Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2001. Том 42, № 5

УДК 517.55

ОБ ОДНОМ ГРАНИЧНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРЕМЫ МОРЕРА

С. Г. Мысливец

Аннотация: Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ со связной гладкой границей ∂D и функция f непрерывна на ∂D. Рассмотрены условия (обобщающие условия теоремы Гартогса — Бохнера), обеспечивающие голоморфное продолжение функции f в область D. В качестве следствия приведен граничный аналог теоремы Морера, состоящий в равенстве нулю интегралов от функции f по пересечению границы области с комплексными кривыми из некоторого класса, также обеспечивающий голоморфное продолжение функции f в область. Библиогр. 9.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с гладкой (класса $\mathscr{C}^1$) связной границей ∂D. Предположим, что для функции $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ интегралы по $\partial D \cap l$ равны нулю для всех комплексных кривых l из некоторого класса. Наша цель ответить на вопрос: будет ли f голоморфно продолжаться в D как функция n комплексных переменных (т. е. справедлив ли такой граничный вариант теоремы Морера)? Для случая комплексных прямых этот вопрос исследовался Дж. Глобевником и Е. Л. Стаутом в [1], М. Л. Аграновским и А. М. Семеновым в [2] и А. М. Кытмановым и автором в [3]. В [4] данный вопрос рассмотрен для комплексных кривых, заданных в $\mathbb{C}^2$.

Пусть $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — отображение, состоящее из голоморфных функций ψ_j, определенных в некоторой окрестности компакта $K_D = \{w : w = \zeta - z,\ z, \zeta \in \overline{D}\}$, и имеющее единственный нуль кратности μ в начале координат.

Рассмотрим дифференциальную форму

$$U(w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \overline{w}_k d\overline{w}[k] \wedge dw}{|w|^{2n}},$$

где $dw = dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n$, а $d\overline{w}[k]$ получается из формы $d\overline{w}$ вычеркиванием дифференциала $d\overline{w}_k$. Дифференциальная форма $U(w)$ есть ядро Бохнера — Мартинелли в точке 0.

В работе [5] показано, что для всякой функции $F \in \mathscr{C}^1(\overline{D})$ справедливо представление

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} F(\zeta) U(\psi(\zeta - z)) - \int\limits_{D_\zeta} \bar\partial F(\zeta) \wedge U(\psi(\zeta - z)) = \begin{cases} \mu F(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases} \qquad (1)$$

в котором интеграл по области D абсолютно сходится, а в форме $U(\psi(\zeta - z))$ точка z считается фиксированной (для точек $z \in D$ форма $U(\psi(\zeta - z))$ определена для всех $\zeta \in \overline{D}$ в силу условия, наложенного на функции ψ_j, а если $z \notin \overline{D}$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00790).

то для того, чтобы форма $U(\psi(\zeta - z))$ была определена для всех $\zeta \in \overline{D}$, нужно рассматривать лишь те точки z, которые лежат в некоторой окрестности $\overline{D}$).

Предложение 1. *Если $\partial D \in \mathscr{C}^d$ $(d \geq 1)$, то каждая функция $f \in \mathscr{C}^l(\partial D)$, $0 \leq l \leq d$, является пределом в метрике $\mathscr{C}^l(\partial D)$ линейных комбинаций дробей вида*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^s(\zeta - z)\overline{A}_k^m(\zeta - z)}{|\psi(\zeta - z)|^{2n-2}}, \quad s, m = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

где $z \in \partial D$, а ζ — фиксированная точка, не лежащая на ∂D. Здесь A_k^s — алгебраические дополнения к элементам $\frac{\partial \psi_k}{\partial \zeta_s}$ в матрице Якоби отображения ψ. Вместо дробей вида (2) можно также взять дроби вида

$$\frac{1}{|\psi(\zeta - z)|^{2n}} \left(\sum_{r=1}^{n} \psi_r(\zeta - z) A_r^s(\zeta - z) \right) \left(\sum_{p=1}^{n} \overline{\psi_p(\zeta - z) A_p^m(\zeta - z)} \right). \tag{3}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения. Пусть $\theta^1, \dots, \theta^m$ — n-мерные вектор-столбцы, состоящие из внешних дифференциальных форм. Через $\mathbf{D}_{\nu_1,\dots,\nu_m}\left(\theta^1, \dots, \theta^m\right)$ обозначим определитель порядка n, первыми ν_1 столбцами которого являются векторы θ^1, вторыми ν_2 столбцами — векторы θ^2, и т. д., последними ν_m столбцами — векторы θ^m, $\nu_1 + \dots + \nu_m = n$. О свойствах таких определителей см., например, [6, гл. 1].

Лемма 1. *Ядро $U(\psi(\zeta - z))$ может быть представлено в виде*

$$U(\psi) = \frac{1}{(n-1)(2\pi i)^n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{|\psi|^{2n-2}} \mathbf{D}_{1,n-1}(A^s, \overline{\partial_\zeta \psi}) \right) \wedge d\zeta,$$

где A^s — столбец из алгебраических дополнений A_k^s, $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Как показано в [5],

$$U(\psi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|\psi|^{2n}} \mathbf{D}_{1,n-1}\left(\overline{\psi}, \overline{\partial_\zeta \psi}\right) \wedge d\psi. \tag{4}$$

Так как

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial A_k^s}{\partial z_s} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{|\psi|^{2n}} \mathbf{D}_{1,n-1}\left(A^s, \overline{\partial_\zeta \psi}\right) \right) \wedge d\zeta \\
&\qquad = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{|\psi|^{2n-2}} \right) \mathbf{D}_{1,n-1}\left(A^s, \overline{\partial_\zeta \psi}\right) \wedge d\zeta \\
&\qquad = -(n-1) \sum_{s=1}^{n} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\psi}_k \frac{\partial \psi_k}{\partial z_s}}{|\psi|^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} A_j^s \, \mathbf{D}_{n-1}^j(\overline{\partial_\zeta \psi}) \wedge d\zeta \\
&\qquad = (n-1) \sum_{s=1}^{n} \frac{\bar{\psi}_s}{|\psi|^{2n}} (-1)^{s-1} \mathbf{D}_{n-1}^s(\overline{\partial_\zeta \psi}) \wedge d\psi \\
&\qquad = \frac{(n-1)}{|\psi|^{2n}} \mathbf{D}_{1,n-1}\left(\bar{\psi}, \overline{\partial_\zeta \psi}\right) \wedge d\psi = (n-1)(2\pi i)^n U(\psi).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{D}_{n-1}^j(\overline{\partial_\zeta \psi})$ — определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из определителя $\mathbf{D}_{1,n-1}\left(A^s, \overline{\partial_\zeta \psi}\right)$ вычеркиванием первого столбца и j-й строки. □

Лемма 2. *Ядро $U(\psi)$ можно представить в виде*

$$U(\psi) = \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_s} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{|\psi|^{2n-2}} \left(\sum_{k=1}^{n} A_k^s \overline{A}_k^m \right) d\bar{\zeta}[m] \wedge d\zeta.$$

Доказательство следует из леммы 1 и тождества

$$\mathbf{D}_{1,n-1}(A^s, \overline{\partial_\zeta \psi}) = (n-1)! \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \left(\sum_{k=1}^{n} A_k^s \overline{A}_k^m \right) d\bar{\zeta}[m]. \quad \square$$

Из формулы (1), лемм 1, 2 нетрудно получить доказательство предложения 1. Действительно, рассмотрим достаточно малую окрестность V границы области ∂D (так, чтобы все функции $\psi_j(\zeta - z)$ были определены). Функцию f продолжим в V до функции класса $\mathscr{C}^l$ с компактным носителем в V. Приближая f в метрике $\mathscr{C}^l$ в V функциями класса $\mathscr{C}^\infty$, можно считать, что сама функция f является бесконечно дифференцируемой. К ней в окрестности V применим формулу (1). Получим

$$-\int_{V_\zeta} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge U(\psi(\zeta - z)) = \mu f(z), \quad z \in \partial D.$$

Производя замену $\zeta = z + w$, имеем

$$-\int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial} f(z + w) \wedge U(\psi(w)) = \mu f(z), \quad z \in \partial D.$$

В этом равенстве можно находить производные вплоть до порядка l по переменным z и $\bar{z}$ дифференцированием под знаком интеграла (в силу абсолютной сходимости интеграла).

Поэтому, выбирая достаточно малую окрестность V' границы ∂D, получим, что интеграл по V' может быть сделан сколь угодно малым в метрике $\mathscr{C}^l$. А в интеграле по $V \setminus V'$ заменим подынтегральное выражение интегральными суммами, а производные — разностными отношениями (применяя леммы 1 и 2). Полученные дроби будут сколь угодно близки в метрике $\mathscr{C}^l$ к функции f.

Плотность дробей вида (3) получается непосредственно из представления (2) с использованием дробей вида (2). $\square$

Следствие 1. *Если $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ удовлетворяет моментным условиям*

$$\int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\partial}_\zeta \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^s(\zeta - z)\, \overline{A}_k^m(\zeta - z)}{|\psi(\zeta - z)|^{2n-2}} \right) \wedge d\bar{\zeta}[j,p] \wedge d\zeta = 0 \tag{5}$$

для всех $z \notin \partial D$ и всех $j, s, m, p = 1, \dots, n$, то f голоморфно продолжается в D до функции $F \in \mathscr{C}(\overline{D})$.

Доказательство. Из предложения 1 получаем, что

$$\int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\partial}_\zeta (\alpha(\zeta) \wedge d\bar{\zeta}[j,p] \wedge d\zeta) = 0$$

для любых гладких функций $\alpha(\zeta)$, заданных в окрестности границы ∂D. Следовательно, f является CR-функцией на ∂D. Поскольку ∂D связна, функция f голоморфно продолжается в D. $\square$

Следствие 1 является одним из вариантов теоремы Гартогса — Бохнера. Заметим, что в этом утверждении можно требовать выполнения равенства (5) только для точек z из некоторого открытого множества $V \subset D$ или $V \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Как мы увидим в дальнейшем, условие теоремы Морера превращается в следующее условие ортогональности:

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta)\Phi(\zeta - z)U(\psi(\zeta - z)) = 0, \quad z \notin \partial D, \tag{6}$$

для функции $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ и функции Φ вида

$$\Phi(w) = \varphi_1(w)\psi_1(w) + \dots + \varphi_n(w)\psi_n(w), \tag{7}$$

где функции $\varphi_j(w)$ (как и функции $\psi_j(w)$) голоморфны в некоторой окрестности компакта K_D, либо φ_j — мероморфные функции такие, что форма $\Phi U(\psi)$ не имеет особенностей при $\zeta \neq z$.

Сначала изучим условие (6) для специального выбора функции Φ вида (7).

Лемма 3. *Равенство* (6) *можно переписать в виде*

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta)\bar\partial_\zeta \left[\frac{1}{|\psi(\zeta - z)|^{2n-2}}\mathbf{D}_{1,1,n-2}(\varphi(\zeta - z), \overline{\psi(\zeta - z)}, \overline{\partial_\zeta \psi}) \wedge d\psi\right] = 0,$$

где $z \notin \partial D$, а φ — столбец из функций φ_j, $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Рассмотрим столбцы $\tau = \frac{\varphi}{\Phi}$ и

$$\eta = \frac{\bar\psi}{|\psi|^2} = \left(\frac{\bar\psi_1}{|\psi|^2}, \dots, \frac{\bar\psi_n}{|\psi|^2}\right).$$

По лемме 1 из [5] (впрочем, это нетрудно проверить непосредственно)

$$U(\psi(\zeta - z)) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\bar\partial_\zeta \mathbf{D}_{1,1,n-2}(\tau(\zeta - z), \eta(\zeta - z), \overline{\partial}_\zeta \eta(\zeta - z)) \wedge d\psi$$

вне нулей функции $\Phi(\zeta - z)$. Пользуясь свойством однородности определителя $\mathbf{D}$ из дифференциальных форм, получим

$$\Phi(\zeta - z)U(\psi(\zeta - z))$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\bar\partial_\zeta \left[\frac{1}{|\psi(\zeta - z)|^{2n-2}}\mathbf{D}_{1,1,n-2}\left(\varphi(\zeta - z), \overline{\psi(\zeta - z)}, \overline{\partial_\zeta \psi(\zeta - z)}\right)\right] \wedge d\psi. \quad \square$$

Лемма 4. *Равенство* (6) *можно записать в виде*

$$\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\bar\partial_\zeta \left[\frac{\partial}{\partial z_s}\left(\frac{1}{|\psi|^{2n-4}}\right)\mathbf{D}_{1,1,n-2}\left(\varphi, A^s, \overline{\partial_\zeta \psi}\right) \wedge d\zeta\right] = 0, \tag{8}$$

если $z \notin \partial D$ и $n > 2$,

$$\sum_{s=1}^{2}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\bar\partial_\zeta \left[\frac{\partial}{\partial z_s}\left(\ln|\psi|^2\right)\mathbf{D}_{1,1}\left(\varphi, A^s\right) \wedge d\zeta\right] = 0, \tag{9}$$

если $n = 2$.

Доказательство такое же, как и доказательство леммы 1.

Из данной леммы нам понадобится равенство (8), поскольку равенство (9) изучено в работе [4]. Таким образом, будем считать, что $n > 2$.

Прежде всего мы покажем, что при специальном выборе функций φ_j в условии (8) производные по переменным z_s можно выносить за знак интеграла. Пусть вектор-столбец φ имеет вид $\varphi(w) = \frac{1}{J}A^k$, где J — определитель матрицы Якоби отображения ψ ($J \not\equiv 0$), а A^k — столбец из алгебраических дополнений A^k_m, $m = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$.

Лемма 5. *Условие* (6) *можно записать в виде*

$$\sum_{s\neq k}\frac{\partial}{\partial z_s}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\bar\partial_\zeta\left[\frac{1}{|\psi|^{2n-4}}\mathbf{D}_{1,1,n-2}\left(\frac{A^k}{J},A^s,\overline{\partial_\zeta\psi}\right)\wedge d\zeta\right]=0, \tag{10}$$

если $z\notin\partial D$.

Хотя определитель J может обращаться в 0 на некоторой поверхности, как мы увидим из доказательства леммы 5, определители $\mathbf{D}$, стоящие под знаком интеграла в (10), не имеют особенностей.

Доказательство. Пусть $\varphi=\frac{1}{J}A^1$. Для доказательства леммы достаточно показать (в силу равенства (8)), что

$$\sum_{s=2}^n\frac{\partial}{\partial z_s}\mathbf{D}_{1,1,n-2}\left(\frac{A^1}{J},A^s,\overline{\partial\psi}\right)=0.$$

По теореме Лапласа имеем

$$\sum_{s=2}^n\frac{\partial}{\partial z_s}\mathbf{D}_{1,1,n-2}\left(\frac{A^1}{J},A^s,\overline{\partial\psi}\right)=\sum_{s=2}^n\frac{\partial}{\partial z_s}\sum_{p<r}\frac{(-1)^{p+r}}{J}\begin{vmatrix}A_p^1 & A_p^s\\ A_r^1 & A_r^s\end{vmatrix}\mathbf{D}_{n-2}^{p,r}(\overline{\partial\psi}),$$

где $\mathbf{D}_{n-2}^{p,r}$ — определитель, получающийся из $\mathbf{D}_{1,1,n-2}$ вычеркиванием первых двух столбцов и строк с номерами p, r.

По свойству определителей из алгебраических дополнений (см. [7, с. 31]) получим, что

$$\begin{vmatrix}A_p^1 & A_p^s\\ A_r^1 & A_r^s\end{vmatrix}=J\cdot A_{p,r}^{1,s}, \tag{11}$$

где $A_{p,r}^{1,s}$ — алгебраические дополнения в матрице Якоби отображения ψ к минору, стоящему на пересечении 1-го и s-го столбцов и p-й и r-й строк.

С другой стороны, как нетрудно показать,

$$\sum_{s=2}^n\frac{\partial}{\partial z_s}A_{p,r}^{1,s}=0. \tag{12}$$

Отсюда и из (11) получаем требуемое. Кроме того, (11) показывает, что в равенстве (10) определители $\mathbf{D}_{1,1,n-2}$ не имеют особенностей. □

Из доказательства леммы 5 вытекает, что равенство (10) эквивалентно следующему:

$$\sum_{s\neq k}^n\frac{\partial}{\partial z_s}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\bar\partial_\zeta\beta_{k,s}\wedge d\zeta=0\quad\text{для } z\notin\partial D, \tag{13}$$

где

$$\beta_{k,s}=\frac{1}{|\psi(\zeta-z)|^{2n-4}}\sum_{p<r}\sum_{l<m}(-1)^{p+r}A_{p,r}^{k,s}(\zeta-z)\overline{A_{p,r}^{l,m}(\zeta-z)}d\bar\zeta[l,m].$$

Поэтому нам нужно выяснить вопрос о плотности линейных комбинаций дробей более общего вида, чем в предложении 1, в классе $\mathscr{C}^k(\partial D)$.

Предложение 2. *Пусть $n > 2$ и $\partial D \in \mathscr{C}^d$. Линейные комбинации дробей вида*

$$Q_{l,s,m,k}(\zeta - z) = \sum_{1 \le p < r \le n} \frac{A^{l,s}_{p,r}(\zeta - z)\overline{A^{m,k}_{p,r}(\zeta - z)}}{|\psi(\zeta - z)|^{2n-4}},$$

$z \notin \partial D$, $\zeta \in \partial D$, $k, s, m, l, = 1, \dots, n$, плотны в пространстве $\mathscr{C}^u(\partial D)$, $0 \le u \le d$.

Доказательство. Из тождества (12) для любых $s, p, r = 1, \dots, n$ получаем

$$\sum_{l<s} \frac{\partial}{\partial z_l} A^{l,s}_{p,r} - \sum_{l>s} \frac{\partial}{\partial z_l} A^{s,l}_{p,r} = 0. \tag{14}$$

Действительно, заменим в тождестве (12) переменную z_1 на z_s, а z_s на z_1. Затем поставим первые столбцы в полученном выражении на свое место, приходим к (14).

Пусть $p < r$. Тогда

$$\sum_{l<s} \frac{\partial \psi_q}{\partial z_l} A^{l,s}_{p,r} - \sum_{l>s} \frac{\partial \psi_q}{\partial z_l} A^{s,l}_{p,r} = \begin{cases} A^s_r, & \text{если} \quad q = p, \\ -A^s_p, & \text{если} \quad q = r, \\ 0, & \text{если} \quad q \ne p, r. \end{cases} \tag{15}$$

Данное тождество выводится с помощью обычного правила раскрытия определителя по одной из строк с учетом знаков алгебраических дополнений $A^{l,s}_{p,r}$ и A^s_p.

Используя равенства (14) и (15), для фиксированных s, m, k имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{l<s} \frac{\partial}{\partial z_l} Q_{l,s,m,k} - \sum_{l>s} \frac{\partial}{\partial z_l} Q_{s,l,m,k} \\
&\qquad = -(n-2) \frac{\sum\limits_{p<r} \sum\limits_{q} \Big(\sum\limits_{l<s} \bar\psi_q \frac{\partial \psi_q}{\partial z_l} A^{l,s}_{p,r} - \sum\limits_{l>s} \bar\psi_q \frac{\partial \psi_q}{\partial z_l} A^{s,l}_{p,r} \Big) \overline{A}^{m,k}_{p,r}}{|\psi|^{2n-2}} \\
&\qquad\qquad = -(n-2) \frac{\sum\limits_{p<r} \big(\bar\psi_p A^s_r - \bar\psi_r A^s_p \big) \overline{A}^{m,k}_{p,r}}{|\psi|^{2n-2}} = R_{s,m,k}.
\end{aligned}$$

Далее, снова применяя равенства (14) и (15), для фиксированных s, k получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{m<k} \frac{\partial}{\partial \bar z_m} R_{s,m,k} - \sum_{m>k} \frac{\partial}{\partial \bar z_m} R_{s,k,m} \\
&\qquad = -\frac{(n-2)}{|\psi|^{2n-2}} \sum_{p<r} \Bigg[A^s_r \Bigg(\sum_{m<k} \overline{\frac{\partial \psi_p}{\partial z_m}} \overline{A}^{m,k}_{p,r} - \sum_{m>k} \overline{\frac{\partial \psi_p}{\partial z_m}} \overline{A}^{k,m}_{p,r} \Bigg) \\
&\qquad\qquad - A^s_p \Bigg(\sum_{m<k} \overline{\frac{\partial \psi_r}{\partial z_m}} \overline{A}^{m,k}_{p,r} - \sum_{m>k} \overline{\frac{\partial \psi_r}{\partial z_m}} \overline{A}^{k,m}_{p,r} \Bigg) \Bigg] \\
&\qquad + \frac{(n-2)(n-1)}{|\psi|^{2n}} \sum_{p<r} \big(\bar\psi_p A^s_r - \bar\psi_r A^s_p \big) \Bigg[\sum_{m<k} \overline{A}^{m,k}_{p,r} \sum_q \psi_q \overline{\frac{\partial \psi_q}{\partial z_m}} \\
&\qquad - \sum_{m>k} \overline{A}^{k,m}_{p,r} \sum_q \psi_q \overline{\frac{\partial \psi_q}{\partial z_m}} \Bigg] = -\frac{(n-2)}{|\psi|^{2n-2}} \sum_{p<r} \big(A^s_r \overline{A}^k_r + A^s_p \overline{A}^k_p \big)
\end{aligned}$$

$$+\frac{(n-2)(n-1)}{|\psi|^{2n}}\sum_{p<r}\big(\bar\psi_p A_r^s-\bar\psi_r A_p^s\big)\big(\psi_p\overline{A}_r^k-\psi_r\overline{A}_p^k\big)$$
$$=-\frac{(n-2)(n-1)}{|\psi|^{2n}}\Big(\sum_r\psi_r A_r^s\Big)\Big(\sum_p\bar\psi_p\overline{A}_p^k\Big).$$

Заменяя производные разностными отношениями и применяя предложение 1, приходим к требуемому. □

Теорема 1. *Пусть $\partial D\in\mathscr{C}^2$, $f\in\mathscr{C}(\partial D)$. Если*

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta)\Phi_k(\zeta-z)U(\psi(\zeta-z))=0\quad \textit{для всех } z\notin\partial D,\ k=1,\dots,n, \tag{16}$$

где

$$\Phi_k(\zeta-z)=\frac{1}{J(\zeta-z)}\sum_{s=1}^n A_s^k(\zeta-z)\psi_s(\zeta-z),$$

то функция f голоморфно продолжается в D до функции $F\in\mathscr{C}(\overline{D})$.

Условие (16) (как показывает формула (4)) эквивалентно следующему:

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta)\frac{\sum\limits_{s=1}^n A_s^k(\zeta-z)\psi_s(\zeta-z)}{|\psi(\zeta-z|^{2n}}\mathbf{D}_{1,n-1}(\bar\psi,\overline{\partial_\zeta\psi})\wedge d\zeta=0,$$

поэтому, несмотря на наличие якобиана J в знаменателе, подынтегральное выражение в формуле (16) не имеет особенностей при $\zeta\neq z$.

Доказательство. Случай двух переменных разобран в [4]. Пусть $n>2$. Запишем условие теоремы в виде равенства (13). Воспользовавшись леммой 5 и предложением 2, приблизим линейными комбинациями дробей из этого предложения в классе $\mathscr{C}^2(\partial D)$ функцию $|\zeta-z|^{4-2n}$, $\zeta\in\partial D$, а z фиксировано и не лежит на ∂D. Тогда из (16) получим

$$\sum_{s\neq k}\frac{\partial}{\partial z_s}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\bar\partial_\zeta\left[\frac{1}{|\zeta-z|^{2n-4}}\mathbf{D}_{1,1,n-2}\big(\widetilde{A}^k,\widetilde{A}^s,\overline{\partial_\zeta(\zeta-z)}\big)\wedge d\zeta\right]=0,$$

$z\notin\partial D$, где $\widetilde{A}^k$ — соответствующие алгебраические дополнения для тождественного отображения $\tilde\psi(\zeta-z)=\zeta-z$. Леммы 3 и 4 показывают, что данное условие можно записать в виде

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)(\zeta_k-z_k)U(\zeta-z)=0,\quad z\notin\partial D,\ k=1,\dots,n,$$

где $U(\zeta-z)$ — ядро Бохнера — Мартинелли.

Применяя к левой части последнего равенства оператор Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial\bar z_1}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial z_n\partial\bar z_n}$$

и используя гармоничность коэффициентов ядра Бохнера — Мартинелли, имеем

$$\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta-z)=0,\quad z\notin\partial D,\ k=1,\dots,n.$$

Таким образом, интеграл Бохнера — Мартинелли от функции f является голоморфной функцией вне границы области D. Поскольку ∂D связна и данный интеграл стремится к 0 при $|z| \to \infty$, то вне области D он равен нулю. По теореме о скачке интеграла Бохнера — Мартинелли (см., например [8, гл. 1]) получаем, что требуемое голоморфное продолжение дается интегралом Бохнера — Мартинелли. $\square$

Перейдем теперь к получению аналога теоремы Морера. Рассмотрим класс комплексных кривых $L_{z,b}$ следующего вида:

$$L_{z,b} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ \zeta_1 = z_1 + t^{k_1}, \ \zeta_j = z_j + b_j t^{k_j} \chi_j(t^{k_1}), \ j = 2, \dots, n, \ t \in \mathbb{C}\},$$

где $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$; $b = (1, b_2, \dots, b_n)$; $\chi_j(\tau)$ — голоморфные функции, определенные в окрестности проекции компакта K_D на координатную плоскость z_1, причем эти функции не обращаются в 0 ни в одной точке, $j = 2, \dots, n$. Если зафиксировать точку z в некоторой окрестности замыкания области D, то для любой точки ζ, лежащей в этой же окрестности и такой, что $z_1 \neq \zeta_1$, найдется кривая $L_{z,b}$ (при подходящем выборе вектора b), проходящая через ζ. Все кривые $L_{z,b}$ при фиксированном z пересекаются в точке 0. Если же они пересекаются еще в какой-то точке, то нетрудно показать, что j-е координаты векторов b для них получаются друг из друга поворотом на угол, кратный $\frac{1}{k_1} 2\pi k_j$. Поэтому, чтобы однозначно определить вектор b, будем считать, что аргумент b_j удовлетворяет условию

$$0 \leq \arg b_j < 2\pi r_j, \quad j = 2, \dots, n, \tag{17}$$

где r_j — дробная часть числа $\frac{1}{k_1} k_j$ (если k_j делится на k_1, то никаких условий на $\arg b_j$ не налагается).

По сути дела, $L_{z,b}$ — это параметризация следующих комплексных кривых, заданных в явном виде: $\{\zeta : \zeta_j = z_j + b_j (\zeta_1 - z_1)^{\frac{k_j}{k_1}} \chi_j(\zeta_1 - z_1), \ j = 2, \dots, n\}$.

Следовательно, при фиксированном z мы получаем расслоение окрестности $\overline{D} \setminus \{\zeta : \zeta_1 = z_1\}$ на кривые $L_{z,b}$ для векторов b, удовлетворяющих условию (17). Теорема Сарда тогда показывает, что для почти всех b, удовлетворяющих данному условию, пересечение $L_{z,b}$ с границей ∂D либо пусто, либо является объединением конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых.

Введем голоморфные функции

$$\psi_1(\zeta) = \zeta_1^{p_1}, \quad \psi_j = \frac{\zeta_j^{p_j}}{\chi_j^{p_j}(\zeta_1)}, \quad j = 2, \dots, n,$$

где натуральные числа p_j выбраны так, чтобы $p_1 k_1 = \dots = p_n k_n = p$. Эти функции голоморфны в окрестности компакта K_D и имеют только один общий нуль — начало координат кратности $\mu = p_1 \dots p_n$. Поэтому для данных функций справедлива теорема 1. Рассмотрим ядро $U(\psi(\zeta - z))$ в новых координатах t, b. Оно будет иметь вид

$$U(\psi^*(t, b)) = \frac{dt}{t} \wedge \lambda(b),$$

где

$$\lambda(b) = \frac{p(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{(-1)^{n-1} d\bar{b}_2^{p_2} \wedge \dots \wedge d\bar{b}_n^{p_n} \wedge db_2^{p_2} \wedge \dots \wedge db_n^{p_n}}{\left(1 + \sum\limits_{j=2}^{n} |b_j|^{2p_j}\right)^n}.$$

Здесь $\psi^*(t,b)$ — композиция отображения $\psi(\zeta-z)$ и отображения $\zeta - z$, задающего кривые $L_{z,b}$. И в дальнейшем символ $*$ означает переход от переменных ζ к новым переменным (t,b), участвующим в определении кривых $L_{z,b}$.

Действительно, $\psi_1^*(t,b)=t^p$, $\psi_j^*(t,b)=b_j^{p_j}t^p$, $j=2,\dots,n$. Поэтому

$$|\psi(\zeta-z)|^2 = |\psi^*(t,b)|^2 = |t|^{2p}\left(1+\sum_{j=2}^n |b_j|^{2p_j}\right).$$

Имеем

$$d\psi^* = d\psi_1^*\wedge\dots\wedge d\psi_n^* = pt^{pn-1}dt\wedge db_2^{p_2}\wedge\dots\wedge db_n^{p_n}$$

и

$$\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\psi_k^* d\psi^*[k] = t^p d\psi_2^*\wedge\dots\wedge d\psi_n^* + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1}b_k^{p_k}t^p d\psi^*[k]$$
$$= t^{pn}db_2^{p_2}\wedge\dots\wedge db_n^{p_n} + pt^{pn-1}\left(\sum_{j=2}^n(-1)^{j-2}b_j^{p_j}dt\wedge db_2^{p_2}\wedge\dots[j]\dots\wedge db_n^{p_n}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=2}^n(-1)^{k-1}b_k^{p_k}t^{pn-1}dt\wedge db_2^{p_2}\wedge\dots[k]\dots\wedge db_n^{p_n}\right) = t^{pn}db_2^{p_2}\wedge\dots\wedge db_n^{p_n}.$$

Рассмотрим, во что превратится условие (16) в теореме 1 для данного отображения ψ, в частности, найдем функции Φ_j в новых координатах t,b. Обозначим функции $\frac{1}{\chi_j^{p_j}}$ через γ_j, $j=2,\dots,n$. Имеем

$$J(\zeta-z) = p_1\dots p_n(\zeta_1-z_1)^{p_1-1}\dots(\zeta_n-z_n)^{p_n-1}\gamma_2(\zeta_1-z_1)\dots\gamma_n(\zeta_1-z_1).$$

Вектор-столбцы A^s примут вид

$$A^1 = (p_2\dots p_n(\zeta_2-z_2)^{p_2-1}\dots(\zeta_n-z_n)^{p_n-1}\gamma_2\dots\gamma_n,0,\dots,0),$$
$$A^2 = (-p_3\dots p_n(\zeta_2-z_2)^{p_2}(\zeta_3-z_3)^{p_3-1}\dots(\zeta_n-z_n)^{p_n-1}\gamma_2'\gamma_3\dots\gamma_n,$$
$$p_1p_3\dots p_n(\zeta_1-z_1)^{p_1-1}(\zeta_3-z_3)^{p_3-1}\dots(\zeta_n-z_n)^{p_n-1}\gamma_1\gamma_3\dots\gamma_n,0,\dots,0),\dots,$$
$$A^n = (-p_2\dots p_{n-1}(\zeta_2-z_2)^{p_2-1}\dots(\zeta_{n-1}-z_{n-1})^{p_{n-1}-1}(\zeta_n-z_n)^{p_n}\gamma_2\dots\gamma_{n-1}\gamma_n',$$
$$0,\dots,p_1\dots p_{n-1}(\zeta_1-z_1)^{p_1-1}\dots(\zeta_{n-1}-z_{n-1})^{p_{n-1}-1}\gamma_1\dots\gamma_{n-1}).$$

Вычисляя функции Φ_j, получим

$$\Phi_1(\zeta-z)=\frac{\zeta_1-z_1}{p_1},\quad \Phi_2(\zeta-z)=\frac{\zeta_2-z_2}{p_2}-\frac{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)\gamma_2'}{\gamma_2p_1p_2},\dots,$$
$$\Phi_n(\zeta-z)=\frac{\zeta_n-z_n}{p_n}-\frac{(\zeta_1-z_1)(\zeta_n-z_n)\gamma_n'}{\gamma_np_1p_n}.$$

В координатах $t,\ b$ эти функции имеют вид

$$\Phi_1^*(t,b)=\frac{t}{p}(t^{k_1})',\quad \Phi_2^*(t,b)=\frac{b_2t}{p}(t^{k_2}\chi_2(t^{k_1}))',\dots,\Phi_n^*(t,b)=\frac{b_nt}{p}(t^{k_n}\chi_n(t^{k_1}))'.$$

Теорема 2. *Пусть $\partial D \in \mathscr{C}^2$ и функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_{\partial D \cap L_{z,b}} f^*(t,b)\, d(t^{k_j}\chi_j) = 0$$

для всех $j = 1, \dots, n$, почти всех точек z, лежащих в окрестности $\overline{D}$, и почти всех векторов b, удовлетворяющих условию (17), тогда функция f голоморфно продолжается в область D до функции F из класса $\mathscr{C}(\overline{D})$ (считается, что $\chi_1 = 1$ при $j = 1$).

Доказательство. Из теоремы 1 и из вида формы $U(\psi)$ и функций Φ_j в координатах t, b, а также из теоремы Фубини следует, что

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta)\Phi_j(\zeta - z)U(\psi(\zeta - z)) = \int\limits_{\mathbb{C}^{n-1}} \lambda(b) \int\limits_{\partial D \cap L_{z,b}} f^*(t,b)\, d(t^{k_j}\chi_j) = 0.$$

Теорема 2 является обобщением граничной теоремы Морера, приведенной в [1], где рассмотрен случай комплексных прямых $L_{z,b}$.

Если $\chi_j \equiv 1$, $j = 1, \dots, n$, то теорема 2 превращается в граничный вариант теоремы Морера для алгебраических кривых.

Как следствие получаем обобщение теоремы 3 из [3] о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных кривых.

Функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных кривых вида* $L_{z,b}$, если для любой кривой $L_{z,b}$ такой, что $L_{z,b} \cap \partial D \neq \varnothing$, существует функция $F_{z,b}(t)$ со следующими свойствами:

a) $F_{z,b} \in \mathscr{C}(\overline{D} \cap L_{z,b})$,

b) $F_{z,b} = f$ на множестве $\partial D \cap L_{z,b}$,

c) функция $F_{z,b}$ голоморфна по t во внутренних (относительно топологии $L_{z,b}$) точках множества $\overline{D} \cap L_{z,b}$.

Следствие 2. *Если $\partial D \in \mathscr{C}^2$ и функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных кривых $L_{z,b}$, то f голоморфно продолжается в D.*

Данное утверждение обобщает известную теорему Стаута [9] о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых и теорему 3 из [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Globevnik J., Stout E. L.* Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1991. V. 64, N 3. P. 571–615.
2. *Аграновский М. Л., Семенов А. М.* Граничные аналоги теоремы Гартогса // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 1. С. 160–170.
3. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* Об одном граничном аналоге теоремы Морера // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1350–1351.
4. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О голоморфном продолжении функций вдоль комплексных кривых и аналоге теоремы Морера // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и численные методы и приложения. Уфа: Ин-т математики с ВЦ РАН. 1996. Т. 2. С. 71–77.
5. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О голоморфности функций, представимых формулой логарифмического вычета // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 351–361.
6. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. Новосибирск: Наука, 1975.

7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.

8. *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера — Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.

9. *Stout E. L.* The boundary values of holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1977. V. 44, N 1. P. 105–108.

Статья поступила 17 февраля 1997 г.

Мысливец Симона Глебовна
Красноярский гос. университет, просп. Свободный, 79, Красноярск 660041
simona@lan.krasu.ru