, $N_H(P) = C_H(P)$. Поэтому по теореме Бернсайда $H = O_{p'}(H)\lambda P$. Следовательно, $M \subseteq O_{p'}(H)$ и, значит, H — p'-группа. Ввиду произвольности M все p'-элементы группы G образуют подгруппу $O_{p'}(G)$. Очевидно, $G/O_{p'}(G)$ — абелева p-группа. Предложение доказано.

Лемма 12. *Пусть G — группа с условием l_π-min и $m \in \mathbb{N}$. Пусть также G не удовлетворяет условию π-min. Тогда в G найдется не удовлетворяющая условию π-min подгруппа H такая, что:*

1) *H порождается своими π-элементами;*

2) *произвольная подгруппа группы H, не удовлетворяющая условию π-min, содержит $N = \langle g \mid g \in H, |g| \leq m, \pi(|g|) \subseteq \pi \rangle$;*

3) *для любой цепочки*

$$H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_k \supset H_{k+1} \supset \dots \tag{1}$$

подгрупп группы H, у которой совокупность содержащих π-элементы разностей $H_k \setminus H_{k+1}$ бесконечна, $N \subseteq \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} H_k$;

4) *фактор-группа H/N не удовлетворяет условию π-min.*

Доказательство. Положим $A_1 = G$. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ уже определена подгруппа A_k, не удовлетворяющая условию π-min. Если A_k содержит подгруппу B, не удовлетворяющую π-min, для которой $A_k \setminus B$ обладает π-элементом порядка $\leq m$, то положим $A_{k+1} = \langle g \mid g \in B, |g| < \infty, \pi(|g|) \subseteq \pi \rangle$. Ввиду леммы 1 подгруппа A_{k+1} не удовлетворяет условию π-min. Поскольку G — группа с условием $l\pi$-min, то на некотором n-м шаге получим подгруппу A_n, у которой таких подгрупп B нет. Очевидно, для подгруппы $H = \langle g \mid g \in A_n, |g| < \infty, \pi(|g|) \subseteq \pi \rangle$ выполняются требования 1–3. Так как для цепочки (1) у цепочки $H_1/N \supset H_2/N \supset \dots \supset H_k/N \supset H_{k+1}/N \supset \dots$ совокупность разностей $(H_k/N) \setminus (H_{k+1}/N)$, содержащих π-элементы, очевидно, бесконечна, то H/N не удовлетворяет условию π-min. Лемма доказана.

Предложение 16. *Пусть локально конечная группа G с условием l_π-min не удовлетворяет условию π-min. Тогда для любых отличных от единицы (не обязательно попарно различных) π-чисел m_k, $k \in \mathbb{N}$, найдутся бесконечная убывающая цепочка $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \dots$ подгрупп группы G и возрастающий ряд ее подгрупп $N_0 = 1 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \dots$ такие, что для каждого $k \in \mathbb{N}$*

1) *G_k порождается своими π-элементами и не удовлетворяет условию π-min;*

2) *при $i \geq k$ $\quad N_k \triangleleft G_i$ и фактор-группа G_i/N_k удовлетворяет условию l_π-min и не удовлетворяет условию π-min;*

3) *N_k/N_{k-1} порождается всеми π-элементами порядка $\leq m_k$ группы G_k/N_{k-1}.*

Предложение 16 вытекает из леммы 12 и предложений 2 и 1.

Лемма 13. *Пусть H — бесконечная группа и M — бесконечное множество ее элементов такое, что произвольная убывающая цепочка подгрупп группы H,* *между любыми двумя членами которой содержится хотя бы один элемент из M, конечна. Тогда в M найдется бесконечное подмножество S такое, что $\langle S\rangle = \langle T\rangle$ для любого бесконечного $T \subseteq S$.*

Доказательство. Пусть $H_0 = \langle M\rangle$. Пусть, кроме того, для некоторого $k \in \mathbb{N}$ уже определена подгруппа H_{k-1}, порожденная некоторым бесконечным подмножеством множества M. Если в $M \cap H_{k-1}$ найдется бесконечное подмножество T, для которого $\langle T\rangle \neq H_{k-1}$, то положим $H_k = \langle T\rangle$. Тогда $(H_{k-1} \setminus H_k) \cap M \neq \varnothing$. Очевидно, на некотором n-м шаге получим подгруппу H_n такую, что для произвольного бесконечного подмножества T из множества $S = H_n \cap M$ будет $\langle S\rangle = \langle T\rangle$.

Лемма 14. *Пусть бесконечная группа G обладает бесконечной системой M образующих такой, что любое ее бесконечное подмножество порождает G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого нормального делителя N конечного индекса группы G фактор-группа G/N циклическая и найдется элемент $g \in M$ такой, что $G = \langle g\rangle N$. В частности, фактор-группа $G/J(G)$ абелева и в случае ее периодичности является локально циклической группой с конечными примарными подгруппами.*

2. *Фактор-группа $G/J(G)$ является бесконечной периодической тогда и только тогда, когда множество S всех ее элементов конечного порядка, имеющих вид $gJ(G)$ с $g \in M$, бесконечно. Если фактор-группа $G/J(G)$ периодическая и при этом взятые по всем $h \in S$ числа $|\pi(\langle h\rangle)|$ ограничены в совокупности, то она конечна.*

Доказательство утверждения 1. Так как $|G : N| < \infty$, то найдется $g \in M$, для которого $M \cap gN$ бесконечно. Тогда $G = \langle M \cap gN\rangle$ и, значит, $G = \langle g\rangle N$. Поэтому фактор-группа G/N циклическая и $G/J(G)$ абелева ввиду произвольности N.

Пусть $H = G/J(G)$ периодическая и T — произвольное конечное множество ее элементов. Тогда $|\langle T\rangle| < \infty$ и потому найдется подгруппа $L \subseteq H$ такая, что $L \cap \langle T\rangle = 1$ и $|H : L| < \infty$. Так как фактор-группа H/L циклическая, то и группа $\langle T\rangle$ ($\simeq \langle T\rangle L/L$) циклическая. Поэтому H локально циклическая. Поскольку она финитно аппроксимируема, все ее примарные подгруппы конечны. Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Если S бесконечно, то $G/J(G)$ равна $\langle S\rangle$ и, значит, поскольку группа $G/J(G)$ абелева (утверждение 1), периодична.

Пусть группа $G/J(G)$ бесконечная периодическая; $p \in \pi(G/J(G))$. Тогда ввиду утверждения 1 множество $\pi(G/J(G))$ бесконечно. Если в S есть p'-элементы, то, поскольку $G/J(G)$ абелева, все они порождают p'-подгруппу. Поэтому множество p'-элементов из S конечно или пусто. Следовательно, произвольное конечное множество из $\pi(G/J(G))$ принадлежит почти всем множествам $\pi(\langle h\rangle)$, где $h \in S$. Поэтому при любом $n \in \mathbb{N}$ почти для всех $h \in S$ будет $|\pi(\langle h\rangle)| > n$. Лемма доказана.

Из леммы 14 непосредственно вытекает

Следствие 27. *Пусть бесконечная финитно аппроксимируемая группа G обладает бесконечной системой M образующих такой, что любое ее бесконечное подмножество порождает G. Тогда для группы G справедливы те же заключения, что и в лемме 14 для фактор-группы $G/J(G)$.*

Лемма 15. *Группа G, не содержащая отличных от единицы квазиполных подгрупп конечного индекса, конечна тогда и только тогда, когда конечна* *фактор-группа $G/J(G)$.*

Доказательство очевидно.

Из леммы 15 непосредственно следует

Следствие 28. *Для произвольной группы G фактор-группа $G/\mathfrak{Q}(G)$ конечна тогда и только тогда, когда конечна фактор-группа $G/J(G)$.*

Предложение 17. *Пусть бесконечная группа G обладает бесконечным множеством M элементов конечных порядков таким, что*

1) *числа $|\pi(\langle g\rangle)|$, взятые по всем $g \in M$, ограничены в совокупности;*

2) *произвольная убывающая цепочка подгрупп группы $H = \langle M\rangle$, между любыми двумя соседними членами которой содержится элемент из M, конечна.*

Тогда фактор-группа $H/\mathfrak{Q}(H)$ конечна.

Доказательство. Действительно, пусть фактор-группа $H/\mathfrak{Q}(H)$ бесконечна; φ — гомоморфизм H на $H/J(H)$. Ввиду следствия 28 группа H^φ бесконечна. Очевидно, для множества M^φ выполняются условия 1, 2. Учитывая это, без ограничения общности можно считать, что $H = H^\varphi$. В таком случае H финитно аппроксимируема. Пусть S такое же, как в лемме 13. Тогда ввиду следствия 27 числа $|\pi(\langle g\rangle)|$, взятые по всем $g \in S$, не ограничены в совокупности. Противоречие. Предложение доказано.

Следствие 29. *Пусть группа G порождается инвариантным множеством элементов M конечных порядков, для которого выполняются условия 1, 2 из предложения 17. Группа G локально конечна тогда и только тогда, когда она обладает локальной системой конечнопорожденных подгрупп H, не имеющих отличных от единицы квазиполных подгрупп конечного индекса и таких, что $H = \langle H \cap M\rangle$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если пересечение $H \cap M$ конечно, то H конечна ввиду леммы Дицмана (поскольку $H \cap M$ — инвариантное подмножество группы H). Предположим, что оно бесконечно. Тогда в силу предложения 17 $|H : \mathfrak{Q}(H)| < \infty$, и, значит, ввиду теоремы О. Шрейера $\mathfrak{Q}(H)$ конечнопорожденна. Но тогда $\mathfrak{Q}(H) = 1$ и $|H| < \infty$. Противоречие. Следствие доказано.

Следующее предложение доказывается без использования классификации конечных простых групп.

Предложение 18. *Бесконечная простая локально конечная группа G с условием минимальности для 2-подгрупп, обладающая инволюцией g с почти локально разрешимым централизатором, изоморфна группе $\mathbf{PSL}_2(F)$ над некоторым бесконечным локально конечным полем F нечетной характеристики.*

Доказательство. Действительно, $O(C_G(g)) \neq 1$, например, ввиду [7]. Поэтому настоящее предложение справедливо в силу [8, 9].

Предложение 19. *Пусть $\pi \neq \varnothing$, H — инвариантная локально конечная подгруппа группы G, удовлетворяющая при каждом $p \in \pi$ условию минимальности для p-подгрупп; K — конечная π-подгруппа группы H. Пусть также подгруппа K разрешима или подгруппа H почти локально разрешима. Тогда индекс $|G : C_G(K)H|$ конечен.*

Доказательство. Действительно, ввиду [7, 10] в H множество классов сопряженных подгрупп, изоморфных K, конечно. Пусть K_i, $i = 1, \dots, n$, — взятые по одному представители этих классов и $K_i = K^{g_i}$, $i = 1, \dots, m$, те из них, которые сопряжены в G с K. Тогда для произвольного $g \in G$ при некоторых $j \leq m$ и $h \in H$ будет $K^g = K^{g_j h}$ и, значит, $g \in N_G(K)g_j h = N_G(K)g_j h g_j^{-1} g_j \subseteq N_G(K)Hg_j$. Следовательно, $G = \bigcup_{t=1}^{m} N_G(K)Hg_i$, и потому $|G : N_G(K)H| < \infty$. Тогда $|G : C_G(K)H| < \infty$, поскольку (ввиду конечности K) $|N_G(K) : C_G(K)| < \infty$. Предложение доказано.

Предложение 20. *Пусть H — инвариантная локально конечная подгруппа группы G, удовлетворяющая условию минимальности для примарных подгрупп. Тогда для любой конечной подгруппы $K \subseteq H$ индекс $|G : C_G(K)H|$ конечен.*

Доказательство. Действительно, ввиду [11] или [12], или [7] подгруппа H почти локально разрешима. Поэтому настоящее предложение справедливо вследствие предложения 19.

Предложение 21. *Пусть $\pi \neq \varnothing$, N — инвариантная локально конечная подгруппа группы F, удовлетворяющая условию минимальности для p-подгрупп при каждом $p \in \pi$, и φ — гомоморфизм F на $R = F/N$; K — конечная π-подгруппа группы F. Пусть выполняется одно из следующих условий:* 1) *подгруппа K разрешима;* 2) *подгруппа N почти локально разрешима;* 3) *подгруппа N удовлетворяет условию минимальности для p-подгрупп при произвольном p. Тогда индекс $|N_R(K^\varphi) : C_F(K)^\varphi|$ конечен.*

Доказательство. Пусть G — полный прообраз $N_R(K^\varphi)$ в F и $H = KN$. Тогда H и K удовлетворяют условиям предложения 19 или 20 и, следовательно, для H и K справедливо их заключение. Поэтому с учетом равенства $C_G(K) = C_F(K)$ имеем $|G^\varphi : C_F(K)^\varphi| < \infty$. Предложение доказано.

Лемма 16. *Пусть фактор-группа группы G по ее конечному нормальному делителю N является квазиполной. Тогда $G = N\mathfrak{Q}(G)$ и $\mathfrak{Q}(G) = J(G)$.*

Доказательство. Для любой подгруппы H с $|G : H| < \infty$ будет $G = NH$ и, следовательно, $|G : H| \leq |N|$. Очевидно, $Q(G)$ и $\mathfrak{Q}(G)$ совпадают с подгруппой H группы G, имеющей в ней наибольший конечный индекс.

Предложение 22. *Пусть G — группа с условием минимальности для примарных подгрупп, обладающая возрастающим нормальным рядом с конечными факторами. Группа G абелева тогда и только тогда, когда все ее конечные нормальные делители принадлежат ее центру.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Отметим прежде всего, что вследствие леммы О. Ю. Шмидта группа G локально конечна и что ввиду леммы 8.5 из [13] все ее секции удовлетворяют условию минимальности для примарных подгрупп. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что все факторы соответствующего ряда группы G просты.

Пусть группа G неабелева, все ее конечные нормальные делители порождают подгруппу $H \subseteq Z(G)$, K — наименьший член соответствующего ряда группы G, не принадлежащий H, и $N/H = \langle (KH/H)^g \mid g \in G/H \rangle$. Очевидно, KH/H — конечная простая группа, субнормальная в любой конечной подгруппе группы G/H, ее содержащей. Поэтому если она неабелева, то для произвольного $g \in G/H$ либо $[KH/H, (KH/H)^g] = 1$, либо $(KH/H)^g = KH/H$ и, значит, N/H — прямое произведение подгрупп $(KH/H)^g$. Следовательно, N/H, будучи группой с условием минимальности для примарных подгрупп, в данном случае конечна. Если же подгруппа KH/H имеет простой порядок p, то в любой конечной подгруппе группы G/H, ее содержащей, ее нормальное замыкание является p-группой. Тем самым в данном случае N/H — p-группа и, значит, ввиду теоремы 1.5 из [2] черниковская. Следовательно, N/H содержит некоторую характеристическую конечную подгруппу $L/H \neq 1$.

Пусть F равно N и L соответственно в первом и втором случаях. Так как $|F : Z(F)| < \infty$, то по теореме Шура $|F'| < \infty$. Поскольку F/F' — периодическая абелева группа с условием минимальности для примарных подгрупп и $|F'| < \infty$, то, очевидно, для любого $n \in \mathbb{N}$ подгруппа $F_n = \langle g \mid g \in F,\ g^n = 1\rangle$ $(\trianglelefteq G)$ конечна и $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Тогда $F_n \subseteq Z(G)$, в силу чего $F \subseteq Z(G)$. Противоречие. Предложение доказано.

3. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 12. Необходимость. Действительно, если группа G удовлетворяет условию l_π-min (соответственно π-min), то подгруппа H, порожденная всеми π-элементами G, удовлетворяет условию l_π-min (соответственно π-min) и ввиду следствия 26 любое конечное множество π-элементов группы G порождает конечную подгруппу, а потому H локально конечна.

Достаточность справедлива ввиду леммы 1.

Достаточность в теоремах 1 и 7 справедлива ввиду соответственно лемм 1 и 2 с учетом того, что произвольная черниковская группа удовлетворяет условию π-min и, в частности, для любого p условию p-min.

Достаточность в теоремах 2–4 и 8–11 справедлива соответственно ввиду леммы 1 и ввиду лемм 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть группа G удовлетворяет условию π-min. Ввиду теоремы 12 подгруппа, порожденная всеми π-элементами группы G, локально конечна. Если эта подгруппа нечерниковская, то у нее есть секция X/Y такая же, как в предложения 10. Поскольку Y почти квазиполная, то вследствие леммы 16

$$\mathfrak{Q}(X/Y) = \mathfrak{Q}(X)Y/Y. \tag{2}$$

Так как X содержится в локально конечном радикале группы G, то с учетом предложения 13 подгруппа $\mathfrak{Q}(X)$ локально разрешима. Поэтому ввиду (2) группа $\mathfrak{Q}(X/Y)$ локально разрешима. Тогда поскольку $|X/Y : \mathfrak{Q}(X/Y)|$ равен либо 1, либо $p \in \pi$, то (локально конечная) группа X/Y локально разрешима. Следовательно, ввиду локальной теоремы Мальцева она непроста. Тогда

$$X/Y = A\lambda\langle b\rangle, \quad |\langle b\rangle| = p \in \pi; \quad A = \mathfrak{Q}(A) = O'_\pi(X/Y). \tag{3}$$

Следовательно, доказательство необходимости сводится к случаю, когда группа G счетна, локально конечна и локально разрешима, порождается своими p-элементами для некоторого $p \in \pi$ и выполняются соотношения (3) с заменой в них X/Y на G. Дальнейшее доказательство разбивается на три этапа.

1°. Пусть сначала подгруппа A гиперцентральна. Тогда ввиду теоремы 2.2 [2] она является полной абелевой. Пусть F — подгруппа, порожденная всеми элементами простых порядков группы A. Так как, очевидно, подгруппа $F\lambda\langle b\rangle$ финитно аппроксимируема, то в силу утверждения 3 из предложения 8 $|[F, b]| < \infty$. Но ввиду утверждения 3 леммы 11 $[F, b] = F$. Таким образом, $|F| < \infty$ и, значит, A (и вместе с тем G) черниковская.

2°. Пусть A локально нильпотентна. Ввиду следствия 14 из [14] она обладает некоторой центральной системой $\mathscr{M}$ с инвариантными в G членами. Если среди подгрупп $K \in \mathscr{M}$, $K \neq 1$, есть минимальная K^*, то $K^* \subseteq Z(A)$. Если же пересечение всех таких K равно единице, то ввиду предложения 6 среди них найдется $K^* \subseteq C_G(b)$. Легко видеть, что $K^* \subseteq Z(G)$. Таким образом, $Z(A) \neq 1$. Пусть H — гиперцентр подгруппы A и φ — гомоморфизм G на G/H. Поскольку $Z(A^\varphi) = 1$, то по доказанному с учетом предложения 1 $A^\varphi = 1$. Следовательно, A гиперцентральна, и согласно п. 1° доказательства G черниковская.

3°. Покажем, что подгруппа A локально нильпотентна. Так как A локально конечна, то для этого, очевидно, достаточно показать, что она обладает центральной системой, а потому с учетом леммы 7 — что у произвольной главной системы группы G, включающей в себя A, произвольный фактор N/L с $N \subseteq A$ конечен. Пусть D^* — какая-нибудь максимальная среди всех подгрупп $D \lhd G$, для которых $D \cap N = L$; $\overline{G} = G/D^*$, $\overline{A} = A/D^*$ и $\overline{b} = bD^* \in \overline{G}$. Тогда группа $\overline{G} = \overline{A}\lambda\langle\overline{b}\rangle$ удовлетворяет тем же требованиям, что и группа $G = A\lambda\langle b\rangle$. Поэтому далее, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $D^* = 1$. Тогда N — минимальный нормальный делитель группы G и $N \subseteq D$ для любой подгруппы $D \trianglelefteq G$, $D \neq 1$. Ввиду локальной теоремы Мальцева для некоторого простого q N — элементарная абелева q-группа. Если A — q-группа, то она, будучи локально конечной, локально нильпотентна.

Пусть A не является q-группой. Так как группа G счетна, локально конечна и локально разрешима, то ввиду теоремы 9 из [6] в ней найдутся перестановочные между собой и с $\langle b\rangle$ силовские q-подгруппа Q и q'-подгруппа S такие, что $A = QS$. Тогда $N \subseteq Q$. Пусть H, M и R — подгруппы, порожденные всеми p-элементами соответственно в группах $U = Q\langle b\rangle$, $V = NS\langle b\rangle$ и $N\langle b\rangle$. Так как $N\langle b\rangle \subseteq U \neq G$, то H и R черниковские. Если $R \cap N = 1$, то $b \in C_G(N)$ и, значит, ввиду леммы 7 $N \subseteq Z(G)$.

Пусть $R \cap N \neq 1$. Тогда $\langle (R\cap N)^G\rangle = N$.

Рассмотрим случай, когда $Q \neq N$. В этом случае $V \neq G$ и, значит, M черниковская. Так как H и M черниковские, то $|H \cap N| < \infty$ и $|M \cap N| < \infty$. Следовательно, поскольку $R \cap N \subseteq H \cap N \trianglelefteq U$ и $R \cap N \subseteq M \cap N \trianglelefteq V$, то $|U : C_U(R\cap N)| < \infty$ и $|V : C_V(R\cap N)| < \infty$. Тогда с учетом того, что $G = UV$, ввиду леммы 1.17 из [14] (принадлежащей Б. Амбергу) $|G : C_G(R\cap N)| < \infty$. Поэтому $|N| = |\langle (R\cap N)^G\rangle| < \infty$.

Рассмотрим случай, когда $Q = N$. В этом случае $G = NS\langle b\rangle$, $S\langle b\rangle \simeq G/N$ и $S \simeq A/N$. Тогда $S\langle b\rangle$ порождается своими p-элементами и, значит, является черниковской, а подгруппа S — квазиполной и тем самым, будучи черниковской, полной абелевой группой.

Возьмем в S какую-нибудь конечную подгруппу $T \neq 1$, $T \lhd S\langle b\rangle$. Так как подгруппа $NT\langle b\rangle$, очевидно, финитно аппроксимируема, то в силу утверждения 1 предложения 8 подгруппа W, порожденная всеми ее p-элементами, конечна. Ввиду утверждения 3 леммы 11 $T \subseteq W$. Следовательно, $|N : C_N(T)| < \infty$. Далее, поскольку $N \cap C_T(N) = 1$ и, очевидно, $C_T(N) \trianglelefteq G$, то $C_T(N) = 1$. Поэтому $C_N(T) \neq N$. Так как $C_N(T) \trianglelefteq G$, то $C_N(T) = 1$. Таким образом, $|N| < \infty$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Действительно, группа G является локально ступенчатой, и в ее локально конечном радикале все квазиполные подгруппы, очевидно, локально разрешимы. Поэтому теорема 2 справедлива ввиду теоремы 1.

Доказательство теоремы 4. Необходимость. Пусть группа G удовлетворяет условию π-min для локально разрешимых подгрупп, но ее π-элементы порождают нечерниковскую подгруппу; R — локально разрешимый радикал группы G, F — подгруппа, порожденная всеми 2-элементами группы G. Ввиду следствия 23 все 2-подгруппы группы G черниковские.

1°. Покажем, что индекс $|G:R|$ бесконечен. Действительно, пусть $|G:R|<\infty$ и $G_1/R,\dots,G_m/R$ — все циклические подгруппы фактор-группы G/R. Так как подгруппы $G_1,\dots,G_m$ локально разрешимы, то ввиду теоремы 2 в каждой из них все π-элементы порождают черниковскую подгруппу и, значит, ввиду леммы 8 все π-элементы группы G тоже порождают черниковскую подгруппу. Противоречие.

2°. Так как группа G не почти локально разрешима, то, поскольку ввиду теоремы Фейта — Томпсона фактор-группа G/F локально разрешима, подгруппа F не является черниковской. Учитывая это, далее без ограничения общности рассуждений можно считать, что $G=F$. Будем считать также, что в произвольной локально конечной группе G^* с условием π-min для локально разрешимых подгрупп, у которой $\left|G^*\right|_2<\left|G\right|_2$ (см. определение 7), все π-элементы порождают черниковскую подгруппу. Заметим, что G^* почти локально разрешима.

Пусть H и N — произвольные подгруппа группы G и нормальный делитель H, $K=H/N$ и φ — гомоморфизм H на K.

3°. Отметим, что если H локально разрешима и является системной подгруппой группы G, то ввиду леммы 3 из [3] $H\subseteq R$.

4°. Заметим, что если некоторая системная подгруппа A группы H не почти локально разрешима, то в силу предложения 4 она содержит все ее 2-элементы (равносильно $A\supseteq O^{2'}(H)$), поскольку тогда $\left|A\right|_2=\left|G\right|_2$. В частности, если N не почти локально разрешима, то $N\supseteq O^{2'}(H)$.

Полагая в п. 4° $H=G$ и $A=H$, убеждаемся в том, что если H — системная не почти локально разрешимая подгруппа группы G, то $H=G$.

5°. Покажем, что в случае, когда $H\trianglelefteq G$, $N\trianglelefteq G$ и $|K|<\infty$, подгруппа K абелева. Действительно, в этом случае $|G:C_G(K)|<\infty$ и, значит, $C_G(K)$ не почти локально разрешима. Следовательно, поскольку $C_G(K)\trianglelefteq G$, то $C_G(K)=G$, т. е. $K\subseteq Z(G/N)$.

6°. Покажем, что если подгруппа H почти локально разрешима и является системной, то она локально разрешима. Действительно, предположим, что это не так. Пусть N — локально разрешимый радикал H. Тогда N, будучи системной подгруппой группы G, содержится в R (см. п. 3°). Поэтому HR/R — отличная от единицы конечная группа с равным единице разрешимым радикалом. Следовательно, HR/R содержит некоторую субнормальную простую неабелеву подгруппу L/R. Учитывая, что H системная, нетрудно убедиться в следующем: L/R субнормальна в любой конечной подгруппе группы G/R, ее содержащей. Отсюда вытекает ввиду теоремы Виландта, что для произвольного $g\in G/R$ либо $[L/R,(L/R)^g]=1$, либо $(L/R)^g=L/R$. Поэтому нормальное замыкание M подгруппы L/R в G/R — прямое произведение сопряженных с L/R в G/R подгрупп. Следовательно, поскольку подгруппа M удовлетворяет условию min-2 (ввиду леммы 8.5 из [13]) и $2\mid |L/R|$ (по теореме Фейта — Томпсона), то она конечна. Но тогда в соответствии с п. 5° она абелева. Противоречие.

7°. Покажем, что в случае, когда N локально разрешима и K бесконечна и проста, группа H обладает неабелевыми 2-подгруппами и для произвольной ее инволюции g централизатор $C_H(g)$ не почти локально разрешим. Действительно, если $C_H(g)$ почти локально разрешим, то, поскольку ввиду предложения 21

$|C_K(g^\varphi) : C_H(g)^\varphi| < \infty$, централизатор $C_K(g)$ также почти локально разрешим; если все 2-подгруппы группы H абелевы, то, очевидно, в K все 2-подгруппы абелевы. Но тогда в первом случае ввиду предложения 18 $K \simeq \mathbf{PSL}_2(P)$, а во втором ввиду теоремы 4.28 из [16] и замечаний к ней в K найдется инволюция h, для которой $C_K(h) \simeq \langle h\rangle \times \mathbf{PSL}_2(P)$, где P — некоторое бесконечное локально конечное поле. Но вследствие утверждения 4 теоремы 4 из [17] такая $\mathbf{PSL}_2(P)$ не удовлетворяет условию 2-min для локально разрешимых подгрупп. Следовательно, поскольку N локально разрешима, то ввиду предложения 1 H не удовлетворяет этому условию. Противоречие.

8°. Заметим, что G обладает локально разрешимым нормальным делителем, фактор-группа по которому бесконечна и проста. Действительно, с учетом пп. 4°, 6° в произвольной композиционной системе группы G любой член, отличный от G, является локально разрешимой группой. Объединение всех таких членов и будет соответствующим нормальным делителем.

9°. Заметим, что с учетом пп. 7° и 8° все идеальные силовские 2-подгруппы группы G неабелевы и централизатор в G ее произвольной инволюции не почти локально разрешим.

10°. Покажем, что G обладает конечной 2-подгруппой с почти локально разрешимым нормализатором. Действительно, пусть в G такой подгруппы нет; S и T — произвольные идеальная силовская 2-подгруппа группы G и конечный нормальный делитель S. Так как $C_G(T) \trianglelefteq N_G(T)$ и централизатор $C_G(T)$ не почти локально разрешим, то согласно п. 4° $S \subseteq C_G(T)$. Тогда ввиду предложения 22 подгруппа S абелева. Противоречие.

Перейдем к заключительному этапу доказательства.

11°. Пусть T — подгруппа наименьшего порядка среди конечных 2-подгрупп группы G с почти локально разрешимыми нормализаторами и A — ее подгруппа индекса 2. Тогда фактор-группа $N_G(A)/A$ не является почти локально разрешимой, обладает подгруппой T/A порядка 2 с почти локально разрешимыми централизатором и вследствие предложения 1 удовлетворяет условию π-min для локально разрешимых подгрупп. Но это невозможно (см. п. 7°). Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть группа G удовлетворяет условию π-min. Тогда ввиду теорем 12 и 4 подгруппа, порожденная всеми ее π-элементами, является черниковской.

Достаточность установлена выше. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 7. Необходимость. Пусть группа G удовлетворяет условию l_π-min, но для некоторого $p \in \pi$ не удовлетворяет условию p-min. С учетом леммы 1 без ограничения общности рассуждений можно считать, что G счетна и порождается своими p-элементами. Тогда ввиду теоремы 12 она локально конечна. В силу следствия 23 все p-подгруппы группы G черниковские. Далее, не теряя общности рассуждений, можно считать, что произвольная локально конечная группа G^* с условием l_p-min, у которой $\lceil G^* \rceil_p \leq \lceil G \rceil_p$, удовлетворяет условию p-min.

1°. Покажем, что фактор-группа $G/O_{p'}(G)$ не является полной абелевой p-группой. В самом деле, предположим, что она такой является. Пусть $q \neq p$ — простое число; G_k, $k \in \mathbb{N}$, P и Q такие же, как в предложении 14, и $T = PQ$. Тогда $Q \trianglelefteq T$ и P полная абелева черниковская.

Покажем, что

$$T = P \times Q. \tag{4}$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ пусть $L_k = \langle (G_k \cap P)^{Q(G_k \cap P)} \rangle$. Так как $T = (Q(G_k \cap P))P$ и P абелева, то ввиду леммы Чунихина (см., например, [15, лемма 1.36]) $L_k = \langle (G_k \cap P)^T \rangle$ и, значит, $L_k \trianglelefteq T$. В силу следствия 21 подгруппа $Q(G_k \cap P)$ удовлетворяет условию min-p. Поэтому ввиду теоремы 2 L_k является черниковской. Тогда вследствие теоремы 1.4 [2] подгруппа PL_k черниковская. В таком случае, поскольку P — полная абелева силовская p-подгруппа группы PL_k имеем $P \trianglelefteq PL_k$.

Далее, ввиду леммы С. Н. Черникова

$$L_k = (G_k \cap P)(L_k \cap Q). \tag{5}$$

Поэтому $PL_k = P(L_k \cap Q)$. Значит, $PL_k = P \times (L_k \cap Q)$, поскольку $P \trianglelefteq PL_k$, $L_k \cap Q \trianglelefteq T$ и $P \cap Q = 1$. Следовательно, $P \subseteq C_T(L_k \cap Q)$. Поэтому с учетом (5)

$$P \subseteq C_T(L_k). \tag{6}$$

Пусть $M = \langle P^T \rangle$. Тогда $M = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \langle (G_k \cap P)^T \rangle = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} L_k$ и, значит, ввиду (6) $P \subseteq Z(M)$. В таком случае, поскольку P — силовская p-подгруппа группы T, получим $P = M \trianglelefteq T$. Следовательно, выполняется (4). Ввиду доказанного в группе G_k при произвольном $q \neq p$ найдутся поэлементно перестановочные силовские p- и q-подгруппы. Тогда вследствие теоремы Силова для фиксированной силовской p-подгруппы P_k группы G_k при каждом $q \neq p$ найдется поэлементно перестановочная с ней силовская q-подгруппа группы $G_k \cap O_{p'}(G)$. Поэтому $G_k = P_k \times (G_k \cap O_{p'}(G))$. Тем самым ввиду произвольности k будет $G = O_p(G) \times O_{p'}(G)$. Тогда, поскольку $O_p(G)$ черниковская, группа G ввиду леммы 1 удовлетворяет условию p-min. Противоречие.

Перейдем к заключительному этапу доказательства теоремы.

2°. Пусть $m_k = p$, $k \in \mathbb{N}$, и G_k, N_k те же, что в предложении 16, $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, обладающих нормальной системой с p- и p'-факторами. Так как группа G локально конечна и все ее p-подгруппы черниковские, то ввиду теоремы A [18] у произвольной нормальной системы любой ее подгруппы число не $\mathfrak{X}$-факторов конечно и ограничено константой, зависящей только от $\lceil G \rceil_p$. Следовательно, при некотором $l \in \mathbb{N}$ для любого $i \geq l$ будет $N_{i+1}/N_i \in \mathfrak{X}$. Пусть S — идеальная силовская p-подгруппа группы G, F — какая-нибудь конечная подгруппа из S, для которой $S = FJ(S)$ и $|F| = p^t$. Можно считать, что $l \geq t$.

Так как подгруппа G_{l+1} не удовлетворяет условию p-min, то $\lceil G_{l+1} \rceil_p = \lceil G \rceil_p$. Поэтому вследствие утверждения 1 предложения 3 произвольная идеальная силовская p-подгруппа группы G_{l+1} является и идеальной силовской p-подгруппой группы G. Учитывая это, можно считать, что $S \subseteq G_{l+1}$. Тогда, очевидно, $F \subseteq N_l$ и, следовательно, группа SN_l/N_l является полной абелевой. Далее, ввиду утверждения 2 из предложения 3 SN_l/N_l, SN_{l+1}/N_{l+1} и $(SN_l/N_l) \cap (N_{l+1}/N_l)$ — идеальные силовские p-подгруппы соответственно групп G_{l+1}/N_l, G_{l+1}/N_{l+1} и N_{l+1}/N_l. Следовательно, все p-подгруппы группы G_{l+1}/N_l абелевы, и поскольку $\langle (SN_l/N_l)^{G_{l+1}/N_l} \rangle = O^{p'}(G_{l+1}/N_l) = G_{l+1}/N_l$ (см. следствие 22), она является квазиполной. Далее, так как группы G_{l+1}/N_l и G_{l+1}/N_{l+1} удовлетворяют условию l_p-min и не удовлетворяют условию p-min, то $\lceil G_{l+1} \rceil_p = \lceil G_{l+1}/N_l \rceil_p = \lceil G_{l+1}/N_{l+1} \rceil_p$. Следовательно, поскольку SN_l/N_l и SN_{l+1}/N_{l+1} — идеальные силовские p-подгруппы групп G_{l+1}/N_l и G_{l+1}/N_{l+1} а SN_{l+1}/N_{l+1} изоморфна фактор-группе группы SN_l/N_l, то, очевидно, $|(SN_l/N_l) \cap (N_{l+1}/N_l)| < \infty$. Поэтому ввиду того, что $(SN_l/N_l) \cap (N_{l+1}/N_l)$ — идеальная силовская p-подгруппа группы N_{l+1}/N_l, у последней все p-секции конечны. Тогда с учетом включения $N_{l+1}/N_l \in \mathfrak{X}$ ввиду теоремы 7.1 из [13] (утверждающей, что у локально конечной группы X с конечными p-подгруппами индекс $|X : O_{p'}(X)|$ конечен, если она обладает нормальной системой, все не p'-факторы которой конечны) $|N_{l+1}/N_l : O_{p'}(N_{l+1}/N_l)| < \infty$.

Пусть $O_{p'}(N_{l+1}/N_l) = R/N_l$. Так как $|N_{l+1}/R| < \infty$ и группа G_{l+1}/R квазиполная, то ввиду леммы 7 $N_{l+1}/R \subseteq Z(G_{l+1}/R)$. Поскольку все p-подгруппы группы G_{l+1}/N_l абелевы, то все p-подгруппы группы G_{l+1}/R тоже абелевы. Так как все элементы порядка p группы G_{l+1}/G_l содержатся в N_{l+1}/N_l, то все элементы порядка p группы G_{l+1}/R также содержатся в N_{l+1}/R. Следовательно, ввиду предложения 15 фактор-группа $(G_{l+1}/R)/O_{p'}(G_{l+1}/R)$ — полная абелева p-группа. Поэтому, очевидно, и фактор-группа $(G_{l+1}/N_l)/O_{p'}(G_{l+1}/N_l)$ будет такой же. Противоречие (см. п. 1°). Теорема доказана.

Доказательства теорем 8–11. Необходимость Пусть группа G удовлетворяет условию l_π-min. Тогда для каждого $p \in \pi$ ввиду теоремы 7 она удовлетворяет условию p-min и, значит, в силу соответственно теорем 1–4 все ее p-элементы порождают черниковскую подгруппу.

Доказательство теоремы 5. Действительно, пусть M — множество всех примарных π-элементов группы G. Тогда $H = \langle M \rangle$ и ввиду предложения 17 $|H/\mathfrak{Q}(H)| < \infty$.

Доказательство теоремы 13. Пусть для произвольного $k \in \mathbb{N}$ M_k — множество всех π-элементов порядка $\leq k$ группы G и $H_k = \langle M_k \rangle$. Тогда $|H_k : \mathfrak{Q}(H_k)| < \infty$ (см. предложение 17), $H_k \subseteq H_{k+1}$, $H_k\mathfrak{Q}(H)/\mathfrak{Q}(H) \trianglelefteq G/\mathfrak{Q}(H)$, $k \in \mathbb{N}$, и $H = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} H_k$, и поскольку $\mathfrak{Q}(H_k) \subseteq \mathfrak{Q}(H)$, то $|H_k\mathfrak{Q}(H)/\mathfrak{Q}(H)| < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому справедливо утверждение 1 настоящей теоремы.

Пусть F — подгруппа, порожденная всеми σ-элементами группы G. Так как ввиду утверждения 1 настоящей теоремы фактор-группа $H/\mathfrak{Q}(H)$ локально конечна, то в силу леммы О. Ю. Шмидта H локально конечна. Поэтому в силу теоремы 7 она при каждом $p \in \sigma$ удовлетворяет условию p-min и, значит, в соответствии с леммой 3 удовлетворяет условию σ-min. Следовательно, по теореме 5 $|F/\mathfrak{Q}(F)| < \infty$. Поэтому $|FN/N| < \infty$. Вследствие периодичности N FN/N совпадает с подгруппой, порожденной всеми σ-элементами группы G/N.

Так как в силу доказанного для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество всех элементов порядка $\leq n$ группы G/N конечно, то она удовлетворяет условию l_π-min. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 14. Действительно, пусть K — произвольная конечнопорожденная подгруппа группы H такая, как в утверждении 2 настоящей теоремы. В силу утверждения 1 теоремы 13 $|K : \mathfrak{Q}(K)| < \infty$ и, значит, ввиду теоремы О. Шрейера (квазиполная) подгруппа $\mathfrak{Q}(K)$ конечнопорождена. Поэтому если справедливо утверждение 2 настоящей теоремы и K входит в соответствующую локальную систему подгруппы H, то $|K| < \infty$ и, значит, ввиду произвольности K H локально конечна. Теорема доказана.

Замечание 5. Пусть H и H_p — подгруппы группы G такие, как в теореме 5 и следствии 20. Используя следствие 20 и лемму 1, легко убедиться в следующем. В теоремах 1, 3, 7, 8, 10 и следствиях 2, 5, 6, 12–14, 16 требование локальной ступенчатости группы G можно заменить таким существенно более слабым требованием: для каждого $p \in \mathbb{P}$ или $p \in \pi \neq \varnothing$ H_p не содержит отличных от единицы конечнопорожденных квазиполных подгрупп. При этом в теоремах 1, 8 требование локальной разрешимости всех счетных квазиполных подгрупп из локально конечного радикала группы G_p можно заменить следующим более слабым требованием: если $\pi \neq \varnothing$, то при каждом $p \in \pi$ в локально конечном радикале группы H_p все счетные квазиполные подгруппы (в случае, когда такие есть) локально разрешимы. В теореме 3 и следствиях 5, 13 требование $2 \in \pi$, очевидно, можно заменить следующим: $2 \notin \pi(H) \setminus \pi$. Из теорем 2, 9 и лемм 8, 1, 2 вытекает

Следствие 30. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс RN-групп или класс локально разрешимых групп; $\pi \neq \varnothing$. Почти $\mathfrak{X}$-группа G удовлетворяет условию π-min (соответственно l_π-min) для $\mathfrak{X}$-подгрупп тогда и только тогда, когда все ее π-элементы (соответственно все ее p-элементы при каждом $p \in \pi$) порождают черниковскую подгруппу.*

Доказательство. Достаточность справедлива вследствие лемм 1 и 2.

Необходимость. Действительно, пусть N — инвариантная $\mathfrak{X}$-подгруппа конечного индекса группы G и g_k, $k = 1, \dots, m$, — представители всех смежных классов G по N. Тогда $\langle g_k \rangle N \in \mathfrak{X}$, $k = 1, \dots, m$, и $G = \bigcup_{k=1}^{m} \langle g_k \rangle N$. Поэтому необходимость имеет место вследствие теорем 2, 9 и леммы 8.

Докажем еще следующее предложение, которое сводит решение вопроса 3 из [1] к случаю, когда в группе G все π-подгруппы конечны.

Предложение 23. *Пусть G — группа с условием π-min или группа с условием l_π-min при конечном π; H — подгруппа, порожденная всеми π-элементами группы G, и K — квазиполная часть H. Пусть выполняется одно из следующих условий:*

1) K обладает нормальной системой с конечными факторами;

2) K локально ступенчатая и для каждого $p \in \pi$ (если $\pi \neq \varnothing$) обладает нормальной системой, у которой отсутствуют бесконечные факторы с элементами порядка p.

Тогда H — локально конечная группа с условием π-min, $|H : K| < \infty$, $K = O_\pi(K) \times O_{\pi'}(K)$, $O_\pi(K)$ — полная абелева черниковская группа и фактор-группа $G/O_\pi(K)$ удовлетворяет условию π-min.

Доказательство. Действительно, произвольная группа, обладающая нормальной системой с конечными факторами, является локально ступенчатой. Следовательно, ввиду теоремы 12 подгруппа H локально конечна. В силу теорем 7, 5 и леммы 3 она удовлетворяет условию π-min и $|H : K| < \infty$. Тогда согласно предложению 1 $G/O_\pi(K)$ удовлетворяет условию π-min.

Вследствие [19] для каждого $p \in \pi$ $K/O_p(K)$ полная абелева черниковская. Поэтому $K/O_{\pi'}(K)$ — полная абелева π-группа. Поскольку с учетом предложения 1 $K/O_{\pi'}(K)$ удовлетворяет условию π-min, то она черниковская (например, ввиду теоремы 2).

Пусть K не является π'-группой; $p \in \pi(K/O_{\pi'}(K))$ и $R/O_{\pi'}(K)$ — силовская p-подгруппа группы $K/O_{\pi'}(K)$, L — произвольная счетная подгруппа группы R, для которой $R = LO_{\pi'}(K)$. Рассуждая, как в п. 1° доказательства теоремы 7, убеждаемся в том, что $L = O_p(L) \times O_{\pi'}(L)$. Отсюда ввиду произвольности L следует, что $R = O_p(R) \times O_{\pi'}(R)$. В силу этого, очевидно, справедливо предпоследнее заключение настоящего предложения. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черников Н. С.* Группы с условиями π-минимальности и π-слойной минимальности. I // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1193–1206.

2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
3. *Hartley B.* Serial subgroups of locally finite groups // Proc. Camb. Phil. Soc. 1972. V. 71. P. 199–201.
4. *Курош А. Г.* Теория групп. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1967.
5. *Черников С. Н.* К теории локально разрешимых групп // Мат. сб. 1943. Т. 13, № 2–3. С. 317–333.
6. *Черников Н. С.* Обобщенно разрешимые и обобщенно π-разрешимые факторизуемые группы // Вопросы алгебры. Гомель: Гомельский гос. ун-т, 1996. Т. 10. С. 91–122.
7. *Черников Н. С.* О бесконечных простых локально конечных группах. Киев, 1982. 20 с. (Препринт/Ин-т математики; № 82.37).
8. *Черников Н. С.* Бесконечные локально конечные простые группы с нетривиальным ядром централизатора элементарной абелевой 2-подгруппы // Укр. мат. журн. 1988. Т. 40, № 5. С. 668–670.
9. *Turau V.* Zentralisatoren in local endlichen Gruppen von Chevalley — Typ // Arch. Math. 1985. V. 44. P. 297–308.
10. *Черников Н. С.* О локально конечных группах с условием min-p // Группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Изд-во Ин-та математики, 1993. С. 388–392.
11. *Беляев В. В.* Локально конечные группы с черниковскими силовскими p-подгруппами // Алгебра и логика. 1981. Т. 20, № 6. С. 605–619.
12. *Павлюк И. И., Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием min-p по всем p // VII Всесоюз. симпоз. по теории групп. Шушенское Красноярского кр., 9–12 сент. 1980 г.: Тез. докл. Красноярск, 1980. Р. 84–85.
13. *Черников С. Н.* Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 5. С. 45–96.
14. *Черников Н. С.* Обобщенно разрешимые группы, факторизуемые подгруппами конечного специального ранга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: Изд-во Ин-та математики и механики УрО РАН, 1996. Т. 4. С. 83–117.
15. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. Киев: Наук. думка, 1987.
16. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A.* Locally finite groups. Amsterdam; London: North-Holland Publ. Co, 1973.
17. *Черников Н. С.* Бесконечные локально конечные группы $\mathbf{PSL}_2(F)$, удовлетворяющие условию π-минимальности // Вопросы алгебры. Гомель: Гомельский гос. ун-т, 1999. Т. 15. С. 47–59.
18. *Wilson J. S.* On groups satisfying min-p // Proc. London Math. Soc. 1973. V. 26, N 2. P. 226–248.
19. *Каргаполов М. И.* Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 6. С. 853–873.

Статья поступила 22 марта 1999 г.

Черников Николай Сергеевич
Институт математики НАН Украины, ул. Терещенковская, 3, Киев 01601, Украина
Chern@Imath.Kiev.ua