Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2001. Том 42, № 3

УДК 517.5+ 513.88

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ. II. ВОПРОСЫ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Е. И. Бережной

Аннотация: Для пространств функций обобщенной ограниченной вариации с помощью единого подхода получены как известные признаки равномерной сходимости рядов Фурье (Салема — Осколкова — Юнга, Чантурии, Ватермана), так и новые. Кроме того, показано, что признак Ватермана для равномерной сходимости рядов Фурье самый сильный, причем усилить его нельзя. Приведена теорема о точных оценках коэффициентов Фурье для пространств функций ограниченной вариации, которая содержит классические результаты, уточняет ряд известных и содержит новые. Библиогр. 19.

Введение

Настоящая работа является продолжением [1] и посвящена исследованию вопросов равномерной сходимости рядов Фурье в пространствах функций обобщенной ограниченной вариации. На основе теорем 7 и 8 из [1] здесь предлагается единый метод получения признаков равномерной сходимости рядов Фурье для различных классов функций обобщенной ограниченной вариации. Мы демонстрируем этот метод для доказательства следующих известных признаков равномерной сходимости рядов Фурье: признака равномерной сходимости рядов Фурье для классов Винера — Юнга, принадлежащего Р. Салему [2] (достаточность) и К. И. Осколкову [3] и А. Баерштейну [4] (необходимость), признака равномерной сходимости рядов Фурье для функций с конечным модулем изменения, принадлежащего З. А. Чантурии [5], признака равномерной сходимости рядов Фурье для функций из классов Д. Ватермана [6]. Отметим, что все вышеперечисленные признаки доказывались их авторами другими способами, отличными от предлагаемого в этой статье. С помощью этого метода мы доказываем признаки равномерной сходимости рядов Фурье для функций, вариация которых вычисляется с помощью пространств $M^p(\varphi), \Lambda^p(\varphi), l^p_h$ и т. п., которые являются, по-видимому, новыми. Кроме того, в конце работы выясняются взаимные связи между различными признаками равномерной сходимости рядов Фурье. Оказалось, что признак Ватермана для равномерной сходимости рядов Фурье самый сильный, причем его усилить нельзя. Заключает работу простая теорема о точных оценках коэффициентов Фурье для пространств функций ограниченной вариации, которая содержит классические результаты, уточняет

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00843).

ряд известных и содержит новые. Для понимания работы желательно знакомство с [1], хотя бы в части определений и обозначений, впрочем два основных определения мы напомним.

Пусть $\{e^i\}_1^\infty$ — стандартный базис в пространстве числовых последовательностей. Для каждой числовой последовательности $a = \{a_i\}_1^\infty = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e^i$ через $a^* = \{a_i^*\}_1^\infty$ обозначим невозрастающую перестановку последовательности $\{|a_i|\}_{i=1}^\infty$. Пространство последовательностей X называется *идеальным*, если для любой последовательности $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ с $|\mu_i| \le 1$ и любого $a \in X$ выполнено неравенство

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i a_i e^i |X\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^i |X\right\|,$$

если к тому же и $\|a|X\| = \|a^*|X\|$, то пространство X называется *симметричным.* Теория симметричных пространств достаточно полно изложена в [7, 8], а необходимые для нас факты можно найти и в [1]. Примеры симметричных пространств последовательностей, которые играли важную роль в [1] и будут играть важную роль здесь, приведены в [1].

Пусть J — некоторый отрезок. Для определенности будем считать $J = [0, 1]$.

Определение 1 [9]. Пусть X — симметричное пространство последовательностей. *Пространством функций обобщенной ограниченной вариации* $BV(X)$ называется множество функций $f : J \to \mathbb{R}$, для которых конечна норма

$$\|f|BV(X)\| = \sup\Big\{\Big\|\sum f(J_i)e^i|X\Big\| : \Big\{\bigcup_i J_i \subseteq J\Big\}\Big\} + \sup_{t\in J}|f(t)|,$$

где через $\{J_i\}$ обозначен набор интервалов из J с непересекающимися внутренностями, $f(J_i) = f(b_i) - f(a_i)$ для $J_i = (a_i, b_i)$.

Примеры, иллюстрирующие, как нужно выбирать симметричное пространство последовательностей, чтобы получить, например, пространство функций с конечной h-вариацией в смысле Винера — Юнга, с конечной Λ-вариацией Ватермана, с конечным модулем ограниченного изменения Чантурии и т. п., приведены в [1].

1. Признаки сходимости для конкретных пространств функций обобщенной ограниченной вариации

Продемонстрируем возможность получения на базе теоремы 7, теоремы 8 и ее следствий из [1] различных признаков равномерной сходимости рядов Фурье.

Для того чтобы выписать конкретные признаки сходимости рядов Фурье в разных случаях, нам понадобится некоторая более детальная информация из теории симметричных пространств последовательностей. Начнем с описания конструкции Кальдерона — Лозановского [10, 11].

Пусть $U(2)$ — множество непрерывных вогнутых функций $\varphi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^1$, каждая из которых положительно однородна первой степени. Пусть X_0, X_1 — два идеальных пространства последовательностей, $\varphi \in U(2)$. Новое идеальное пространство $\varphi(X_0, X_1)$ (конструкция Кальдерона — Лозановского) состоит из тех последовательностей, для которых конечна норма

$$\left\| \sum_1^\infty a_i e^i | \varphi(X_0, X_1) \right\| = \{\inf \lambda > 0 : \exists \{x_i\} \in B(1, X_0)$$
$$\exists \{y_i\} \in B(1, X_1) \, \forall i \in \mathbb{N} \quad |a_i| \le \lambda \varphi(x_i, y_i)\}.$$

Конструкция $\varphi(X_0, X_1)$ для $\varphi(t,s) = t^\theta s^{1-\theta}$ с $0 < \theta < 1$ введена А. П. Кальдероном [10], а для $\varphi \in U(2)$ — Г. Я. Лозановским [11] и тесно связана со способом построения пространств Орлича. В частности, если при $t > 0$ положить $\varphi(1,t) = h^{-1}(t)$, то $\varphi(l^1, l^\infty) = l_h$. С функцией $\varphi \in U(2)$ тесно связана функция $\widehat{\varphi} \in U(2)$, определяемая следующим образом [11]:

$$\widehat{\varphi}(t,s) = \inf_{a,b>0} \frac{at + bs}{\varphi(a,b)}.$$

С точностью до эквивалентных норм верно равенство [11]

$$\varphi(X_0, X_1)' = \widehat{\varphi}(X_0', X_1'), \tag{1}$$

причем константа эквивалентности не зависит от φ, X_0, X_1. Точное же соотношение дуальных норм в (1) дано в [12].

Сразу же отметим, что если X — симметричное пространство и $\varphi \in U(2)$, то для фундаментальных функций пространств $\varphi(X, l^\infty)$, $\varphi(l^\infty, X)$ верны равенства

$$\psi(\varphi(X, l^\infty), n) = \frac{1}{\varphi(\frac{1}{\psi(X,n)}, 1)}, \quad \psi(\varphi(l^\infty, X), n) = \frac{1}{\varphi\big(1, \frac{1}{\psi(X,n)}\big)}. \tag{2}$$

Кроме того, нам потребуется следующее простое наблюдение. Если X_0, X_1 — симметричные пространства последовательностей и φ_0, φ_1, $\varphi_2 \in U(2)$, то найдутся $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \in U(2)$ такие, что верны равенства

$$\begin{gathered} \varphi_0(\varphi_1(X_0, X_1), \varphi_2(X_0, X_1)) = \varphi_3(X_0, X_1), \\ \varphi_0(X_0, \varphi_2(X_0, X_1)) = \varphi_4(X_0, X_1), \quad \varphi_0(\varphi_1(X_0, X_1), X_1) = \varphi_5(X_0, X_1), \end{gathered} \tag{3}$$

т. е. конструкция Кальдерона — Лозановского замкнута относительно итераций. Отметим, что мы привели определение конструкции Кальдерона — Лозановского для пространств последовательностей. В случае идеальных пространств, заданных на произвольном пространстве с мерой, определение аналогично.

Для того чтобы признаки сходимости выглядели более просто и обозримо, нам потребуется еще одна техническая лемма, которая будет нужна и при сравнении наиболее известных признаков сходимости для рядов Фурье.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in U(2)$ и*

$$\left\| \sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i | \varphi(l^1, l^\infty) \right\| < K. \tag{4}$$

Определим функцию ψ равенством

$$\psi(n) = \frac{1}{\varphi(\frac{1}{n}, 1)} \tag{5}$$

и построим по ней соответствующее пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ (ψ квазивогнута, так как согласно (2) является фундаментальной функцией).

Тогда выполнены неравенства

$$C\left\|\sum_1^\infty \frac{1}{i}e^i|\varphi(l^1,l^\infty)\right\| \le \left\|\sum_1^\infty \frac{1}{i}e^i|\Lambda(\psi)\right\| \le C^{-1}\left\|\sum_1^\infty \frac{1}{i}e^i|\varphi(l^1,l^\infty)\right\|. \tag{6}$$

Доказательство. Первое неравенство в (6) следует из теоремы вложения Е. М. Семенова для симметричных пространств (см. [7] или [1, формула (4)]), (2) и (5). Проверим второе неравенство. Условие (4) эквивалентно следующему: найдется монотонная последовательность $\{\alpha_i\} \in l^1$ такая, что

$$\alpha_1 \le 1; \quad 2^{-i} \le K\varphi(\alpha_i,1)\ (\forall i \in \mathbb{N}); \quad \sum \alpha_i 2^i = C_1 < \infty.$$

С последовательностью $\{\alpha_i\}$ свяжем новую последовательность

$$\beta_1 = 1, \dots, \beta_i = \max\{0.1\beta_{i-1}, \alpha_i\}, \dots.$$

Тогда β_i монотонна и верны соотношения

$$2^{-i} \le K\varphi(\alpha_i,1) \le K\varphi(\beta_i,1), \quad \beta_{i+1} \le \beta_i \le 10\beta_{i+1}, \quad \sum_1^\infty 2^i\beta_i \le 2C_1. \tag{7}$$

Два первых условия в (7) очевидны. Проверим третье условие. Пусть

$$\beta_k = \alpha_k, \quad \beta_{k+1} = 0.1\alpha_k, \quad \beta_{k+2} = 0.01\alpha_k, \quad \beta_{k+l} = 10^{-l}\alpha_k, \dots, \beta_{k+l+1} = \alpha_{k+l+1}.$$

Тогда

$$\sum_{j=k}^{k+l} 2^j\beta_j = 2^k\alpha_k + \frac{2^{k+1}}{10}\alpha_k + \dots + \frac{2^{k+l}}{10^l}\alpha_k \le 2^k\alpha_k\left(1 + \frac{2}{10} + \dots + \left(\frac{2}{10}\right)^l\right) \le 2^{k+1}\alpha_k.$$

Из последнего неравенства и следует третье условие в (7). Используя (7) и определение функции ψ, получим

$$\left\|\sum_1^\infty \frac{1}{i}e^i|\Lambda(\psi)\right\| = \sum_1^\infty \frac{1}{i}\{\psi(i)-\psi(i-1)\} \le \sum_1^\infty \psi(i)\left\{\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right\} + \lim_{i\to\infty}\frac{\psi(i)}{i}$$

$$\le \sum_1^\infty \frac{\psi(i)}{i(i+1)} + C_2 = \sum_1^\infty \frac{1}{\varphi(1,i)(i+1)} + C_2 \le \sum_i\left\{\sum_{\beta_i^{-1} \le j < \beta_{i+1}^{-1}} \frac{1}{\varphi(1,j)(j+1)}\right\} + C_2$$

$$\le C_3\sum_1^\infty \frac{\ln\frac{\beta_i}{\beta_{i+1}}}{\varphi(1,\beta_i{}^{-1})} + C_2 \le C_4\sum_1^\infty \frac{1}{\varphi(1,\beta_i{}^{-1})} + C_2.$$

Из (7) вытекает, что

$$K^{-1} \le 2^i\varphi(\beta_i,1) = 2^i\beta_i\varphi(1,\beta_i{}^{-1}).$$

Поэтому

$$\left\|\sum_1^\infty \frac{1}{i}e^i|\Lambda(\psi)\right\| \le C_2 + C_4K\sum 2^i\beta_i \le C_2 + 2KC_1C_4.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнено* (5) *и для симметричного пространства последовательностей* X *имеют место непрерывные вложения*

$$\Lambda(\psi) \subseteq X \subseteq \varphi(l^1, l^\infty).$$

Тогда

$$\left\| \sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i | X \right\| \simeq \left\| \sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i | \Lambda(\psi) \right\|.$$

Теперь наша задача будет состоять в том, чтобы выделить те симметричные пространства, для которых можно применить следствие 1 теоремы 8 из [1].

Пусть X — симметричное пространство последовательностей. Зафиксируем $k = 2, 3, \dots$. Для каждого вектора $a = \sum\limits_i a_i e^i \in X$ определим числа

$$\bar{\psi}(m, k, a, X) = \left\| \sum_{i=m}^\infty a_i \left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{ik+j} \right) | X \right\|, \quad \psi(k, a, X) = \lim_{m \to \infty} \bar{\psi}(m, k, a, X).$$

Будем говорить, что пространство X *принадлежит классу* E ($X \in E$), если для любого $a \in X$ верно равенство

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi(k, a, X)}{k} = 0.$$

Сразу же отметим, что если X — правильное пространство, то $\psi(k, a, X) = 0$ для всех a из X и поэтому $X \in E$.

Сейчас мы покажем, что если $X \in E$, то

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\left\| \sum\limits_m^\infty \frac{1}{i} e^i | \varphi(l^1, X) \right\|}{\left\| \sum\limits_1^\infty \frac{1}{i} e^i | \varphi(l^1, X) \right\|} = 0. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть* X *— симметричное пространство,* $X \in E$, *и пусть* $\varphi \in U(2)$, $\varphi(l^1, X)$ *— пространство, построенное с помощью конструкции Кальдерона — Лозановского по* φ, l^1, X. *Пусть, кроме того,*

$$\left\| \sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i | \varphi(l^1, X) \right\| = C < \infty.$$

Тогда выполнено (8).

Доказательство. Найдем две последовательности

$$\sum a_i e^i \in B(1, l^1), \quad \sum b_i e^i \in B(1, X)$$

такие, что при всех $i \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\frac{1}{i} \leq C\varphi(a_i, b_i)$.

Зафиксируем $k, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{kn}^\infty \frac{1}{j} e^j = \sum_n^\infty \frac{1}{ki} e^{ki} + \sum_n^\infty \frac{1}{ki+1} e^{ki+1} + \dots + \sum_n^\infty \frac{1}{k(i+1)-1} e^{k(i+1)-1}.$$

Так как для $0 \leq l \leq k-1$ верно неравенство $\frac{1}{kn+l} \leq \frac{1}{kn}$, то

$$\sum_{kn}^\infty \frac{1}{j} e^j \leq \frac{1}{k} \varphi\left(\sum_{i=n} a_i \sum_{j=0}^{k-1} e^{ki+j}, \sum_{i=n} b_i \sum_{j=0}^{k-1} e^{ki+j} \right) \tag{9}$$

(неравенство между векторами следует понимать как покомпонентное). Из неравенства (9) и определения чисел $\bar\psi(m,k,a,l^1)$, $\bar\psi(m,k,b,X)$ следует, что для векторов

$$x^0_{m,k} = \frac{1}{k}\sum_{i=m}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{k-1} e^{ki+j}, \quad x^1_{m,k} = \frac{1}{k}\sum_{i=m}^{\infty} b_i \sum_{j=0}^{k-1} e^{ki+j}$$

верны соотношения

$$\sum_{km}^{\infty} \frac{1}{j} e^j \le C\varphi\big(x^0_{m,k}, x^1_{m,k}\big),$$

$$\big\|x^0_{m,k}|l^1\big\| \le \frac{1}{k}\bar\psi(m,k,a,l^1), \qquad \big\|x^1_{m,k}|l^1\big\| \le \frac{1}{k}\bar\psi(m,k,b,X).$$

Поскольку $\psi(k,a,l^1) = 0$ для всех $a \in l^1$, а из $X \in E$ находим, что

$$\frac{\bar\psi(m,k,b,X)}{k} \to 0$$

при $k \to \infty$, то выполнено (8). Лемма доказана.

Сразу же отметим, что

$$\bar\psi(m,k,a,l^\infty) \le \|a|l^\infty\|. \tag{10}$$

Поэтому для пространства $\varphi(l^1, l^\infty)$ справедливо условие (8).

Следующая лемма носит иной характер. А именно, в ней показано, что при некотором условии на $\varphi \in U(2)$ пространство $\varphi(l^1, X)$ тоже удовлетворяет (8) независимо от свойств X.

Лемма 3. *Пусть*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{a>0} \frac{\varphi(\frac{a}{k}, 1)}{\varphi(a,1)} = 0. \tag{11}$$

Тогда пространство $\varphi(l^1, X)$ удовлетворяет (8).

Доказательство леммы следует из того, что при выполнении (11) согласно [13] пространство $\varphi(l^1, X)$ является правильным и, следовательно, для него выполняется (8).

Перейдем к признакам равномерной сходимости рядов Фурье. Сначала покажем, как в общей схеме получаются классические признаки сходимости рядов Фурье. Начнем с критерия З. А. Чантурия.

Напомним [1], что через U обозначается класс таких последовательностей, что

$$\varphi_i > 0, \quad 2\varphi_i \ge \varphi_{i-1} + \varphi_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots); \quad \lim_{i\to\infty} \varphi_i = \infty, \quad \lim_{i\to\infty} \frac{\varphi_i}{i} = 0.$$

Теорема 1 [5]. *Пусть $\{\varphi_i\} \in U$, $M(\varphi)$ — пространство Марцинкевича. Для того чтобы для любой непрерывной функции из пространства $BV(M(\varphi))$ ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi_i}{i(i+1)} = K < \infty. \tag{12}$$

Эта теорема получается из следствия 2 теоремы 8 из [1], если заметить, что пространство Лоренца является правильным [7], справедливо соотношение $M(\varphi)' = \Lambda(\varphi)$ [7] и верно равенство

$$\left\|\sum \frac{1}{i} e^i |\Lambda(\varphi)\right\| = K.$$

Следующий признак принадлежит Р. Салему (достаточность) и К. И. Осколкову и А. Баерштейну (необходимость).

Теорема 2 [2–4]. *Пусть $h(t)$ — N-функция [14], $h^*(t)$ — ей сопряженная, т. е.*

$$h^*(t) = \sup_{s>0}\{st - h(s)\}.$$

Для того чтобы для любой непрерывной функции f из пространства $BV(l_h)$ ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum h^*\left(\frac{1}{i}\right) < \infty.$$

Теорема 2 получается из теоремы 7 в [1], следствия 1 теоремы 8 в [1], соотношения (10), которое влечет, что $l^\infty \in E$, и леммы 2, если записать пространство Орлича с помощью конструкции Кальдерона — Лозановского, построенной по функции $\varphi(t,1) = h^{-1}(t)$ и пространствам l^1, l^∞, и вспомнить двойственность [11, 12]:

$$\varphi(l^1, l^\infty)' = \widehat{\varphi}(l^\infty, l^1).$$

Приведем еще несколько примеров применения теорем 7 и 8 из [1] для более сложных случаев пространств последовательностей.

Пусть $\{\varphi_i\} \in U$, $\Lambda(\varphi)$ — пространство Лоренца, а $M(\varphi)$ — пространство Марцинкевича. Прямой подсчет показывает, что

$$\Lambda(\varphi)^p = (l^\infty)^{1-s}(\Lambda(\varphi))^s, \quad M(\varphi)^p = (l^\infty)^{1-s}(M(\varphi))^s, \quad l_h^p = (l^\infty)^{1-s}(l_h)^s, \tag{13}$$

где $s = 1/p$. Согласно двойственности для конструкции Кальдерона — Лозановского справедливы и следующие равенства:

$$\{\Lambda(\varphi)^p\}' = (l^1)^{1-s}(M(\varphi))^s, \quad \{M(\varphi)^p\}' = (l^1)^{1-s}(\Lambda(\varphi))^s, \quad \{l_h^p\}' = (l^1)^{1-s}(l_{h^*})^s. \tag{14}$$

Отметим, что пространства $\{\Lambda(\varphi)^p\}'$, $\{l_h^p\}'$ при $p > 1$ и пространства $\{M(\varphi)^p\}'$ при $p \geq 1$ правильные. Опишем теперь пространства $\varphi_0(l^\infty, l_h^p)$, $\varphi_0(l^\infty, M^p(\psi))$, $\varphi_0(l^\infty, \Lambda^p(\psi))$. Для этого положим $h_0(t) = \varphi_0^{-1}(1,t)$ $(t > 0)$. Прямой подсчет показывает, что единичные шары этих пространств можно описать следующим образом:

$$B\big(1, \varphi_0\big(l^\infty, l_h^p\big)\big) = \Big\{\sum a_i e^i : \sum h\big(h_0^p(|a_i|)\big) \leq 1\Big\},$$

$$B(1, \varphi_0(l^\infty, M^p(\psi))) = \left\{\sum a_i e^i : \sup_j \frac{1}{\psi(j)} \sum_1^j h_0^p(a_i^*) \leq 1\right\},$$

$$B(1, \varphi_0(l^\infty, \Lambda^p(\psi))) = \left\{\sum a_i e^i : \sum_1^\infty h_0^p(a_i^*)(\psi_i - \psi_{i-1}) \leq 1\right\}.$$

Отметим, что пространство $\varphi_0\big(l^\infty, l_h^p\big)$ согласно (3) является пространством вида $\varphi_1(l^\infty, l^1)$ при некоторой $\varphi_1 \in U(2)$ и соответственно $BV\big(\varphi_0\big(l^\infty, l_h^p\big)\big)$ — пространством функций ограниченной вариации в смысле Винера — Юнга. Пространство $BV(\varphi_0(l^\infty, M^p(\psi)))$ является «смешанным» между пространством Чантурия и Винера — Юнга, а пространство $BV(\varphi_0(l^\infty, \Lambda^p(\psi)))$ — «смешанным» между пространствами Ватермана и Винера — Юнга. Эти пространства в частных случаях рассматривались, например, в работах [15, 16].

Теорема 3. *Пусть* $\{\theta_i\} \in U$, $M^p(\theta)$ — *пространство Марцинкевича,* $\varphi \in U(2)$, $BV(\varphi(l^\infty, M^p(\theta)))$ — *конструкция Кальдерона — Лозановского. Для того чтобы для всех непрерывных функций из* $BV(\varphi(l^\infty, M^p(\theta)))$ *ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\left\| \sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i | \widehat{\varphi}(l^1, (M^p(\theta))') \right\| < \infty. \tag{15}$$

Доказательство этой теоремы получается применением теоремы 7 из [1], следствия 2 теоремы 8 из [1] и леммы 2, если заметить, что из условия (14) согласно [13] следует, что пространство $\widehat{\varphi}(l^1, (M^p(\theta))')$ является правильным.

Сейчас мы покажем, как можно упростить условие (15). Согласно равенствам $\psi(X,i)\psi(X',i) = i \ \forall i \in \mathbb{N}$ (см. [7]) и (2) имеем

$$\psi_0(n) = \psi(\varphi(l^\infty, M^p(\theta))', n) = n\varphi\left(1, \frac{1}{\psi(M^p(\theta), n)}\right) = n\varphi\left(1, \left(\frac{n}{\theta(n)}\right)^s\right) \quad (s = 1/p).$$

По последовательности $\theta(i)$ определим выпуклую функцию равенством

$$h^{-1}\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{\psi(M(\theta), i)} = \frac{\theta(i)}{i}$$

и продолжим $h(t)$ на $[0,1]$ по линейности. Тогда пространство Орлича l_h непрерывно вложено в $M(\theta)$, что следует из равенства их фундаментальных функций и теоремы вложения Е. М. Семенова [7]. Поэтому

$$\varphi(l^\infty, (l^\infty)^{1-s}(l_h)^s) \subset \varphi(l^\infty, (l^\infty)^{1-s}(M(\theta))^s)$$

и соответственно

$$\Lambda(\psi_0) \subset \varphi(l^\infty, (l^\infty)^{1-s}(M(\theta))^s)' \subset \varphi(l^\infty, (l^\infty)^{1-s}(l_h)^s)' = \widehat{\varphi}(l^1, (l^1)^{1-s}(l_{h^*})^s).$$

Фундаментальные функции пространств, участвующих в последней формуле, равны, а согласно (3) пространство $\widehat{\varphi}(l^1, (l^1)^{1-s}(l_{h^*})^s)$ имеет вид $\varphi_1(l^\infty, l^1)$ при некоторой $\varphi_1 \in U(2)$. Поэтому можно применить следствие из леммы 1, и тогда условие (15) эквивалентно следующему:

$$\left\| \sum \frac{1}{i} e^i | \Lambda(\psi_0) \right\| = \sum \frac{1}{i(i+1)} \psi_0(i) = \sum \frac{1}{i+1} \varphi\left(1, \left(\frac{\theta(i)}{i}\right)^s\right) < \infty \quad (s = 1/p).$$

Особенно просто это условие выглядит для $s = 1$ и $\varphi(1,t) = t^\alpha$ с $\alpha \in (0,1)$.

Теорема 4. *Пусть* $h(t)$ — N-*функция,* l_h — *пространство Орлича,* $p \geq 1$, $\varphi \in U(2)$, $\varphi(l^\infty, l_h^p)$ — *конструкция Кальдерона — Лозановского. Для того чтобы для всех непрерывных функций из* $BV(\varphi(l^\infty, l_h^p))$ *ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\left\| \sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i | \widehat{\varphi}(l^1, (l_h^p)') \right\| < \infty$$

или эквивалентного ему в силу (2), (13), (14) *соотношения*

$$\sum \frac{1}{i} \varphi\left(1, \left(h^{-1}\left(\frac{1}{i}\right)\right)^s\right) < \infty \quad (s = 1/p).$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей.

Сейчас мы сформулируем три теоремы о равномерной сходимости рядов Фурье в пространствах функций обобщенной ограниченной вариации, связанных с пространством Лоренца. Первые две из них относятся к пространствам $\Lambda(\theta)$, а последняя — к $\Lambda(\theta)^p$ с $p > 1$. Наличие трех теорем связано с тем, что в каждой из них предлагаются свои ограничения для выполнения условия (8).

Теорема 5. *Пусть* $\{\theta_i\} \in U$, $\Lambda(\theta)$ *— пространство Лоренца и выполнено условие*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \frac{\theta_n}{\theta_{kn}} = 0.$$

Пусть $\varphi \in U(2)$, $\varphi(l^\infty, \Lambda(\theta))$ *— конструкция Кальдерона — Лозановского. Для того чтобы для всех непрерывных функций из пространства* $BV(\varphi(l^\infty, \Lambda(\theta)))$ *ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\left\| \sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i | \widehat{\varphi}(l^1, M(\theta)) \right\| < \infty. \tag{16}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей, только для применения леммы 2 нужно использовать простое неравенство

$$\bar{\psi}(m, k, a, M(\theta)) \le C \sup_n \frac{k\theta_n}{\theta_{kn}} \|a|M(\theta)\|,$$

где C не зависит от $a \in M(\theta)$.

Теорема 6. *Пусть* $\{\theta_i\} \in U$, $\Lambda(\theta)$ *— пространство Лоренца, и пусть* $\varphi \in U(2)$, $\varphi(l^\infty, \Lambda(\theta))$ *— конструкция Кальдерона — Лозановского. Пусть, кроме того,*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{a>0} \frac{\widehat{\varphi}\big(\frac{a}{k}, 1\big)}{\widehat{\varphi}(a, 1)} = 0.$$

Для того чтобы для всех непрерывных функций из $BV(\varphi(l^\infty, \Lambda(\theta)))$ *ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно выполнение условия* (16).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3, только вместо леммы 2 нужно использовать лемму 3.

Теорема 7. *Пусть* $\{\theta_i\} \in U$, $\Lambda(\theta)^p$ *— пространство Лоренца и* $p > 1$. *Пусть* $\varphi \in U(2)$, $\varphi(l^\infty, \Lambda(\theta)^p)$ *— конструкция Кальдерона — Лозановского. Для того чтобы для всех непрерывных функций из* $BV(\varphi(l^\infty, \Lambda(\theta)^p))$ *ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\left\| \sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i | \widehat{\varphi}(l^1, (\Lambda(\theta)^p)') \right\| < \infty.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3, если заметить, что при $p > 1$ пространство $\widehat{\varphi}(l^1, (\Lambda(\theta)^p)')$ правильное.

Сейчас мы дадим несколько иные условия для получения признаков равномерной сходимости рядов Фурье, отличные от условий следствия 2 теоремы 8 из [1].

Определение 2. Пусть X — симметричное пространство последовательностей, $BV(X)$ — пространство функций ограниченной обобщенной вариации. Будем говорить, что $f \in BV(X)$ *имеет непрерывную вариацию в точке* t_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для функции

$$f_\delta(t) = \begin{cases} f(t) - f(t_0 - \delta) & \text{при} \ \ t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \\ 0 & \text{при} \ \ t \notin [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \end{cases}$$

выполняется неравенство $\|f_\delta|BV(X)\| < \varepsilon$.

Отметим, что это понятие в различных конкретных случаях неоднократно встречалось ранее.

Теорема 8. *Пусть X — симметричное пространство последовательностей, $BV(X)$ — пространство функций обобщенной ограниченной вариации и каждая $f \in C[0, 2\pi] \cap BV(X)$ имеет непрерывную вариацию на $[0, 2\pi]$.*

Тогда для того чтобы для каждой непрерывной функции из $BV(X)$ ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\| \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i} e^i | X' \right\| < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Необходимость (17) следует из [1, теорема 7]. Докажем достаточность. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем m так, чтобы для функций $\{g_i\}_1^m$, определенных равенством

$$g_i(t) = \begin{cases} f(t) - f\left(\frac{2\pi(i-1)}{m}\right) & \text{при} \ \ t \in \left(\frac{2\pi(i-1)}{m}, \frac{2\pi(i+2)}{m}\right), \\ 0 & \text{при} \ \ t \notin \left(\frac{2\pi(i-1)}{m}, \frac{2\pi(i+2)}{m}\right) \end{cases}$$

и продолженных на все $\mathbb{R}$ по периодичности, были выполнены неравенства $\|g_i|BV(X)\| < \varepsilon$. Хорошо известно [17], что

$$F_n(f, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(t + s) \frac{\sin ns}{s} \, ds + o(1),$$

где $o(1)$ равномерно стремится к нулю. Положим $\delta = \frac{2\pi}{m}$. Далее доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 8 из [1].

Проиллюстрируем последнюю теорему примером — критерием Ватермана для равномерной сходимости рядов Фурье.

Теорема 9 [6]. *Для того чтобы для любой непрерывной функции из $BV(\Lambda(\varphi))$ ряд Фурье сходился равномерно, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_n \frac{\ln n}{\varphi_n} < \infty. \tag{18}$$

Доказательство. Из двойственности пространств Лоренца и Марцинкевича [7] следует, что

$$\left\| \sum \frac{1}{i} e^i | \Lambda(\varphi)' \right\| \simeq \left\| \sum \frac{1}{i} e^i | M(\varphi) \right\| = \sup_n \frac{1}{\varphi_n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{i} \simeq \sup_n \frac{\ln n}{\varphi_n} < \infty.$$

Из последнего неравенства и теоремы 7 из [1] немедленно следует необходимость условия (18).

Для доказательства достаточности можно воспользоваться предыдущей теоремой, так как согласно результату Д. Ватермана [6] каждая непрерывная функция из $BV(\Lambda(\ln(n + 1)))$ имеет непрерывную вариацию на $[0, 2\pi]$.

2. Соотношения между признаками равномерной сходимости рядов Фурье

В этом пункте мы обсудим логическую связь между тремя наиболее известными признаками равномерной сходимости рядов Фурье для пространств функций с ограниченной обобщенной вариацией, а именно между признаком (W) Ватермана (теорема 9), признаком (C) Чантурия (теорема 1) и признаком (SOB) Салема — Осколкова — Баерштейна (теорема 2). Мы покажем, что признак Ватермана строго сильнее признаков (C) и (SOB) и его усилить нельзя.

Будем говорить, что признак 2 сильнее признака 1, если для любого $BV(X)$, удовлетворяющего условиям признака 1, найдется $BV(Y)$, удовлетворяющее условиям признака 2, для которых $BV(X) \subseteq BV(Y)$.

Отметим, что следующая теорема имеется в [5], здесь предлагается иное, в духе нашей работы, доказательство.

Теорема 10. *Признак* (C) *сильнее признака* (SOB).

Доказательство. Пусть задано пространство Орлича l_h, для которого

$$\sum h^*\left(\frac{1}{n}\right) < \infty, \tag{19}$$

т. е. для $BV(l_h) \cap C[0, 2\pi]$ выполнена теорема 10. По фундаментальной функции l_h, которая имеет вид

$$\psi(n) = \psi(l_h, n) = \frac{1}{h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)},$$

построим пространство Марцинкевича $M(\frac{n}{\psi(n)})$ с той же фундаментальной функцией. Тогда в силу теоремы вложения Е. М. Семенова [7] и теоремы 1 из [1] верно вложение $BV(l_h) \subseteq BV(M(\frac{n}{\psi(n)}))$. Согласно лемме 1 и равенству $\psi(l_{h^*}, n)\psi(l_h, n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$ условие (19) эквивалентно следующему:

$$\sum \frac{\psi(l_{h^*}, n)}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{(n+1)\ \psi(l_h, n)} < \infty. \tag{20}$$

Условие (20) эквивалентно условию (12) для $\varphi_i = \frac{i}{\psi(i)}$. Таким образом, для всех $f \in BV(M(\frac{n}{\psi(n)})) \cap C[0, 2\pi]$ ряд Фурье равномерно сходится. Теорема доказана.

Теорема 11. *Признак* (SOB) *сильнее признака* (C).

Для доказательства этой теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная вогнутая функция и $\varphi(0) = 0$. Тогда функция $\varphi_0(t) = t\varphi(\frac{1}{t})$ тоже вогнутая на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Из предположений следует, что

$$\varphi(s) = \int_0^s \varphi'(s)\, ds,$$

где $\varphi'(s) \geq 0, \varphi'(s) \downarrow$. Поэтому

$$\varphi_0'(s) = \varphi\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{s}\varphi'\left(\frac{1}{s}\right).$$

Из геометрических соображений видно, что $\varphi(s) - s\varphi'(s) \geq 0$ и $\varphi(s) - s\varphi'(s) \uparrow$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная вогнутая функция и $\varphi(0) = 0$. Тогда функция h, определенная равенством*

$$h\left(t\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right) = t^2\varphi\left(\frac{1}{t}\right),$$

является выпуклой.

Доказательство. Согласно лемме 4 функция $\varphi_0(t) = t\varphi\big(\frac{1}{t}\big)$ — вогнутая. Тогда обратная к φ_0 является выпуклой и, следовательно, такой же будет функция $h(s) = s\varphi_0^{-1}(s)$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 11. Итак, пусть $\{\varphi(i)\} \in U$, пусть $M(\varphi(n))$ — пространство Марцинкевича и выполнено условие

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^2} < K. \tag{21}$$

В силу теоремы 1 это соответствует тому, что для всех непрерывных функций из $BV(M(\varphi(n)))$ ряд Фурье равномерно сходится. Без ограничения общности можно считать, что в (21) $K = 1$. Покажем, что найдется пространство Орлича l_h, для которого выполнены соотношения

$$BV(M(\varphi(n))) \subseteq BV(l_h), \tag{22}$$

$$\sum h^*\left(\frac{1}{i}\right) < \infty. \tag{23}$$

Это и будет означать, что признак (SOB) сильнее признака (C).

Продолжим $\varphi(n)$ на $\mathbb{R}_+$ по линейности и определим функцию $h(t)$ равенством

$$h\left(t\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right) = t^2\varphi\left(\frac{1}{t}\right). \tag{24}$$

Тогда из леммы 5 следует, что $h(s)$ выпуклая. Кроме того,

$$\lim_{s\to 0}\frac{h(s)}{s} = \lim_{i\to\infty}\frac{ih\big(\frac{\varphi(i)}{i}\big)}{\varphi(i)} = \lim_{i\to\infty}\frac{i\varphi(i)}{i^2\varphi(i)} = 0. \tag{25}$$

Таким образом, $h(s)$ является N-функцией. Покажем, что выполнено (22). Если

$$\{a_i\} \in B(1, M(\varphi(n))), \quad a_i \geq 0, \quad a_i \downarrow, \tag{26}$$

то

$$1 \geq \frac{1}{\varphi(n)}\sum_1^n a_i \geq \frac{na_n}{\varphi(n)}. \tag{27}$$

Поэтому из (27), (24) и (21) получим

$$\sum h(a_i) \leq \sum h\left(\frac{\varphi(i)}{i}\right) = \sum \frac{\varphi(i)}{i^2} \leq 1,$$

что и доказывает (22).

Согласно лемме 1 условие (23) эквивалентно следующему:

$$B = \sum \frac{\psi(l_{h^*}, n)}{n(n+1)} \simeq \sum \frac{1}{n\ \psi(l_h, n)} = \sum \frac{h^{-1}\big(\frac{1}{i}\big)}{i} < \infty.$$

Сравнивая ряд и интеграл, делая некоторые замены переменных и учитывая равенство (24), можно написать следующие эквивалентности:

$$B \simeq \int_1^\infty h^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) d\ln s \simeq \int_1^\infty t^{-1}\, d\ln\biggl(\frac{1}{h^{-1}\bigl(\frac{1}{t}\bigr)}\biggr) \simeq \int_1^\infty t^{-1}\varphi(t)\, d\ln\biggl(\frac{1}{h\bigl(\frac{\varphi(t)}{t}\bigr)}\biggr)$$

$$\simeq \int_1^\infty t^{-1}\varphi(t)\, d\ln\biggl(\frac{t^2}{\varphi(t)}\biggr) \simeq \int_1^\infty t^{-1} d\varphi(t) \simeq \int_1^\infty t^{-2}\varphi(t)\, dt \simeq \sum \frac{\varphi(i)}{i^2}.$$

Из этой оценки и (21) следует (23). Теорема доказана.

Теоремы 10 и 11 показывают, что признаки (C) и (SOB) эквивалентны.

Теорема 12. *Признак* (W) *сильнее признака* (C).

Доказательство. Пусть $\{\varphi(i)\} \in U$, $M(\varphi(i))$ — пространство Марцинкевича и выполнено условие (21). Положим

$$\psi_0(i) = \ln(i+1). \tag{28}$$

Тогда для пространства $BV(\Lambda(\psi_0(i)))$ выполнены условия теоремы 9. Покажем, что имеет место непрерывное вложение

$$BV(M(\varphi(i)) \subseteq BV(\Lambda(\psi_0(i))). \tag{29}$$

Пусть последовательность $\{a_i\}$ удовлетворяет (26). Тогда для нее выполнено и (27). Поэтому

$$\Bigl\|\sum a_i e^i | \Lambda(\psi_0(i))\Bigr\| \simeq \sum \frac{a_i}{i} \le \sum \frac{\varphi(i)}{i^2}.$$

Из последнего неравенства, симметричности пространств и (21) получим (29). Теорема доказана.

Сейчас мы покажем, что признак (W) строго сильнее признака (C). А именно, оказывается, любое пространство $BV(M(\varphi(n)))$, для которого выполнены условия теоремы 1, не содержит полностью пространства $BV(\Lambda(\psi_0(i)))$, где функция $\psi_0(i)$ определена равенством (28).

Действительно, если $BV(\Lambda(\psi_0(i))) \subseteq BV(M(\varphi(i)))$, то для всех n с некоторой константой K верно неравенство

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \psi(M(\varphi), n) \le K\psi(\Lambda(\psi_0(n)), n) = K \ln n.$$

Поэтому

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^2} \ge K^{-1} \sum \frac{1}{n\ \ln n} = \infty,$$

а это и означает, что признак (W) строго сильнее признака (C) или эквивалентного ему признака (SOB).

Теперь мы покажем, что признак Ватермана усилить нельзя.

Теорема 13. *Пусть X — симметричное пространство последовательностей, $BV(X)$ — соответствующее ему пространство функций ограниченной вариации. Если для каждой функции $f \in C[0, 2\pi] \cap BV(X)$ ряд Фурье сходится равномерно, то справедливо непрерывное вложение*

$$BV(X) \subseteq BV(\Lambda(\psi_0)) \tag{30}$$

(*функция ψ_0 определена в* (28)).

Соотношение (30) означает, что признак Ватермана усилить нельзя.

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 6. *Пусть X — симметричное пространство последовательностей и $a = \sum\limits_1^\infty a_i e^i$, причем $a_i \geq 0, a_i \downarrow$. Пусть задан набор чисел $\{\delta_i : \delta_i \geq 0 : i = 1,2,\ldots,k\}$ такой, что*

$$\left\{a_i + \delta_i \geq a_{i+1} + \delta_{i+1} : i = 1,2,\ldots,k, \quad \sum_1^k \delta_i \leq a_{k+1}\right\}.$$

Положим

$$a(\delta) = \sum_1^k (a_i + \delta_i)e^i + \left(a_{k+1} - \sum_1^k \delta_i\right)e^{k+1} + \sum_{k+2}^\infty a_i e^i.$$

Тогда справедливо неравенство $\|a(\delta)|X\| \geq \|a|X\|$.

Доказательство леммы следует из соотношений

$$\|a(\delta)|X\| = \sup\left\{\sum_1^k (a_i+\delta_i)g_i + \left(a_{k+1} - \sum_1^k \delta_i\right)g_{k+1} + \sum_{k+2}^\infty a_i g_i : \left\|\sum_1^\infty g_i e^i|X'\right\| = 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_1^k (a_i + \delta_i)^* g_i^* + \left(a_{k+1} - \sum_1^k \delta_i\right)^* g_{k+1}^* + \sum_{k+2}^\infty a_i^* g_i^* : \left\|\sum_1^\infty g_i e^i|X'\right\| = 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_1^k (a_i + \delta_i)g_i + \left(a_{k+1} - \sum_1^k \delta_i\right)g_{k+1} + \sum_{k+2}^\infty a_i g_i\right.$$

$$\left. : g_1 \geq g_2 \geq \ldots g_k \geq \sup_{i\geq k} g_i; \left\|\sum_1^\infty g_i e^i|X'\right\| = 1\right\}$$

$$\geq \sup\left\{\sum_1^\infty a_i g_i : g_i \downarrow, \left\|\sum_1^\infty g_i e^i|X'\right\| = 1\right\} = \left\|\sum_1^\infty a_i e^i|X\right\| = \|a|X\|.$$

Лемма 7. *Пусть функция ψ_0 определена в (28) и для симметричного пространства Y выполнено соотношение*

$$\left\|\sum_1^\infty \frac{1}{i} e^i|Y\right\| = K < \infty.$$

Тогда для пространства Марцинкевича $M(\psi_0)$ имеет место непрерывное вложение

$$M(\psi_0) \subseteq Y. \tag{31}$$

Доказательство. Положим

$$\left\|\sum_1^\infty (\ln(i+1) - \ln i)e^i|Y\right\| = K_1.$$

Из предположений леммы следует, что $K_1 < \infty$. Для доказательства (31) достаточно уметь доказывать следующий факт. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $x_1 = \sum\limits_1^n a_i e^i$ и $a_i \geq 0, a_i \downarrow$. Если для всех $k = 1,2,3,\ldots,n$ верны неравенства

$$\sum_1^k a_i \leq \ln(k+1), \tag{32}$$

то

$$\|x_1|Y\| = \left\| \sum_1^n a_i e^i |Y \right\| \le K_1. \tag{33}$$

Этот факт мы и будем доказывать.

Рассмотрим последовательность неравенств

$$a_1 \le \ln 2,\ a_2 \le \ln \frac{3}{2}, \ldots, a_n \le \ln \frac{n+1}{n}.$$

Если все они выполнены, то выполнено и (33), в противном случае обозначим через l_1 номер первого нарушенного неравенства. Пусть для определенности

$$a_{l_1} = \ln(l_1+1) - \ln l_1 + \delta_{l_1}.$$

Из (32) следует, что $l_1 > 1$. Поэтому для всех $i = 1, 2, \ldots, l_1 - 1$ с некоторыми $\delta_i \ge 0$ верно представление

$$a_i = \ln(i+1) - \ln i - \delta_i,$$

причем из (32) вытекает, что

$$\sum_1^{l_1-1} \delta_i \ge \delta_{l_1}.$$

Положим

$$k_1 = \sup \left\{ k < l_1 : \sum_1^k \delta_i \le \delta_{l_1} \right\},$$

определим новую последовательность

$$a_{2,\ i} = \begin{cases} a_i + \delta_i = \ln(i+1) - \ln i, & i = 1, 2, \ldots, k_1; \\ a_{k_1+1} + \delta_{l_1} - \sum\limits_1^{k_1} \delta_j \le \ln(1 + \frac{1}{k_1}), & i = k_1 + 1; \\ a_i, & i = k_1 + 2, \ldots, l_1 - 1; \\ \ln(l_1+1) - \ln l_1, & i = l_1; \\ a_i, & i = l_1 + 1, \ldots, n, \end{cases}$$

и построим новый вектор $x_2 = \sum\limits_1^n a_{2,i} e^i$. Из построения и предыдущей леммы следует, что

$$a_{2,i} \ge 0; \quad a_{2,i} \downarrow; \quad \sum_1^k a_{2,i} \le \ln(k+1),\ k = 1, 2, \ldots, n; \quad \|x_1|Y\| \le \|x_2|Y\|.$$

Снова рассмотрим последовательность неравенств

$$a_{2,1} \le \ln 2,\ a_{2,2} \le \ln \frac{3}{2}, \ldots, a_{2,n} \le \ln \frac{n+1}{n}.$$

Если все они выполнены, то выполнено и (33), в противном случае обозначим через l_2 номер первого нарушенного неравенства. Из предыдущего построения находим, что $l_2 > l_1$. С вектором x_2 проделаем процедуру, аналогичную проделанной с вектором x_1, построим последовательность $\{a_{3,i}\}$ и вектор x_3. Определим число l_3 из соответствующих неравенств. Тогда выполнено неравенство $l_3 > l_2$, и т. д. В силу того, что не более n компонент всех векторов отлично от нуля, этот процесс закончится через конечное число шагов. В результате все компоненты последнего вектора x_k будут удовлетворять неравенствам

$$a_{k,1} \le \ln 2,\ a_{k,2} \le \ln\frac{3}{2}, \dots, a_{k,n} \le \ln\frac{n+1}{n},$$

и поэтому $\|x_k|Y\| \le K_1$, а из построения следует, что $\|x_1|Y\| \le \|x_k|Y\|$. Лемма доказана.

Теперь мы можем легко доказать теорему 13. Согласно теореме 1 из [1] вложение (30) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено непрерывное вложение $X \subset \Lambda(\psi_0)$, последнее вложение эквивалентно дуальным вложениям $\Lambda(\psi_0)' \subset X'$. Это вытекает из того, что все рассматриваемые пространства обладают свойством Фату. Из двойственности пространств Лоренца и Марцинкевича получим, что последнее вложение эквивалентно следующему: $M(\psi_0) \subset X'$. Для каждой непрерывной функции из $BV(X)$ ряд Фурье сходится равномерно, поэтому из теоремы 7 в [1] следует, что

$$\sup\left\{\left\|\sum_1^n \frac{1}{i} e^i |X'\right\| : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty.$$

Для окончания доказательства достаточно применить лемму 7.

3. Точная оценка коэффициентов Фурье функций из $BV(X)$

Теорема 14. *Пусть X — симметричное пространство последовательностей, $\psi(X,k)$ — его фундаментальная функция. Пусть $f \in BV(X)$. Тогда для коэффициентов Фурье функции f справедливо неравенство*

$$|\hat f(n)| \le \|f|BV(X)\| \frac{1}{\psi(X,n)}. \tag{34}$$

Доказательство. Для коэффициентов Фурье хорошо известны соотношения

$$\hat f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\left\{\sum_{k=1}^n f\left(t+\pi\frac{k-1}{n}\right) - f\left(t+\pi\frac{k}{n}\right)\right\}dt;$$

$$|\hat f(n)| \le \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^n \left|f\left(t+\pi\frac{k-1}{n}\right) - f\left(t+\pi\frac{k}{n}\right)\right|\right\}dt. \tag{35}$$

Для каждого $t \in [0, 2\pi]$ согласно определениям и справедливости [7] при всех $i \in \mathbb{N}$ равенства $\psi(X,i)\psi(X',i) = i$ имеем оценку

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n &\left|f\left(t+\pi\frac{k-1}{n}\right) - f\left(t+\pi\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\le \left\|\sum_{k=1}^n e^k\left\{f\left(t+\pi\frac{k-1}{n}\right) - f\left(t+\pi\frac{k}{n}\right)\right\}|X\right\|\left\|\sum_{k=1}^n e^k|X'\right\| \\ &\le \|f|BV(X)\|\psi(X',n) = \frac{n}{\psi(X,n)}\|f|BV(X)\|.\end{aligned} \tag{36}$$

Из (35) и (36) приходим к (34). Теорема доказана.

Применяя теорему 14 и равенства из п. 1 работы [1], проиллюстрируем последнюю теорему несколькими примерами.

Если $f \in BV(l_h)$, то справедлива классическая [17] оценка

$$|\hat{f}(n)| \le h^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\|f|BV(l_h)\|.$$

Если $f \in BV(\Lambda^p(\varphi))$, то справедлива оценка

$$|\hat{f}(n)| \le \left(\frac{1}{\varphi_n}\right)^{1/p}\|f|BV(\Lambda^p(\varphi))\|.$$

Для $p = 1$ эта оценка приведена в [16, 18], для $p > 1$ известная оценка [19] значительно грубее.

Если $f \in BV(M^p(\varphi))$, то

$$|\hat{f}(n)| \le \left(\frac{\varphi_n}{n}\right)^{1/p}\|f|BV(M^p(\varphi))\|.$$

Для $p = 1$ эта оценка принадлежит З. А. Чантурия [5], для $p > 1$ она, по-видимому, новая.

Дадим оценки коэффициентов Фурье для «смешанных» пространств, описанных в п. 1. Нетрудно проверить, что справедливы равенства

$$\psi(M^p(\varphi)(l_h), n) = \frac{1}{h^{-1}\left[\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{1/p}\right]},$$

$$\psi(\Lambda^p(\varphi)(l_h), n) = \frac{1}{h^{-1}\left[\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1/p}\right]}.$$

Поэтому

$$|\hat{f}(n)| \le h^{-1}\left[\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{1/p}\right]\|f|BV(M^p(\varphi)(l_h))\|,$$

$$|\hat{f}(n)| \le h^{-1}\left[\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)^{1/p}\right]\|f|BV(\Lambda^p(\varphi)(l_h))\|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бережной Е. И.* Пространства функций обобщенной ограниченной вариации. I. Теоремы вложения. Оценки констант Лебега // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 997–1011.
2. *Salem R.* Oeuvres Mathématiques. Paris, 1967. P. 156–161.
3. *Осколков К. И.* Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 3. С. 313–324.
4. *Baernstein A.* On the Fourier series of functions of bounded Φ-variation // Studia Math. 1972. V. 42, N 3. P. 243–248.
5. *Чантурия З. А.* О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 534–554.
6. *Waterman D.* Fourier series of functions of Λ-bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 74, N 1. P. 119–123.
7. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1977.
8. *Lindenstrauss J.,Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. I, II. Berlin: Springer-Verl., 1979.
9. *Бережной Е. И.* Точная теорема исправимости для пространств функций обобщенной ограниченной вариации // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 5. С. 10–21.

10. *Calderon A. P.* Intermediate spaces and interpolation; the complex method // Studia Math. 1964. V. 24. P. 113–190.

11. *Лозановский Г. Я.* Преобразование банаховых идеальных пространств с помощью вогнутых функций // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1979. С. 122–146.

12. *Бережной Е. И.* Об одной теореме Г. Я. Лозановского // Известия вузов. Математика. 1982. Т. 4. С. 81–83.

13. *Бережной Е. И.* Геометрические свойства пространства $\varphi(X, Y)$ // Функцион. анализ и его прил. 1984. Т. 18, № 1. С. 59–60.

14. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

15. *Perlman S.* Functions of generalized variation // Fund. Math. 1980. V. 105. P. 200–211.

16. *Schramm M., Waterman D.* On the magnitude of Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 85. P. 407–410.

17. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965..

Статья поступила 27 марта 1997 г.,
окончательный вариант — 26 октября 2000 г.

Бережной Евгений Иванович
Ярославский гос. университет, математический факультет,
ул. Советская, 14, Ярославль 150000
ber@uniyar.ac.ru