Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 512.54.01

О КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ ЛЕВИ, ПОРОЖДЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРУППАМИ

А. И. Будкин, Л. В. Таранина

Аннотация: Обозначим через $L(\mathscr{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathscr{M}$, и назовем его *классом Леви, порожденным* $\mathscr{M}$.

Пусть $\mathscr{K}$ — произвольное множество нильпотентных групп класса ≤ 2 без элементов порядка 2. Предположим, что во всякой группе из $\mathscr{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой. Доказано, что в этом случае $L(q\mathscr{K})$ содержит лишь нильпотентные класса ≤ 3 группы, здесь $q\mathscr{K}$ — квазимногообразие, порожденное $\mathscr{K}$. Показано также, что эту теорему нельзя расширить на класс групп $\mathscr{K}$, содержащих элементы порядка 2. Библиогр. 14.

Пусть $\mathscr{M}$ — класс групп. Через $L(\mathscr{M})$ будем обозначать класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathscr{M}$. Класс $L(\mathscr{M})$ групп называется *классом Леви, порожденным* $\mathscr{M}$. Впервые классы Леви были введены в [1] под влиянием работы Леви [2], в которой исследовались группы с абелевыми подгруппами вида $(x)^G$. В [3] доказано, что если класс $\mathscr{M}$ — многообразие, то $L(\mathscr{M})$ также многообразие групп, а в [4] установлено, что если $\mathscr{M}$ — квазимногообразие, то $L(\mathscr{M})$ снова квазимногообразие групп.

Хорошо известно (см., например, [5, с. 151]), что если M и N — нормальные нильпотентные подгруппы группы G, то MN также является нильпотентной подгруппой. Поэтому если $\mathscr{M}$ — квазимногообразие нильпотентных групп, то класс Леви $L(\mathscr{M})$ состоит лишь из локально нильпотентных групп. Отметим, что классы Леви, порожденные множествами нильпотентных групп, изучались в [1, 6–8].

Обозначим через $\mathscr{N}_c$ многообразие нильпотентных групп класса $\leq c$, $q\mathscr{K}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathscr{K}$. Квазимногообразие называется нильпотентным, если все группы в нем нильпотентны.

В [6] показано, что $L(\mathscr{N}_2)$ совпадает с многообразием 3-энгелевых групп. Согласно [9] существуют 3-энгелевы группы, не являющиеся нильпотентными, значит, класс $L(\mathscr{N}_2)$ не является нильпотентным многообразием. В [4] найдены условия, при выполнении которых квазимногообразие $L(\mathscr{M})$ нильпотентно. А именно, там доказано (теорема 2), что если $\mathscr{K}$ — произвольное множество нильпотентных групп класса 2 без элементов порядков 2 и 5 и централизатор любого элемента, не принадлежащего центру каждой группы из $\mathscr{K}$, — абелева

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00156) и Госкомитета РФ по высшему образованию.

© 2000 Будкин А. И., Таранина Л. В.

подгруппа, то $L(q\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{N}_3$. В действительности, в доказательстве этой теоремы отсутствие элементов порядка 5 нужно только для установления того, что всякая 3-порожденная группа из $L(q\mathscr{K})$ нильпотентна класса ≤ 4. Это означает, что в [4], в частности, получен следующий результат.

Теорема [4]. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольное множество нильпотентных групп класса 2 без элементов порядка 2. Предположим, что во всякой группе из $\mathscr{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа. Если всякая 3-порожденная группа из $L(q\mathscr{K})$ нильпотентна класса ≤ 4, то $L(q\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{N}_3$.*

Основная цель данной работы — доказать следующую теорему, усиливающую теорему 2 из [4].

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольное множество нильпотентных групп класса ≤ 2 без элементов порядка 2. Предположим, что во всякой группе из $\mathscr{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой. Если $\mathscr{M} = q\mathscr{K}$, то $L(\mathscr{M}) \subseteq \mathscr{N}_3$.*

Кроме того, мы покажем, что теорему 1 нельзя расширить на класс групп $\mathscr{K}$, содержащих элементы второго порядка. Справедлива

Теорема 2. *Существует множество $\mathscr{K}$ нильпотентных групп класса 2, во всякой группе которого централизатор каждого элемента, не принадлежащего центру, является абелевой подгруппой, и квазимногообразие Леви $L(q\mathscr{K})$ не нильпотентно.*

В работе используются следующие обозначения: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $[[x, y], z] = [x, y, z]$; гр$(x, y, \dots)$ — группа, порожденная элементами $x, y, \dots$; (x) — циклическая группа, порожденная x; $(x)^G =$ гр$(g^{-1}xg \mid g \in G)$, $Z(G)$ — центр группы G; $c(i, j, k, l, m) = [x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$; $d(i, j, k, l, m) = [x_i, x_j, x_k, [x_l, x_m]]$.

Стандартным образом определяем вес $w(a)$ коммутатора, считая, что

1) $w(x) = 1$, если x — предметная переменная,

2) $w(a) = w(u) + w(v)$, если $a = [u, v]$.

Группа называется 3-*энгелевой*, если в ней истинно тождество

$$(\forall x)(\forall y)\ ([x, y, y, y] = 1).$$

Нам понадобится следующий признак принадлежности, который является частным случаем теоремы 3 из [10]: конечно-определенная группа G принадлежит квазимногообразию $q\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathscr{K}$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.

При написании тождеств кванторы всеобщности иногда будут опускаться.

С основными определениями можно познакомиться в работах [1, 5, 11].

Введем обозначения:

$$y_1=c(3,1,1,2,2),\ y_2=c(3,1,1,2,3),\ y_3=c(3,1,2,2,3),\ y_4=c(3,1,2,3,3),$$
$$y_5=c(2,1,1,3,3),\ y_6=c(2,1,2,3,3),\ y_7=d(3,1,1,3,2),\ y_8=d(3,1,1,2,1),$$
$$y_9=d(3,1,2,3,2),\ y_{10}=d(3,1,2,2,1),\ y_{11}=d(3,1,2,3,1),\ y_{12}=d(3,2,2,3,1),$$
$$y_{13}=d(3,2,2,2,1),\ y_{14}=d(2,1,1,3,2),\ y_{15}=d(2,1,1,3,1),\ y_{16}=d(2,1,2,3,2),$$
$$y_{17}=d(2,1,2,3,1),\ y_{18}=d(3,1,3,3,2),\ y_{19}=d(3,1,3,2,1),\ y_{20}=d(3,2,3,3,1),$$
$$y_{21}=d(3,2,3,2,1),\ y_{22}=d(2,1,3,2,1),\ y_{23}=d(2,1,3,3,1),\ y_{24}=d(2,1,3,3,2).$$

Лемма 1. *Пусть G — 3-энгелева группа без элементов порядка 2. Тогда в группе G истинны следующие тождества:*

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(y_8y_{15}=1), \tag{1}$$
$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(y_1y_{10}y_{14}y_{17}y_{22}=1), \tag{2}$$
$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)\big(y_5^{-1}y_7y_{11}^{-1}y_{19}^{-1}y_{23}^{-1}=1\big). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x_1,x_2,x_3\in G$. Групповые слова $c(i,j,k,l,m)$, $d(i,j,k,l,m)$ и их значения на элементах $x_1,x_2,x_3\in G$ будем обозначать одинаково. Заметим, что согласно [12] всякая 3-порожденная 3-энгелева группа без элементов порядка 2 является нильпотентной класса ≤ 5. Можно и будем считать, что G — нильпотентная группа класса 5. В частности, значения всех коммутаторов веса ≥ 6 в группе G равны 1. Кроме того, согласно [12] всякая 2-порожденная 3-энгелева группа без элементов порядка 2 нильпотентна класса ≤ 3, следовательно, значения коммутаторов веса ≥ 4 от двух переменных равны 1 в группе G. Эти замечания неоднократно будем использовать. Выразим сначала элемент $c(1,2,3,1,1)\in G$ через элементы $y_1,y_2,\ldots,y_{24}$. Для этого можно воспользоваться хорошо известным собирательным процессом Ф. Холла [13]. Мы установим необходимое выражение, пользуясь следующими хорошо известными коммутаторными тождествами [5]:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([xy,z]=[x,z][x,z,y][y,z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,yz]=[x,z][x,y][x,y,z]),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1).$$

Так как G — нильпотентная группа класса 5 и 3-энгелева, то

$$c(1,2,3,1,1)=c(2,1,3,1,1)^{-1},$$

$$c(2,1,1,3,1)=[x_1,[x_2,x_1,x_1],x_3]^{-1}\ [x_3,x_1,[x_2,x_1,x_1]]^{-1}$$
$$=c(3,1,1,1,2)d(2,1,1,3,1)=d(2,1,1,3,1).$$

Далее,

$$\begin{aligned}c(2,1,3,1,1) &= [x_1,[x_2,x_1],x_3,x_1]^{-1}[x_3,x_1,[x_2,x_1],x_1]^{-1}\\ &= c(2,1,1,3,1)d(2,1,1,3,1)d(3,1,1,2,1)^{-1}\\ &= d(2,1,1,3,1)^2 d(3,1,1,2,1)^{-1} = y_{15}^2 y_8^{-1}.\end{aligned}$$

Итак,

$$c(1,2,3,1,1) = y_{15}^{-2} y_8.$$

Аналогично находим, что

$$c(1,2,3,3,1) = y_5^{-1} y_{19} y_{23}^{-2}, \quad c(1,2,1,3,1) = y_{15}^{-1}, \quad c(1,3,2,2,1) = y_1^{-1} y_{10}^{-2} y_{17},$$
$$c(1,3,3,2,1) = y_{19}^{-1}, \quad c(1,3,2,3,1) = y_7 y_{11}^{-1} y_{19}^{-1} y_{23}, \quad c(1,3,1,2,1) = y_8^{-1},$$
$$c(1,2,3,2,1) = y_{10} y_{14}^{-1} y_{17}^{-1} y_{22}^{-1}, \quad c(1,2,2,3,1) = y_{17}^{-1}, \quad c(1,3,2,1,1) = y_8^{-2} y_{15}.$$

Пусть k, m, n — произвольные целые числа. Выразим теперь элемент

$$\left[x_1, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_1\right]$$

через $y_1, y_2, \ldots, y_{24}$. Учитывая, что G — нильпотентная класса 5 и 3-энгелева группа, выводим

$$\begin{aligned}1 &= \left[x_1, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_1\right]\\ &= (c(1,2,2,3,1)c(1,2,3,2,1)c(1,3,2,2,1))^{m^2k}(c(1,2,3,3,1)c(1,3,2,3,1)\\ &\quad c(1,3,3,2,1))^{k^2m}(c(1,2,1,3,1)c(1,2,3,1,1)c(1,3,1,2,1)c(1,3,2,1,1))^{mnk}\\ &= \left(y_1^{-1} y_{10}^{-1} y_{14}^{-1} y_{17}^{-1} y_{22}^{-1}\right)^{m^2k} \left(y_7 y_5^{-1} y_{11}^{-1} y_{19}^{-1} y_{23}^{-1}\right)^{k^2m} \left(y_8^{-2} y_{15}^{-2}\right)^{mnk}.\end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве сначала $n = 0$, $k = -1$, $m = 1$, а потом $n = 0$, $k = -1$, $m = 2$, получаем $y_1 y_{10} y_{14} y_{17} y_{22} = 1$, $y_7 y_5^{-1} y_{11}^{-1} y_{19}^{-1} y_{23}^{-1} = 1$. Отсюда вытекает, что $(y_8^{-2} y_{15}^{-2})^{mnk} = 1$ и, следовательно, $y_8 y_{15} = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — 3-энгелева группа без элементов порядка 2. Тогда в группе G истинны следующие тождества:*

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(y_1 y_{14} = 1), \tag{4}$$

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)\left(y_{13} y_{16}^{-3} = 1\right). \tag{5}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1, поэтому изложим его кратко. Пусть k, m, n — произвольные целые числа, $x_1, x_2, x_3 \in G$. Используя коммутаторные тождества и равенства

$$c(1,3,2,1,2) = y_1^{-1} y_{10}^{-1} y_{17}, \quad c(1,2,3,1,2) = y_{14}^{-1} y_{17}^{-1} y_{10},$$

$$c(1,2,2,3,2) = y_{16}^{-1}, \quad c(1,2,3,2,2) = y_{16}^{-2} y_{13}, \quad c(1,2,1,3,2) = y_{14}^{-1},$$

выразим элемент

$$\left[x_1, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_2\right]$$

через $y_1, y_2, \ldots, y_{24}$. В результате получим требуемые тождества.

Лемма 3. *Пусть G — 3-энгелева группа без элементов порядка 2. Тогда в группе G истинны следующие тождества:*

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(y_2 y_5 = 1), \tag{6}$$

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(y_4^{-1} y_{18} = 1), \tag{7}$$

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(y_4 = 1). \tag{8}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Нужно только заметить, что в группе G справедливы равенства

$$c(3,1,3,2,3) = [x_2,[x_3,x_1],x_3,x_3]^{-1}[x_3,x_2,[x_3,x_1],x_3]^{-1} = y_4 y_{18} y_{20}^{-1},$$

$$c(3,1,3,2,3) = [x_3,[x_3,x_1,x_3],x_2]^{-1}[x_2,x_3,[x_3,x_1,x_3]]^{-1} = y_{18}^{-1}.$$

Чтобы получить тождества (6) и (7), надо выразить элемент

$$\big[x_1, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3\big]$$

через $y_1, y_2, \dots, y_{24}$, принимая во внимание следующие тождества в группе G:

$$c(1,2,3,1,3) = y_5^{-1} y_{19} y_{23}^{-1}, \quad c(1,3,2,1,3) = y_2^{-1} y_{19}^{-1} y_{23}, \quad c(3,1,3,2,3) = y_{18}^{-1}.$$

Чтобы получить тождество (8), необходимо через $y_1, y_2, \dots, y_{24}$ выразить элемент

$$\big[x_3, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3^k x_2^m x_1^n, x_3\big],$$

воспользовавшись при этом следующими тождествами в G:

$$c(3,1,3,2,3) = y_4 y_{18} y_{20}^{-1}, \quad c(3,2,3,1,3) = y_4 y_{18}^{-1} y_{20}, \quad c(3,2,1,3,3) = y_4.$$

Лемма 4. *Пусть G — 3-энгелева группа без элементов порядка 2. Тогда в группе G истинно тождество*

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(y_2 y_7 = 1). \tag{9}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, легко проверяется, что в G

$$c(3,1,1,3,2) = c(3,1,1,2,3)d(3,1,1,3,2) = y_2 y_7.$$

Так как значение $c(3,1,1,3,2)$ на элементах x_1, x_2, x_3 равно 1, то тождество $y_2 y_7 = 1$ выполнено в G.

Доказательство теоремы 1. Известно [14], что если всякая 3-порожденная подгруппа данной группы нильпотентна класса ≤ 3, то сама группа также нильпотентна класса ≤ 3. Следовательно, достаточно показать, что всякая 3-порожденная группа G из $L(\mathscr{M})$ принадлежит $\mathscr{N}_3$.

Пусть G — 3-порожденная 3-энгелева группа без элементов порядка 2, a, b, c — произвольные элементы из G. В силу [12] G — нильпотентная группа класса ≤ 5, в частности, все ее подгруппы конечно определены. Покажем, что все тождества $y_i = 1$ $(i = 1, 2, \dots, 24)$ истинны в G.

По (1) имеем $[c,a,c,[c,b]] = [c,b,c,[c,a]]^{-1}$. Возьмем следующие элементы из $(c)^G$:

$$x = [c,b,c], \quad y = [c,b], \quad z = [c,a,c], \quad k = [c,a], \quad c.$$

Тогда,

$$[z,y] = [x,k]^{-1}, \quad [x,y] = [c,b,c,[c,b]] = 1, \quad [x,z] = 1.$$

Предположим, что $[z,y] \neq 1$. Поскольку $(c)^G \in \mathscr{M} = q\mathscr{K}$, по признаку принадлежности существует гомоморфизм $\varphi : (c)^G \to A$, где $A \in \mathscr{K}$, при котором $\varphi([z,y]) \neq 1$. Так как

$$1 \neq \varphi([z,y]) = [\varphi(x), \varphi(k)]^{-1} = [\varphi(x^{-1}), \varphi(k)],$$

то $\varphi(x^{-1})$ не принадлежит центру группы A. Но $\varphi(y)$, $\varphi(z)$ содержатся в централизаторе элемента $\varphi(x^{-1})$, значит, по условию теоремы $[\varphi(y), \varphi(z)] = 1$. Полученное противоречие означает, что $[z,y] = 1$. Итак, $[c,a,c,[c,b]] = 1$.

Из (9) вытекает, что $[c,a,a,[c,b]]^{-1} = [c,a,a,b,c]$. Выберем следующие элементы из $(c)^G$:

$$x = [c,a,a,b], \quad y = [c,b], \quad z = [c,a,a], \quad c.$$

Так как

$$[z,y] = [x,c]^{-1}, \quad [x,y] = 1, \quad [x,z] = 1,$$

как и в предыдущем случае, замечаем, что $[z,y] = 1$. Тем самым $[c,a,a,[c,b]] = 1$. По (6) и (9) теперь имеем $[c,a,a,b,c] = 1$, $[b,a,a,c,c] = 1$.

Суммируя полученное и используя (7), (8), видим, что $[c,a,c,[c,b]] = 1$, $[b,a,a,c,c] = 1$, $[a,b,c,a,a] = 1$, $[c,a,a,[c,b]] = 1$, $[c,a,a,b,c] = 1$, $[c,b,c,[c,a]] = 1$.

В силу выбора элементов a,b,c из G на эти соотношения можно смотреть как на тождества, истинные в G. Заменяя a,b,c произвольным образом на x_1,x_2,x_3 и учитывая (4), (5), среди тождеств G получим, в частности, следующие тождества: $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_4 = 1$, $y_5 = 1$, $y_6 = 1$, $y_7 = 1$, $y_8 = 1$, $y_{12} = 1$, $y_{13} = 1$, $y_{14} = 1$, $y_{15} = 1$, $y_{16} = 1$, $y_{17} = 1$, $y_{18} = 1$, $y_{19} = 1$, $y_{20} = 1$, $y_{21} = 1$.

Из тождества $[c,a,a,b,c] = 1$ следует тождество $c(2,3,3,1,2) = 1$. Далее, при помощи коммутаторных тождеств получаем равенства в G

$$\begin{aligned} &c(3,2,1,3,2) = c(3,2,1,2,3)d(3,2,1,3,2) \\ &= c(1,3,2,2,3)^{-1}c(2,1,3,2,3)^{-1}d(1,3,2,3,2)^{-1}d(2,1,3,3,2)^{-1} = y_3y_6^{-1}y_9y_{21}y_{24}^{-2}, \end{aligned}$$

$$c(3,2,3,1,2) = c(3,2,1,3,2)[x_3,x_1,[x_3,x_2],x_2]^{-1} = y_3y_6^{-1}y_{12}y_{21}y_{24}^{-2}.$$

Поскольку $c(2,3,3,1,2) = c(3,2,3,1,2)^{-1}$ в G, тождество $y_3^{-1}y_{24}^2 = 1$ истинно в G.

Из тождества $[b,a,a,c,c] = 1$ вытекает тождество $c(1,3,3,2,2) = 1$. Но $c(1,3,3,2,2) = y_3^{-1}y_9^{-2}y_{12}$ в G, поэтому тождество $y_3^{-1}y_9^{-2} = 1$ выполнено в G.

Тождество $y_3 = y_9^{-2}$ влечет, что $[c,a,b,b,c] = [c,a,b,[c,b]]^{-2}$. Выберем элементы из $(c)^G$:

$$x = [c,a,b,b], \quad y = [c,b], \quad z = [c,a,b], \quad c.$$

Видим, что

$$[z,y]^{-2} = [x,c], \quad [x,y] = 1, \quad [x,z] = 1.$$

Как при доказательстве равенства $[c, a, c, [c, b]] = 1$, можно показать, что $[z, y] = 1$. Таким образом, $[c, a, b, b, c] = 1$, $[c, a, b, [c, b]] = 1$. Так как $y_3^{-1} y_{24}^2 = 1$ в G, получаем, что тождества

$$y_3 = 1, \quad y_9 = 1, \quad y_{24} = 1$$

истинны в G.

Тождество $y_3 = 1$ влечет $c(1, 2, 3, 3, 1) = 1$ в G. Как и ранее, несложно установить, что в G

$$c(1, 2, 3, 3, 1) = y_5^{-1} y_{19} y_{23}^{-2} = 1.$$

Отсюда и из (3) следует, что в G истинны тождества $y_{11} = 1$, $y_{23} = 1$.

Тождество $y_3 = 1$ также влечет тождество $c(1, 3, 2, 2, 1) = 1$. Как и прежде, легко проверяется, что в G

$$c(1, 3, 2, 2, 1) = y_{10}^{-2} y_1^{-1} y_{17} = 1,$$

откуда ввиду (2) тождества $y_{10} = 1$, $y_{22} = 1$ выполнены в G.

Итак, мы установили, что все тождества $y_1 = 1, y_2 = 1, \ldots, y_{24} = 1$ истинны в G. Тем самым показано, что значения всех базисных коммутаторов веса 5 от трех переменных [13] равны 1. Ранее было замечено, что значения всех коммутаторов веса 4 от двух переменных равны 1. Это означает, что G — нильпотентная группа класса ≤ 4. Из сформулированной ранее теоремы [4] теперь вытекает требуемое. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся примером 3-энгелевой группы G из [9] (см. также [5, теорема 18.3.1]), не являющейся нильпотентной. Эта группа G определяется так.

Пусть M — множество натуральных чисел без 1, не делящихся на квадраты простых чисел. Каждому $m \in M$ сопоставим циклическую группу второго порядка с порождающим a_m и обозначим через A прямое произведение всех (a_m). Считаем, что a_1 — это единица группы A. Каждому простому числу p поставим в соответствие автоморфизм φ_p группы A, задаваемый на порождающих следующим образом: $a_{mp}^{\varphi_p} = a_{mp} a_m$; $a_m^{\varphi_p} = a_m$, если m не делится на p. Очевидно, $\varphi_p^2 = 1$ и $\varphi_p \varphi_q = \varphi_q \varphi_p$, следовательно, группа Φ, порожденная всеми φ_p, абелева периода 2. Пусть G — расширение A при помощи Φ. Отметим, что по [9] (см. также [5, теорема 18.3.1]) эта группа G имеет период 4, не нильпотентна и 3-энгелева.

В качестве $\mathscr{K}$ берем все неабелевы подгруппы группы G вида $(g)^G$. Ясно, что $G \in L(\mathscr{K}) \subseteq L(q\mathscr{K})$. Для завершения доказательства теоремы нужно проверить, что соответствующие централизаторы абелевы.

Рассмотрим неабелеву группу $(g)^G$. Поскольку $(g)^G \subseteq A$ при $g \in A$, а следовательно, $(g)^G$ — абелева группа, то $g \notin A$. Таким образом, элемент g представим в виде $g = a\varphi$, $a \in A$, $\varphi \in \Phi$, $\varphi \neq 1$. Пусть $B = \text{гр}(\varphi, A)$, x — произвольный элемент из $B \setminus Z(B)$, $C(x)$ — централизатор x в B. Достаточно убедиться, что $C(x)$ — абелева группа. Предположим сначала, что $x \notin A$. Тогда $x = \bar{a}_1 \varphi$ для подходящего $\bar{a}_1$ из A. Заметим, что из равенства

$$[\bar{a}_1 \varphi, \bar{a}_2 \varphi] = \varphi \bar{a}_1 \varphi \bar{a}_2 \bar{a}_1 \varphi \bar{a}_2 \varphi = \varphi \bar{a}_1 \bar{a}_2 \varphi \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad \bar{a}_2 \in A,$$

следует, что если $\bar{a}_2\varphi \in C(x)$, то $\bar{a}_1\bar{a}_2 \in Z(B)$ и $\bar{a}_2\varphi$ можно представить в виде $z\bar{a}_1\varphi$ для подходящего $z \in Z(B)$. Равенство

$$[\bar{a}_1\varphi, \bar{a}_2] = [\varphi, \bar{a}_2], \quad \bar{a}_2 \in A,$$

влечет, что если $\bar{a}_2 \in C(x)$, то $\bar{a}_2 \in Z(B)$. Вышесказанное означает, что $C(x)$ совпадает с подгруппой, порожденной всеми элементами вида $z\bar{a}_1\varphi$ $(z \in Z(B))$ и всеми элементами из $Z(B)$. Отсюда $C(x)$ — абелева группа.

Если $x \in A$, то $C(x) = A$ и снова $C(x)$ — абелева группа. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kappe L. C.* On Levi-formations // Arch. Math. 1972. V. 23. P. 561–572.
2. *Levi F. W.* Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions // J. Indian Math. Soc. 1942. V. 6. P. 87–97.
3. *Morse R. F.* Levi-properties generated by varieties // Contemp. Math. 1994. V. 169. P. 467–474.
4. *Будкин А. И.* Квазимногообразия Леви // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 266–270.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
6. *Kappe L. C., Kappe W. P.* On three-Engel groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. V. 7. P. 391–405.
7. *Kappe L. C., Morse R. F.* Levi-properties in metabelian groups // Contemp. Math. 1990. V. 109. P. 59–72.
8. *Kappe L. C., Kappe W. P.* Metabelian Levi-formations // Arch. Math. 1974. V. 25. P. 454–462.
9. *Weston K. W.* ZA-groups which satisfy the m-th Engel condition // Illinois J. Math. 1964. V. 8. P. 458–472.
10. *Будкин А. И., Горбунов В. А.* К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 2. С. 123–142.
11. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
12. *Heineken H.* Engelsche elemente der Länge drei // Illinois J. Math. 1961. V. 5. P. 467–474.
13. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 10 августа 1999 г.

г. Барнаул
Алтайский гос. университет
budkin@math.dcn-asu.ru