*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2000. Том 41, № 2*

*УДК 519.48*

# ИНВАРИАНТЫ ОТНОШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

**А. Г. Пинус**

**Аннотация:** Описаны теоретико-множественные инварианты отношения рациональной эквивалентности между многообразиями универсальных алгебр. В терминах этих инвариантов описаны многообразия, рационально эквивалентные многообразию булевых алгебр. Библиогр. 4.

*Моему учителю*
*Юрию Леонидовичу Ершову*
*с глубокой благодарностью*

Отношение рациональной эквивалентности многообразий и отдельных алгебр играет важную роль в вопросах универсальной алгебры. По сути дела рациональная эквивалентность двух классов алгебр означает одинаковое «алгебраическое устройство» этих классов. Это было подтверждено теоремой А. И. Мальцева [1], описывающей рациональную эквивалентность многообразий как совпадение соответствующих категорий. Напомним формулировку этого результата и определения основных понятий, связанных с этим вопросом.

Определение 1. Классы $K_1$ алгебр сигнатуры $\sigma_1$ и $K_2$ сигнатуры $\sigma_2$ называют *рационально эквивалентными*, если существуют отображения $F_1(F_2)$, сопоставляющие символам сигнатуры $\sigma_1$ термы сигнатуры $\sigma_2$ (символам сигнатуры $\sigma_2$ — термы сигнатуры $\sigma_1$) с сохранением арности (числа аргументов функции $f \in \sigma_i$ и терма $F_i(f)$ совпадают) и такие, что

а) для любой $K_1$-алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_1\rangle$ алгебра $F_2(\mathscr{A}) = \langle A; \sigma_2\rangle$ входит в класс $K_2$, здесь $\sigma_2$-операции алгебры $F_2(\mathscr{A})$ определяются на $A$ соответствующими $F_2(\sigma_2)$-термами алгебры $\mathscr{A}$;

б) для любой $K_2$-алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_2\rangle$ алгебра $F_1(\mathscr{A}) = \langle A; \sigma_1\rangle$ входит в класс $K_1$;

в) для любой $K_1$-алгебры имеет место равенство $F_1(F_2(\mathscr{A})) = \mathscr{A}$;

г) для любой $K_2$-алгебры имеет место равенство $F_2(F_1(\mathscr{A})) = \mathscr{A}$.

Под рациональной эквивалентностью алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ имеем в виду рациональную эквивалентность классов $I\{\mathscr{A}_1\}$ и $I\{\mathscr{A}_2\}$. Здесь $I\{\mathscr{A}\} = \{\mathscr{B} \mid \mathscr{B} \cong \mathscr{A}\}$.

Определение 2. Для любого класса алгебр $K$ через $\vec{K}$ обозначим категорию, объектами которой являются $K$-алгебры, а морфизмами — гомоморфизмы $K$-алгебр друг в друга.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01675).

Определение 3. Классы алгебр $K_1$ и $K_2$ назовем *категорно эквивалентными*, если существует изоморфизм $\varphi$ категории $\vec{K_1}$ на категорию $\vec{K_2}$, коммутирующий со стирающими функторами из категорий $\vec{K_i}$ в категорию множеств.

Через $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ $(\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X))$ обозначим $\mathscr{M}$-свободную $\aleph_0$-порожденную ($X$-порожденную) алгебру для любого многообразия $\mathscr{M}$.

**Теорема Мальцева.** *Для любых многообразий универсальных алгебр $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ следующие условия равносильны:*

а) *$\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ рационально эквивалентны;*

б) *алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}_1}(\aleph_0)$ и $\mathscr{F}_{\mathscr{M}_2}(\aleph_0)$ рационально эквивалентны;*

в) *$\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ категорно эквивалентны.*

Таким образом, в роли инвариантов отношения рациональной эквивалентности многообразий выступают категории многообразий. Но «необъятность» подобного инварианта создает определенные сложности при работе с ним. Естественным является поиск чисто алгебраических или теоретико-множественных объектов, способных играть роль инвариантов отношения рациональной эквивалентности многообразий универсальных алгебр. Подобные инварианты указаны, в частности, в работе Д. Пигоцци [2]. На решетке конгруэнций $\mathrm{Con}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ им определено действие эндоморфизмов алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ с конечными относительно свободных порождающих носителями при выделенных эндоморфизмах, переводящих свободные порождающие алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ самих в себя. Подобная «решетка подстановок» и играет, как показано в [2], роль инварианта отношения рациональной эквивалентности на многообразиях, однако в работе [2] отсутствует описание (абстрактное) класса решеток с заданными на них действиями, изоморфных «решеткам подстановок» многообразий универсальных алгебр.

В настоящей работе в качестве инвариантов отношения рациональной эквивалентности предложено действие полугруппы эндоморфизмов алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ на основном множестве этой алгебры (полигон) и дано абстрактное описание полигонов, изоморфных подобному инварианту для некоторого многообразия универсальных алгебр, в терминах этих полигонов описаны многообразия, рационально эквивалентные многообразию булевых алгебр.

Через $\mathrm{End}\,\mathscr{A}$ будем далее обозначать полугруппу эндоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$. Под *меченым полигоном* будем понимать тройку $\langle A; X; S\rangle$, где $A$ — некоторое множество, $X$ — подмножество $A$, а $S$ — некоторая полугруппа отображений $A$ в $A$. Для любого многообразия $\mathscr{M}$ универсальных алгебр под *свободным меченым полигоном многообразия $\mathscr{M}$* будем иметь в виду тройку $\langle F_{\mathscr{M}}(X); X, \mathrm{End}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)\rangle$, где $|X| = \aleph_0, F_{\mathscr{M}}(X)$ — основное множество алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, $\mathscr{M}$-свободно порожденной множеством $X$.

Два меченых полигона $\langle A_1; X_1; S_1\rangle$, $\langle A_2; X_2; S_2\rangle$ назовем *изоморфными*, если существует биекция $\varphi$ множества $A_1$ на $A_2$ такая, что $\varphi(X_1) = X_2$ и $\varphi$ сопрягает отображения из $S_1$ с отображениями из $S_2$, т. е. отображение $f \to f^{\varphi} = \varphi^{-1} f \varphi$ является изоморфизмом полугруппы $S_2$ на полугруппу $S_1$.

Очевидно, что рациональная эквивалентность многообразий $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ влечет изоморфизм свободных меченых полигонов этих многообразий. С другой стороны, изоморфизм свободных меченых полигонов многообразий $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ также очевидным образом влечет изоморфизм «решеток подстановок» Пигоцци этих многообразий и тем самым рациональную эквивалентность многообразий $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$. Таким образом, свободные меченые полигоны многообразий универсальных алгебр являются инвариантами отношения рациональной эквивалентности многообразий, и возникает естественный вопрос описания меченых полигонов, изоморфных свободным меченым полигонам многообразий универсальных алгебр.

Рассмотрим следующие условия относительно меченого полигона $\langle A; X; S\rangle$.

I. Любое отображение $\varphi$ множества $X$ в $A$ продолжимо до некоторого отображения $\psi_\varphi$ множества $A$ в себя, входящего в $S$.

II. Для любого $a \in A$ существует конечное подмножество $Y$ множества $X$ такое, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ равенство $\varphi_1|Y = \varphi_2|Y$ влечет равенство $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ и $Y$ минимально среди подмножеств множества $X$, обладающих подобным свойством.

Здесь $\varphi|Y$ — ограничение $\varphi$ на множество $Y$. Указанное в свойстве II множество $Y$ будем обозначать через $\mathrm{Var}(a)$.

Заметим, что при выполнении условия II отображение $\psi_\varphi$ из условия I определяется по $\varphi$ однозначно.

Очевидно, что свободные меченые полигоны многообразий универсальных алгебр удовлетворяют обоим условиям I и II. На самом деле, имеет место

**Теорема 1.** *Меченый полигон $\langle A, X, S\rangle$ изоморфен свободному меченому полигону некоторого нетривиального многообразия $\mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям* I *и* II *и множество $X$ счетно.*

Доказательство. Для любого $a \in A$ упорядочим некоторым фиксированным образом множество $\mathrm{Var}(a) = \{x_1^a, \dots, x_n^a\} \subseteq X$ в виде кортежа $\overline{x}^a = \langle x_1^a, \dots, x_n^a\rangle$. Введем в рассмотрение символ $n$-местной операции $g_a(x_1, \dots, x_n)$, определив последнюю на множестве $A$ следующим образом. Для произвольных $b_1, \dots, b_n \in A$ пусть $\varphi$ входит в $S$ и таково, что $\varphi(x_i^a) = b_i$ $(i \le n)$. Такое $\varphi$ найдется в силу условия I. Полагаем $g_a(b_q, \dots, b_n) = \varphi(a)$.

Прежде всего отметим корректность определения операции $g_a$ (независимость ее от выбора $\varphi$). Действительно, если $\varphi_1 \in S$ и $\varphi_1(x_i^a) = b_i$ $(i \le n)$, то в силу условия II и того, что $\{x_1^a, \dots, x_n^a\} = \mathrm{Var}(a)$, имеет место равенство $\varphi(a) = \varphi_1(a)$ и тем самым операция $g_a$ определена на $A$ однозначно.

Рассмотрим алгебру $\mathscr{A} = \langle A; g_a \mid a \in A\rangle$. Пусть $\varphi \in S$. Покажем, что $\varphi \in \mathrm{End}\,\mathscr{A}$. Надо для любого $a \in A$, $\mathrm{Var}(a) = \{x_1^a, \dots, x_n^a\}$, и любых $b_1, \dots, b_n \in A$ показать, что
$$\varphi(g_a(b_1, \dots, b_n)) = g_a(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)).$$

Пусть $\varphi(b_i) = c_i$ $(i \le n)$ и $\varphi_1 \in S$ таково, что $\varphi_1(x_i^a) = c_i$ $(i \le n)$. Тогда по определению $g_a$
$$g_a(c_1, \dots, c_n) = \varphi_1(a).$$

Выберем $\varphi' \in S$ такое, что $\varphi'(x_i^a) = b_i$. В этом случае $\varphi\varphi'(x_i^a) = \varphi_1(x_i)$ $(i \le n)$ и, так как $\mathrm{Var}(a) = \{x_1^a, \dots, x_n^a\}$, то $\varphi\varphi'(a) = \varphi_1(a)$. По определению $g_a$ имеем $g_a(b_1, \dots, b_n) = \varphi'(a)$. Тем самым действительно
$$\varphi(g_a(b_1, \dots, b_n)) = \varphi(\varphi'(a)) = \varphi_1(a) = g_a(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)).$$

Включение $S \subseteq \mathrm{End}\,\mathscr{A}$ доказано.

В силу определения функций $g_a$ $(a \in A)$ множество $X$ является порождающим для алгебры $\mathscr{A}$. Поэтому эндоморфизмы алгебры $\mathscr{A}$ однозначно определяются своим действием на $X$. А это вместе с включением $S \subseteq \mathrm{End}\,\mathscr{A}$, однозначной определимостью отображений из $S$ их действием на $X$ и тем, что любое отображение $X$ в $A$ продолжимо до $S$-отображения, влечет равенство $S = \mathrm{End}\,\mathscr{A}$.

С другой стороны, как хорошо известно (см., к примеру, [3]), любая алгебра $\mathscr{A}$ со свободными в $\mathscr{A}$ порождающими $X$ (каждое отображение $X$ в $\mathscr{A}$ продолжимо до эндоморфизма алгебры $\mathscr{A}$) является алгеброй вида $\mathscr{F}_{\mathscr{M}(\mathscr{A})}(X)$, где $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ — многообразие, порожденное алгеброй $\mathscr{A}$. Таким образом, меченый полигон $\langle A; X; S\rangle$ совпадает со свободным меченым полигоном многообразия $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, и теорема доказана.

Очевидно, что свойства многообразий, инвариантные относительно отношения рациональной эквивалентности, должны выражаться в языке свободных меченых полигонов этих многообразий. К примеру, если $\langle A; X; S\rangle$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то соответствующие многообразия (для которых $\langle A; X; S\rangle$ является свободным меченым полигоном) будут конгруэнц-модулярными, конгруэнц-дистрибутивными, конгруэнц-перестановочными, конгруэнц-униформными либо конгруэнц-регулярными тогда и только тогда, когда совокупность ядер отображений из $S$ обладает соответствующими свойствами.

Заметим, что по меченому полигону $\langle A; X; S\rangle$, удовлетворяющему условиям теоремы 1, однозначно восстанавливается решетка подалгебр свободных алгебр многообразий, соответствующих инварианту $\langle A; X; S\rangle$. Действительно, прежде всего для любого $Y \subseteq X$ через $\langle Y\rangle$ обозначим множество $\{a \in A \mid \mathrm{Var}(a) \subseteq Y\}$, а через Sub — совокупность $\{B \subseteq A \mid \exists Y \subseteq X, \exists \varphi \in S\ B = \varphi(\langle Y\rangle)\}$. Очевидно, что решетка Sub подмножеств множеств $A$ является решеткой подалгебр свободной алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ для любого многообразия $\mathscr{M}$ такого, что $\langle A; X; S\rangle = \langle F_{\mathscr{M}}(X), X, \mathrm{End}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)\rangle$.

В силу этого многообразия, соответствующие инварианту $\langle A; X; S\rangle$, локально конечны тогда и только тогда, когда для любого конечного подмножества $Y \subseteq X$ множество $\langle Y\rangle$ также конечно.

На языке инвариантов — свободных меченых полигонов — выразимы ограничения на арность функций, входящих в сигнатуру соответствующих многообразий. Проще всего это формулируется для унаров: многообразие $\mathscr{M}$ условно рационально эквивалентно унарному многообразию тогда и только тогда, когда $|\mathrm{Var}(a)| \leq 1$ для любого $a \in A$, где $\langle A; X; S\rangle = \langle F_{\mathscr{M}}(X), X, \mathrm{End}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)\rangle$.

Несколько сложнее выразить ограничения арности функций, входящих в сигнатуру многообразия, числом $n$ при $n \leq 2$. Назовем многообразие *$n$-арным*, если оно рационально эквивалентно некоторому многообразию, арность функций, входящих в сигнатуру которого, не превышает $n$. Меченый полигон $\langle A; X; S\rangle$ назовем *$n$-связанным*, если для любого $Y \subseteq X$ и любого $a \in \langle Y\rangle$ существуют натуральное число $m$ и отображение $f$ множества $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ в совокупность подмножеств множества $A$ такие, что $f(0) = Y$ для любого $0 < i \leq m-1$ и для любого $a' \in f(i)\backslash f(i-1)$ найдутся $a'_1, \ldots, a'_n \in f(i-1)$ такие, что $a' \in \langle\{a'_1, \ldots, a'_n\}\rangle$ и при этом $a \in f(m-1)$.

Нетрудно заметить, что многообразие $\mathscr{M}$ $n$-арно тогда и только тогда, когда его свободный меченый полигон $n$-связан.

Заметим также, что если свободный меченый полигон многообразия $\mathscr{M}$ $n$-связан, то действие полугруппы $\mathrm{End}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ на множество $F_{\mathscr{M}}(X)$ однозначно определяется ограничениями отображений из $\mathrm{End}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ на $n$-элементные подмножества множества $X$. А так как действие ограничений отображений из $\mathrm{End}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ на $n$-элементные подмножества $Y_1$ и $Y_2$ множества $X$ сопряжены с помощью любой биекции множества $F_{\mathscr{M}}(X)$, переводящей $X$ в $X$ и $Y_1$ в $Y_2$, то действие полугруппы $\mathrm{End}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ на множество $F_{\mathscr{M}}(X)$ однозначно определяется ограничениями отображений из $\mathrm{End}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ на некоторое фиксированное

$n$-элементное подмножество $Y$ множества $X$.

Эти замечания позволяют, к примеру, на языке свободных меченых полигонов охарактеризовать многообразия, рационально эквивалентные многообразию $BA$ булевых алгебр.

Меченый полигон $\langle A, X, S\rangle$ назовем *ретрактивным*, если для любого отображения $\varphi \in S$ найдутся подмножество $Z \subseteq A$ и отображения $\varphi', \varphi'' \in S$ такие, что $\langle Z\rangle = Z$, $\varphi'(A) = Z$, $\varphi''$ взаимно однозначно отображает $Z$ на $\varphi(A)$ и $\varphi'\varphi'' = \varphi$. Таким образом, свободный меченый полигон $\langle F_{\mathscr{M}}(X), X, \operatorname{End} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)\rangle$ многообразия $\mathscr{M}$ является ретрактивным тогда и только тогда, когда каждый эндоморфный образ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ является ретрактом алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$. Хорошо известно, что любая не более чем счетная булева алгебра представляет собой ретракт свободной счетно-порожденной булевой алгебры. В силу этого свободный меченый полигон многообразия $BA$ ретрактивен.

Меченый полигон $\langle A, X, S\rangle$ назовем *$w$-гомогенным*, если для любого конечного $Z \in \mathrm{Sub}$ и любого $\varphi \in S$, взаимно однозначно отображающего $Z$ на $\varphi(Z)$, существует $\psi \in S$, взаимно однозначно отображающее $A$ на $A$ и такое, что $\varphi|_Z = \psi|_Z$.

Свободный меченый полигон многообразия $\mathscr{M}$ является $w$-гомогенным тогда и только тогда, когда изоморфизм $\varphi'$ любой конечной подалгебры $\mathscr{A}_1$ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ на алгебру $\varphi'(\mathscr{A}_1)$, являющийся ограничением на $\mathscr{A}_1$ некоторого эндоморфизма $\varphi$ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, может быть продолжен до автоморфизма алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$. Хорошо известная $w$-гомогенность (в теоретико-модельном смысле) алгебры $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ влечет, таким образом, $w$-гомогенность свободного меченого полигона многообразия булевых алгебр.

Пусть $\langle A, X, S\rangle$ — некоторый меченый полигон, $S' = S'' \cup S'''|_Y$, где $S''$, $S'''$ — некоторые подмножества полугруппы $S$, $Y \subseteq X$ и $S'''|_Y = \{\varphi|_Y \mid \varphi \in S'''\}$. Тройку $\langle A, X, S'\rangle$ назовем в данном случае *частичным меченым полигоном*. Два частичных меченых полигона $\langle A_1, X_1, S_1\rangle$ и $\langle A_2, X_2, S_2\rangle$ назовем *изоморфными*, если существует биекция $\psi$ множества $A_1$ на множество $A_2$ такая, что $\psi(X_1) = X_2$ и $\psi$ сопрягает отображения из $S_1$ с отображениями из $S_2$. *2-Авточастичным свободным меченым полигоном* многообразия $\mathscr{M}$ назовем частичный меченый полигон $\langle \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X), X, \operatorname{End} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\{x_1, x_2\}) \cup \operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)\rangle$, где $x_1$, $x_2$ — пара различных фиксированных элементов из $X$, а $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$.

**Теорема 2.** *Многообразие $\mathscr{M}$ рационально эквивалентно многообразию булевых алгебр тогда и только тогда, когда оно*

1) *2-арно,*

2) *алгебра $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ ретрактивна и $\omega$-гомогенна,*

3) *2-авточастичные свободные меченые полигоны многообразий $\mathscr{M}$ и $BA$ изоморфны.*

Доказательство. Поскольку, как замечено выше, свойства 1–3 выразимы в языке меченых полигонов и многообразие булевых алгебр обладает этими свойствами, а свободные меченые полигоны суть инварианты отношения рациональной эквивалентности многообразий, то любое многообразие, рационально эквивалентное многообразию булевых алгебр, обладает свойствами 1–3. Покажем обратное. Пусть многообразие $\mathscr{M}$ обладает свойствами 1–3 и $\varphi$ — некоторый изоморфизм 2-авточастичных свободных меченых полигонов многообразий $\mathscr{M}$ и $BA$. Достаточно показать, что $\varphi$ продолжим до изоморфизма свободных меченых полигонов $\langle F_{\mathscr{M}}(X), X, \operatorname{End} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)\rangle$ и $\langle F_{BA}(X), X, \operatorname{End} \mathscr{F}_{BA}(X)\rangle$.

В силу 2-арности многообразий $\mathscr{M}$ и $BA$ достаточно заметить, что $\varphi$ сопрягает любые гомоморфизмы подалгебр вида $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(Y)$, где $Y = |2|$, в алгебру $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ с подобными гомоморфизмами алгебры $\mathscr{F}_{BA}(X)$. В силу ретрактивности многообразий $\mathscr{M}$ и $BA$ это следует из того, что $\varphi$ сопрягает эндоморфизмы алгебр вида $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(Y)$, где $|Y| = 2$, с подобными эндоморфизмами алгебры $\mathscr{F}_{BA}(X)$, и из того, что $\varphi$ сопрягает изоморфизмы между 2-порожденными подалгебрами алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ с подобными изоморфизмами алгебры $\mathscr{F}_{BA}(X)$. Последние же утверждения вытекают из того, что $\varphi$ сопрягает эндоморфизмы алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\{x_1, x_2\})$ с эндоморфизмами алгебры $\mathscr{F}_{BA}(\{x_1, x_2\})$ и автоморфизмы алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ с автоморфизмами алгебры $\mathscr{F}_{BA}(X)$, в то время как в силу $w$-гомогенности алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ и $\mathscr{F}_{BA}(X)$ каждый изоморфизм между 2-порожденными подалгебрами алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ ($\mathscr{F}_{BA}(X)$) продолжаем до автоморфизма алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ (алгебры $\mathscr{F}_{BA}(X)$). Теорема доказана.

Напомним, что *финитным тонким спектром* многообразия $\mathscr{M}$ называется функция $f_{\mathscr{M}} : w \to w + 1$, где для $n \in w$ значение $f_{\mathscr{M}}(n)$ — число типов изоморфизма $n$-элементных $\mathscr{M}$-алгебр. Таким образом, $f_{BA}(n) = 1$, если $n = 2^m$ для некоторого $m \in w$, и $f_{BA}(n) = 0$ в противном случае. Известна теорема В. Тейлора [4], утверждающая, что для любого многообразия $\mathscr{M}$ равенство $f_{\mathscr{M}} = f_{BA}$ равносильно тому, что $\mathscr{M}$ рационально эквивалентно одному из следующих семи многообразий: булевым 3-группам, булевым группам, булевым 3-кольцам, булевым 3-алгебрам, булевым решеткам, булевым кольцам, булевым алгебрам. Из теоремы 2 вытекает следующая характеризация многообразий, рационально эквивалентных многообразию булевых алгебр, выделяющая таковые из перечисленных семи многообразий.

Под *конкретной решеткой подалгебр* $\langle A, \operatorname{Sub}\mathscr{A}\rangle$ алгебры $\mathscr{A}$ будем понимать основное множество $A$ алгебры $\mathscr{A}$ и совокупность $\operatorname{Sub}\mathscr{A}$ подмножеств этого множества, являющихся основными множествами подалгебр алгебры $\mathscr{A}$. Под *изоморфизмом* конкретных решеток $\langle A, \operatorname{Sub}\mathscr{A}\rangle$ и $\langle B, \operatorname{Sub}\mathscr{B}\rangle$ подалгебр алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ соответственно понимаем биекцию $\varphi$ множества $A$ на множество $B$ такую, что $\operatorname{Sub}\mathscr{B} = \{\varphi(C) \mid C \in \operatorname{Sub}\mathscr{B}\}$.

**Теорема 3.** *Многообразие $\mathscr{M}$ рационально эквивалентно многообразию булевых алгебр тогда и только тогда, когда*

$1'$) $f_{\mathscr{M}} = f_{BA}$,

$2'$) *конкретные решетки подалгебр алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ и $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ изоморфны.*

Доказательство. Очевидно, что любое многообразие $\mathscr{M}$ рационально эквивалентное многообразию булевых алгебр, обладает свойствами $1'$, $2'$. Покажем обратное. Прежде всего заметим, что изоморфизм конкретных решеток подалгебр алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ и $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ влечет очевидным образом 2-арность многообразия $\mathscr{M}$.

В силу условия $2'$ многообразие $\mathscr{M}$ локально конечно. Согласно условию $1'$ конечно-порожденные подалгебры алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ имеют мощность $2^n$ для $n \in w$ и существует двуэлементная $\mathscr{M}$-алгебра $\mathscr{A}_0$. Если $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ и $|\mathscr{B}| = 2^n$, то ввиду того, что $f_{\mathscr{M}}(2^n) = 1$, алгебры $\mathscr{B}$ и $\mathscr{A}_0^n$ изоморфны. А так как алгебра $\mathscr{A}_0^n$ имеет по крайней мере $n!$ автоморфизмов (индуцированных перестановками сомножителей), то и любая $2^n$-элементная подалгебра алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ имеет по крайней мере $n!$ автоморфизмов. С другой стороны, число подалгебр $2^{2n}$-элементной $\mathscr{M}$-алгебры в силу условия $2'$ должно равняться $s(n)$ — числу разбиений $2^{2n}$-элементного множества. Существование же $(n! + 1)$-первого автоморфизма $2^n$-элементной $\mathscr{M}$-алгебры влекло бы существование $s(n)+1$-й подалгебры $2^{2n}$-элементной $\mathscr{M}$-алгебры (графика этого автоморфизма). Тем самым число автоморфизмов $2^n$-элементных подалгебр алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ равно $n!$ и все они индуцируются перестановками сомножителей в представлении этой $2^n$-элементной $\mathscr{M}$-алгебры в виде степени 2-элементной $\mathscr{M}$-алгебры. Таким образом, изоморфизм $\varphi$ конкретных решеток подалгебр алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ и $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ индуцирует изоморфизм действий на множествах $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ и $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ изоморфизмов между конечными подалгебрами этих алгебр. В силу же локальной конечности многообразий $\mathscr{M}$ и $BA$ любой автоморфизм (и любой изоморфизм между подалгебрами) алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ и $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ аппроксимируется изоморфизмами между конечными подалгебрами этих алгебр. Тем самым $w$-гомогенность и ретрактивность алгебры $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ влечет $w$-гомогенность и ретрактивность алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$. По той же причине изоморфизм $\varphi$ конкретных решеток подалгебр алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ и $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$индуцирует изоморфизм 2-авточастичных свободных меченых полигонов этих алгебр. В силу утверждения теоремы 2 многообразия $\mathscr{M}$ и $BA$ рационально эквивалентны. Теорема доказана.

Аналогично доказывается справедливость утверждения, подобного утверждению теоремы 3, для любого многообразия, порожденного некоторой примальной алгеброй, на месте многообразия $BA$.

В заключение отметим независимость условий $1'$, $2'$ теоремы 3. Действительно, пусть $\mathscr{M}$ — многообразие, порожденное алгебрами $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ — обогащениями двух- и четырехэлементной булевых алгебр новой функцией $d(x,y,z)$, интерпретируемой на $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ как дискриминатор. Тогда $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0) = \mathscr{F}_{\mathscr{M}(\mathscr{A}_1)}(\aleph_0)\times \mathscr{F}_{\mathscr{M}(\mathscr{A}_2)}(\aleph_0), \mathscr{F}_{\mathscr{M}(\mathscr{A}_i)}(\aleph_0)$ — булева степень алгебры $\mathscr{A}_i$ с показателем $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ и тем самым конкретные решетки подалгебр алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\aleph_0)$ и $\mathscr{F}_{BA}(\aleph_0)$ изоморфны. Иначе говоря, для многообразия $\mathscr{M}$ выполнено условие $2'$ и нарушается условие $1'$. То, что условие $1'$ не влечет выполнимости условия $2'$, вытекает из упомянутого выше результата В. Тейлора и утверждения теоремы 3.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Мальцев А. И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 1. С. 29–32.
2. *Pigozzi D.* A lattice theoretic characterization of equivalent quasivarieties // Contemporary Math. 1992. V. 131, N 2. P. 187–199.
3. *Gratzer G.* Universal Algebra. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1978.
4. *Taylor W.* The fine spectrum of a variety // Algebra Univers. 1975. V. 5, N 2. P. 263–303.


*Статья поступила 7 октября 1998 г.*

*г. Новосибирск*
*Новосибирский гос. технический университет*