Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 512.54

ЗАМКНУТОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ГРУПП ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Г. А. Баженова

Аннотация: Рассматриваются группы, классы рациональных подмножеств которых являются булевыми алгебрами. Доказывается, что данный класс групп замкнут относительно свободного произведения. (Рациональные подмножества группы мы определяем как наименьший класс подмножеств, содержащий все конечные подмножества и замкнутый относительно объединения, произведения и порождения подмоноида.) Библиогр. 2.

1. Введение

Определение 1 [1]. Пусть M — некоторый моноид (например, свободный моноид Σ^*, где Σ — некоторый конечный или бесконечный алфавит, или группа). Классом *рациональных* подмножеств M называется наименьший класс подмножеств M, включающий все конечные подмножества и замкнутый относительно объединения, произведения и порождения подмоноида.

Рациональные подмножества M можно охарактеризовать также в терминах конечных автоматов над M.

Определение 2. *Конечным автоматом* над M называется конечный ориентированный граф Γ, ребра которого помечены некоторыми элементами M и среди вершин выделены единственная начальная вершина и, вообще говоря, несколько выходных.

Рассмотрим некоторый путь $\pi = (v_1, m_1, v_2, m_2, \dots, v_n, m_n, v_{n+1})$, где v_i — вершины Γ, а m_i — метка некоторого ребра с началом в v_i и концом в v_{i+1} (путь начинается в v_1, затем мы переходим в v_2 по ребру с меткой m_1, в v_3 по ребру с меткой m_2 и т. д., пока в v_{n+1} путь не заканчивается). Произведение $m_1 \dots m_n$ называется *меткой* пути π.

Говорят, что элемент $m \in M$ *допустим* для автомата Γ, если он является меткой некоторого пути в Γ с началом в начальной вершине и концом в выходной. Множество всех допустимых элементов назовем множеством, *заданным* автоматом Γ.

Предложение 1 [1]. *Класс множеств, заданных автоматами над M, и класс рациональных подмножеств M совпадают.*

Приведем результат из [2] о рациональных подмножествах *групп*. Подчеркнем, что аналогичное утверждение для произвольных моноидов неверно.

Предложение 2 [2]. *Пусть $H \le G$ — группы, $R \subseteq H$ рационально над G. Тогда R рационально и над H.*

По определению класс рациональных подмножеств моноида замкнут относительно объединения. Хорошо известно, что класс рациональных подмножеств конечно-порожденного свободного моноида замкнут также относительно пересечения и взятия дополнений, т. е. является булевой алгеброй. В [2] получены некоторые результаты о *группах*, классы рациональных подмножеств которых являются булевыми алгебрами. В данной статье рассмотрим класс групп с этим свойством, задавая вопрос, относительно каких операций он замкнут. В [2] доказано, что если G принадлежит этому классу, то ему принадлежат любая конечно-порожденная подгруппа G, любой образ относительно гомоморфизма с конечно-порожденным ядром, а также любое конечное расширение. В данной работе мы докажем, что этот класс замкнут относительно свободного произведения. Напротив, прямое произведение групп из этого класса может ему не принадлежать (см. пример 1).

2. Основной результат

Предложение 3. *Пусть G, H — группы. Предположим, что классы их рациональных подмножеств — булевы алгебры. Тогда класс рациональных подмножеств их свободного произведения $G * H$ также булева алгебра.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное рациональное подмножество $R \subseteq G * H$. Покажем, что его дополнение также рационально. Класс рациональных подмножеств замкнут относительно объединения по определению, поэтому достаточно доказать его замкнутость относительно взятия дополнения. Пусть R задано автоматом Γ. Можно считать, что все метки ребер Γ принадлежат $G \cup H$. Пусть u, v — вершины Γ. Определим множества $A_{u,v}$, $B_{u,v}$ следующим образом: $A_{u,v}$ — множество всех меток путей в Γ с началом в u и концом в v, принадлежащих G. Аналогично $B_{u,v}$ состоит из всех меток путей из u в v, принадлежащих H. Заметим, что $A_{u,v}$ рационально в G, ибо можно считать, что если две вершины в Γ связаны путем с меткой 1, то они связаны и ребром с меткой 1, а тогда $A_{u,v}$ задано автоматом, получающимся из Γ переносом начальной и выходной вершин в u и v соответственно, а также удалением ребер с метками, не принадлежащими G. Аналогично $B_{u,v}$ рационально в H.

Возьмем набор множеств $A_{u,v}$, где (u, v) пробегает все пары вершин Γ, а также множество $\{1\}$. Рассмотрим все пересечения вида

$$\bigcap_{u,v} X_{u,v} \cap Y,$$

где $X_{u,v}$ есть либо $A_{u,v}$, либо $G \setminus A_{u,v}$, а Y есть либо $\{1\}$, либо $G \setminus \{1\}$. Эти пересечения попарно не пересекаются, рациональны в G, и каждое $A_{u,v}$ (а также его дополнение) представимо в виде объединения некоторых таких пересечений. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — это все непустые такие пересечения, выписанные без повторений. Будем считать, что $a_0 = \{1\}$. Аналогично пусть $b_0 = \{1\}, b_1, \ldots, b_m$ — непустые попарно не пересекающиеся подмножества H такие, что каждое $B_{u,v}$ и его дополнение совпадают с некоторыми объединениями множеств из данного списка.

Рассмотрим конечный алфавит

$$\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m\}.$$

Построим автомат Γ_1 следующим образом: множество вершин совпадает с множеством вершин Γ. Для каждой пары вершин (u, v), если $A_{u,v} = \bigcup_{i \in I} a_i$, соединим u и v ребром с меткой α_i для каждого $i \in I \setminus \{0\}$, а в случае, когда $0 \in I$, также ребром с меткой ε. Аналогично поступим для $B_{u,v}$ вместо $A_{u,v}$, b_i вместо a_j и β_i вместо α_j.

Будем рассматривать автомат Γ_1 как автомат над Σ^*. Пусть L — рациональное множество, заданное Γ_1. Пусть C — это множество всех слов из Σ^* вида $(\alpha_{i_1})\beta_{j_1}\alpha_{i_2}\beta_{j_2}\dots\ \alpha_{i_k}(\beta_{j_k})$. (Любую из букв в скобках можно опустить. Пустое слово ε тоже будем считать словом такого вида.) Легко видеть, что C рационально. Рассмотрим рациональное множество $\Lambda = C \setminus L$.

Рассмотрим произвольное слово $w = (\alpha_{i_1})\beta_{j_1}\alpha_{i_2}\beta_{j_2}\dots\ \alpha_{i_k}(\beta_{j_k})$ из C. Определим подмножество $G * H$, полагая

$$\xi(w) = (a_{i_1})b_{j_1}a_{i_2}b_{j_2}\dots a_{i_k}(b_{j_k}) \quad (\xi(\varepsilon) = \{1\}).$$

Мы утверждаем, что множество $S = \bigcup\limits_{w\in\Lambda} \xi(w)$ рационально и совпадает с $G*H\setminus R$. Для доказательства рациональности S рассмотрим автомат Γ_2 над Σ^*, задающий Λ. Можно считать, что в Γ_2 все метки являются буквами алфавита Σ. Заменим в Γ_2 каждое ребро с меткой α_i (β_j) автоматом Δ_a^i (Δ_b^j), задающим a_i (b_j). При этом мы должны позаботиться о том, чтобы каждый автомат Δ имел единственную выходную вершину и не имел ребер, выходящих из нее, а также не имел ребер, входящих в начальную вершину. Этого всегда можно добиться, добавив новую начальную вершину и соединив ее со старой ребром с меткой 1, а также добавив новую выходную вершину, в которую должно вести ребро с меткой 1 из каждой старой выходной вершины (больше не являющуюся выходной). При соблюдении этих условий мы действительно получим автомат, задающий S.

Покажем, что $S = G * H \setminus R$. Прежде всего заметим, что если $w_1 \neq w_2$, $w_1, w_2 \in C$, то $\xi(w_1) \cap \xi(w_2) = \varnothing$. Рассмотрим произвольный $x \in R$. Возьмем путь $\pi = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, v_k, f_k, v_{k+1})$ в Γ, где все v_i — вершины, а каждое f_i — метка некоторого ребра с началом в v_i и концом в v_{i+1}, v_1 — начальная и v_{k+1} — выходная вершины, а метка $f_1 \dots f_k$ пути π равна x. Известно, что все f_i принадлежат $G \cup H$. Но тогда мы можем определить элементы

$$q_1 = f_1 \dots f_{l_1},\ q_2 = f_{l_1+1} \dots f_{l_2}, \dots, q_u = f_{l_{u-1}+1} \dots f_k$$

таким образом, что все q_i принадлежат $G \cup H$, и если q_i принадлежит G (соответственно H), то q_{i+1} не принадлежит G (соответственно H). В частности, либо $u = 1$, либо ни один из q_i не равен единице. Элемент q_i принадлежит $A_{v_{l_{i-1}+1}, v_{l_i+1}}$ (или соответственно $B_{v_{l_{i-1}+1}, v_{l_i+1}}$). Пусть $x \neq 1$. Тогда элемент q_i принадлежит a_j (соответственно b_j) для некоторого $j > 0$. Тем самым существует слово $w \in L \cap C$ такое, что $x \in \xi(w)$. Элемент x не может принадлежать S. Аналогично если $x = 1$, то $u = 1$, $1 \in A_{v_1, v_{k+1}}$, отсюда $\varepsilon \in L$ и S не может содержать единицу. Мы показали, что $R \cap S = \varnothing$. С другой стороны, пусть $x \notin R$. Существует слово $w \in C$ такое, что $x \in \xi(w)$. (Если $x = 1$, то положим $w = \varepsilon$, в противном случае x имеет вид $g_1 h_1 g_2 h_2 \dots\ g_k h_k$, где $g_i \in G$, $h_i \in H$ и $g_i, h_j \neq 1$ при $i \neq 1$, $j \neq k$. Каждый элемент $g_i \neq 1$ принадлежит некоторому a_{l_i}, $l_i > 0$, каждый $h_j \neq 1$ — некоторому b_{r_j}, $r_j > 0$. Тогда положим $w = (\alpha_{l_1})\beta_{r_1}\alpha_{l_2}\beta_{r_2}\dots$ $\alpha_{l_k}(\beta_{r_k})$.) Если бы w принадлежало L, то x принадлежал бы R. Поэтому $w \in \Lambda$ и $x \in S$. Мы показали, что $G * H \setminus R \subseteq S$. Таким образом, $G * H \setminus R = S$. Предложение доказано.

Пример 1. Пусть F — свободная группа ранга два, x, y — ее свободные порождающие, A — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом

a, и G — их прямое произведение. Тогда классы рациональных подмножеств групп F и A — булевы алгебры (см. [2]), но класс рациональных подмножеств G не является булевой алгеброй.

Действительно, предположим, что это булева алгебра. Тогда подмножество

$$S = ((y^{-1}a^{-1})^* x(ya)^*) \cap F$$

рационально. Заметим, что $S = \{y^{-n}xy^n \mid n \geq 0\}$. Группа, порожденная множеством S, является рациональным подмножеством. Но тогда она должна быть конечно-порожденной (см. предложение 2), и мы получаем противоречие.

Автор благодарит научного руководителя В. А. Романькова за постановку задачи и постоянную поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gilman R. H.* Formal languages and infinite groups // DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 1996. V. 25. P. 27–51.
2. *Баженова Г. А.* О рациональных множествах в конечно-порожденных нильпотентных группах // Алгебра и логика (в печати).

Статья поступила 16 февраля 1999 г.

г. Омск
Институт информационных технологий и прикладной математики
bazhenova@math.omsu.omskreg.ru