Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.958

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА — ШМИДТА В ЗАДАЧЕ ОТВЕТВЛЕНИЯ ЦИКЛА ОТ СЕМЕЙСТВА РАВНОВЕСИЙ СИСТЕМЫ С МУЛЬТИКОСИММЕТРИЕЙ

Л. Г. Куракин, В. И. Юдович

Аннотация: Методом Ляпунова — Шмидта изучена бифуркация ответвления предельного цикла (бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа) от n-мерного гладкого подмногообразия равновесий динамической системы, обладающей n косимметриями. Допускается зависимость косимметрий от параметра. Тем самым обобщены результаты работы (Юдович В. И. О бифуркации рождения цикла из семейства равновесий динамической системы и ее затягивании // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62. вып. 1. С. 22–34), в которой данная задача рассмотрена для случая одной косимметрии, не зависящей от параметра. Библиогр. 20.

Статья посвящена исследованию бифуркации рождения цикла в динамической системе с многими косимметриями. Она примыкает к работам [1–6], в которых был рассмотрен случай единственной косимметрии.

Косимметрия векторного поля (и определяемого им автономного дифференциального уравнения на многообразии) — по определению аннулирующая его в каждой точке дифференциальная 1-форма. Если задана риманова или псевдориманова структура на многообразии, то косимметрию можно отождествить с векторным полем [1]. Присутствие нетривиальной косимметрии может служить естественной причиной существования у векторного поля непрерывных семейств равновесий. Если имеется k независимых косимметрий, то в условиях общего положения существует k-мерное подмногообразие равновесий. Об этом говорит косимметричная версия теоремы о неявной функции [7–9].

Характерное отличие семейства равновесий в косимметричной динамической системе от орбиты действия группы симметрии состоит в том, что спектр устойчивости равновесия меняется вдоль семейства [10]. В результате такое k-мерное семейство в условиях общего положения подразделяется на подмножества устойчивых и неустойчивых по линейному приближению равновесий. (Под устойчивостью равновесия семейства здесь и далее понимается его асимптотическая устойчивость в трансверсальных к семейству направлениях вместе с устойчивостью по Ляпунову.) Их разделяют $(k-1)$-мерные гиперповерхности, состоящие из граничных равновесий, которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми (см. [11]). Если уравнение зависит от параметра, то при его изменении происходят бифуркации этих областей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01791), Конкурсного центра фундаментального естествознания при СПбГУ (грант № 95–0–2.1–115) и Межвузовской научной программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (проект № 4087).

Косимметричные динамические системы с параметрами обнаруживают эффект затягивания бифуркации рождения цикла [1–3]: образование малой колебательно неустойчивой области на устойчивом первоначально семействе равновесий не ведет сразу к возникновению автоколебательного режима. Это происходит лишь при дальнейшем изменении параметра, причем предельный цикл ответвляется, вообще говоря, от некоторого граничного равновесия.

Имеются два подхода к исследованию ответвления периодических режимов от равновесий (бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа). Первый основан на применении метода Ляпунова — Шмидта, а второй — на теореме о центральном (нейтральном) многообразии [12]. Эти методы тесно связаны, и у каждого из них есть свои преимущества. Метод центрального многообразия позволяет получить детальную информацию о локальной перестройке фазового портрета системы, когда параметр переходит через критическое значение. Вместе с тем, он дает лишь асимптотику периодического режима, тогда как метод Ляпунова — Шмидта устанавливает сходимость соответствующих рядов для автоколебательного режима и его периода. Он также оказывается удобнее при исследовании ряда вырождений.

В данной статье применяется метод Ляпунова — Шмидта (применению метода центральных многообразий посвящена другая работа [13], где исследованы также вопросы устойчивости). Поскольку речь идет о локальной бифуркации, достаточно рассмотреть уравнение в гильбертовом пространстве с аналитическим векторным полем. Впрочем, результаты без изменения формализма переносятся на уравнения в банаховых пространствах с неограниченными операторами, порождающими достаточно хорошие полугруппы. Дело в том, что обращение главной линейной части дифференциального уравнения на пространстве периодических вектор-функций известного периода приводит к интегральному уравнению, которое уже ничуть не хуже, а то и лучше, чем при ограниченных операторах. Таким образом, в теорию включаются и параболические уравнения в частных производных, уравнения типа Навье — Стокса, уравнение конвекции жидкости в пористой среде и т. д.

Статья состоит из трех параграфов. Вводный характер имеет § 1. В § 2 выведено уравнение разветвления циклов. Оно проанализировано в § 3, где показано, что предельный цикл ответвляется от равновесия семейства лишь при выполнении некоторого необходимого условия. В случае, когда оно выполнено, для периодического режима и его частоты получаются сходящиеся разложения Ляпунова — Шмидта (теорема 3.1). Теорема 3.2 трактует некоторые возможные вырождения — вплоть до сильного вырождения, когда периодические режимы существуют лишь при критическом значении параметра и заполняют целую поверхность в окрестности теряющего устойчивость равновесия.

В данной работе не нашлось места для примеров. Дело в том, что в физически осмысленных задачах значительная часть работы (вычисление критических значений, собственных векторов и коэффициентов уравнения разветвления) может быть проделана лишь с применением компьютера. Такая работа сейчас проводится. Для моделей фильтрационной конвекции жидкости в пористой среде ответвление периодических режимов от семейств равновесий изучено численными методами в [14, 15].

§ 1. Постановка задачи. Основные определения и гипотезы

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H:

$$\dot{\theta} = F(\theta, \lambda) \tag{1.1}$$

с вещественным параметром $\lambda \in \mathbb{R}$. Здесь $F : H \times \mathbb{R} \to H$ — аналитический оператор, допускающий зависящую от λ мультикосимметрию $\mathscr{L} : (\theta, \lambda) \mapsto (L_1(\theta, \lambda), L_2(\theta, \lambda), \ldots, L_k(\theta, \lambda))$, где L_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — векторные поля, определенные в пространстве $H \times \mathbb{R}$. Это означает, что для всех $\theta \in H$, $\lambda \in R$ и $i = 1, 2, \ldots, k$ справедливо равенство [7, 8]

$$(F(\theta, \lambda), L_i(\theta, \lambda)) = 0. \tag{1.2}$$

Предположим, что уравнение (1.1) при некотором $\lambda = \lambda_0$ имеет равновесие θ_0:

$$F(\theta_0, \lambda_0) = 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что каждый из линейных функционалов $L_{0i} = L_i(\theta_0, \lambda_0)$ $(i = 1, \ldots, k)$, который отождествляется с вектором в соответствии с каноническим изоморфизмом Рисса, принадлежит ядру оператора A_0^*, сопряженного к производной $A_0 = F'_\theta(\theta_0, \lambda_0)$. Для гладкой косимметрии это следует из равенства [7]

$$F'^*(\theta, \lambda) L_i(\theta, \lambda) + L_i'^*(\theta, \lambda) F(\theta, \lambda) = 0, \tag{1.4}$$

полученного дифференцированием по переменной θ тождества (1.2). Таким образом, при условии линейной независимости системы $\{L_{01}, \ldots, L_{0k}\}$ нуль является собственным значением оператора A_0^* кратности не ниже k.

Примем следующие гипотезы.

H1. Мультикосимметрия $\mathscr{L}$ непрерывна.

H2. θ_0 — регулярная точка мультикосимметрии $\mathscr{L}$: векторы $L_{0i} = L_i(\theta_0, \lambda_0)$ $(i = 1, \ldots, k)$ образуют линейно независимую систему. Ее линейную оболочку обозначим через Y_0.

H3. Выполнено следующее условие минимальности вырождения: ядро $\ker F_\theta'^*(\theta_0, \lambda_0)$ совпадает с Y_0. Таким образом, размерность ядра $\ker F_\theta'^*(\theta_0, \lambda_0)$ равна k.

H4. Спектр $\sigma(A_0)$ производной $A_0 = F'_\theta(\theta_0, \lambda_0)$ состоит из нейтрального множества $\sigma_0(A_0)$, а также устойчивого $\sigma_-(A_0)$ и неустойчивого $\sigma_+(A_0)$ спектральных множеств, расположенных соответственно внутри левой и правой полуплоскостей. Нейтральный спектр $\sigma_0(A_0)$ состоит из k-кратного нулевого и пары чисто мнимых $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, простых собственных значений.

H5. Точки 0, $\pm i\omega_0$ — полюсы оператора A_0, так что они являются собственными значениями как оператора A_0, так и его сопряженного A_0^*.

Роль гипотез H1–H3 состоит в том, что рассматривается система общего положения в классе динамических систем с мультикосимметрией. К таким системам применима косимметричная версия теоремы о неявной функции [7–9]. (Правда, в работах [7–9] рассматривается случай, когда косимметрия не зависит от параметров. Соответствующее добавление сделано ниже и в работе [5].) Из этой теоремы следует, что при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1.1) имеет k-параметрическое семейство равновесий, включающее равновесие θ_0. При этом в окрестности точки θ_0 нет иных равновесий. Когда параметр λ, изменяясь, пересекает значение λ_0, семейство равновесий не исчезает, а лишь слегка деформируется [9, 16].

В данной работе исследована бифуркация ответвления цикла от k-параметрического семейства равновесий при колебательной потере устойчивости равновесия θ_0. Случай единственной косимметрии рассмотрен в работах [1–6], где обнаружен, в частности, эффект затягивания этой бифуркации по параметру.

Гипотеза H4 используется в полной мере лишь при выводе и исследовании уравнения на центральном многообразии [12]. Для применения метода Ляпунова — Шмидта вместо гипотезы H4 достаточно принять следующую менее ограничительную гипотезу.

H4^0. Спектр $\sigma(A_0)$ представим в виде $\sigma(A_0) = \sigma_-(A_0) \cup \sigma_0(A_0) \cup \sigma_+(A_0)$, причем нейтральный спектр $\sigma_0(A_0)$ содержит точку нуль, простую пару чисто мнимых $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, собственных значений и не содержит точек $\pm in\omega_0$, где $n = \pm 2, \pm 3, \ldots$. При этом размерность ядра $\ker A_0$ равна k.

В частности, эта гипотеза не исключает существование у оператора A_0 чисто мнимого непрерывного спектра и нулевого собственного значения кратности $m > k$.

Далее ради краткости изложения принимается гипотеза H4.

Гипотеза H5 всегда выполняется в случае конечномерного евклидова пространства H.

§ 2. Линеаризованное уравнение

Будем разыскивать 2π-периодические решения линейного дифференциального уравнения

$$Tu \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 u' - A_0 u = f. \tag{2.1}$$

Здесь введено новое время $\tau = \omega_0 t$, а штрих означает дифференцирование по τ. Вектор-функция $f = f(\tau)$ считается заданной и непрерывной. Оператор T действует в пространстве гладких 2π-периодических функций. Однородное уравнение $Tu = 0$ имеет $k+2$ линейно независимых решений

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \varphi e^{i\tau}, \varphi^* e^{-i\tau}. \tag{2.2}$$

Здесь $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ — биортогональная к набору функционалов $\{L_{01}, L_{02}, \ldots, L_{0k}\}$ система, а φ — собственный вектор оператора A_0:

$$A_0\gamma_j = 0,\ j = 1, \ldots, k; \quad A_0\varphi = i\omega_0\varphi. \tag{2.3}$$

Далее также понадобится однородное сопряженное уравнение

$$T^* w \stackrel{\text{def}}{=} -\omega_0 w' - A_0^* w = 0. \tag{2.4}$$

Система его периодических решений состоит из k постоянных решений, равных $L_{01}, L_{02}, \ldots, L_{0k}$ для всех τ, и пары решений $\Phi e^{i\tau}, \Phi^* e^{-i\tau}$, гармонически зависящих от времени, где $L_{0i} = L_i(\theta_0, \lambda_0)$ $(i = 1, \ldots, k)$, а Φ — собственный вектор оператора A_0^*:

$$A_0^*\Phi = -i\omega_0\Phi. \tag{2.5}$$

Так как индекс нулевого собственного значения согласно H3, H4 равен 1, можно считать, что выполнены условия нормировки

$$(\gamma_i, L_{0j}) = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, \ldots, k; \quad (\varphi, \Phi) = 1. \tag{2.6}$$

Пусть $E_\pm = E(\sigma_\pm(A_0))$, $E_0 = E(\sigma_0(A_0))$ — спектральные проекторы, отвечающие спектральным множествам $\sigma_+(A_0)$, $\sigma_-(A_0)$, $\sigma_0(A_0)$. При сделанных предположениях проектор E_0 дается формулой

$$E_0 h = \sum_{i=1}^{k} (h, L_{0i})\gamma_i + (h, \Phi)\varphi + (h, \Phi^*)\varphi^* \tag{2.7}$$

для любого h из комплексной оболочки H^c пространства H.

Определим также дополнительный проектор E_0', полагая

$$E_0' = I - E_0 = E_+ + E_-. \tag{2.8}$$

Лемма 2.1 (условие разрешимости). *Для того чтобы уравнение* (2.1) *с вещественной непрерывной вектор-функцией f имело 2π-периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция f удовлетворяла условиям ортогональности*

$$\overline{(f, \Phi)e^{-i\tau}} = 0; \quad (\bar{f}, L_{0i}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{2.9}$$

где черта сверху соответствует среднему по времени:

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\, dt \tag{2.10}$$

для любой вектор-функции f. Если это условие выполнено, то все 2π-периодические решения уравнения (2.1) *определяются равенством*

$$u(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau/\omega_0} e^{(\tau - s)A_0^-} E_- f(\omega_0 s)\, ds - \int\limits_{\tau_0/\omega}^{\infty} e^{(\tau - s)A_0^+} E_+ f(\omega_0 s)\, ds + \alpha\varphi e^{i\tau} + \alpha^*\varphi^* e^{-i\tau} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i. \tag{2.11}$$

Здесь A_0^-, A_0^+ — сужения оператора A_0 на инвариантные подпространства $\operatorname{Im} E_-$ и $\operatorname{Im} E_+$ соответственно, α — произвольная комплексная постоянная, β_i ($i = 1, \ldots, k$) — произвольные вещественные постоянные.

Для общих уравнений с ограниченными операторными коэффициентами такие теоремы имеются в [17], а в [18, 19] аналогичные вопросы рассмотрены для абстрактных параболических уравнений.

В дальнейшем нам понадобится следующее разложение гильбертова пространства $\widehat{H} = L_2(S^1, H)$ вектор-функций на окружности S^1 со значениями в H. Пусть τ — угловая переменная на окружности, а $\widehat{H}^0$ — подпространство в $\widehat{H}$, состоящее из вектор-функций вида

$$u(\tau) = \alpha\varphi e^{i\tau} + \alpha^*\varphi^* e^{-i\tau} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i, \tag{2.12}$$

где α — произвольная комплексная постоянная, β_i ($i = 1, \ldots, k$) — произвольные вещественные постоянные. Определим проектор $\Pi : \widehat{H} \to \widehat{H}^0$ на это подпространство, полагая для любой вектор функции $f \in \widehat{H}$

$$(\Pi f)(\tau) = \overline{(f, \Phi)e^{-i\tau}} e^{i\tau}\varphi + \overline{(f, \Phi^*)e^{i\tau}} e^{-i\tau}\varphi^* + \sum_{i=1}^{k} (\bar{f}, L_{0i})\gamma_i. \tag{2.13}$$

Через $\widehat{H}'$ обозначим дополнительное подпространство, а через Π' — дополнительный проектор, так что $\widehat{H} = \widehat{H}^0 \oplus \widehat{H}'$, $\Pi' = I - \Pi$.

§ 3. Уравнение разветвления циклов

Будем искать периодическое решение уравнения (1.1) с неизвестным периодом $T = 2\pi/\omega$ в виде

$$\theta(t) = \theta_0 + u(\tau), \quad \tau = \omega t. \tag{3.1}$$

Подстановка в (1.1) дает для определения u, ω уравнение

$$\omega \frac{du}{d\tau} = F(\theta_0 + u, \lambda). \tag{3.2}$$

Будем предполагать, что λ близко к критическому значению λ_0, а частота ω близка к ω_0. Положим $\lambda = \lambda_0 + \delta$, $\omega = \omega_0 + \mu$, и будем считать, что δ, μ, равно как и u, малы.

Уравнение (3.2) перепишем в виде

$$Tu = -\mu u' + F(\theta_0 + u, \lambda_0 + \delta) - A_0 u. \tag{3.3}$$

Далее применяется метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой в работе [20]. Представим u в виде $u = \Pi u + \Pi' u$ или

$$u(\tau) = \alpha\varphi e^{i\tau} + \alpha^* \varphi^* e^{-i\tau} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i + v(\tau), \tag{3.4}$$

причем для $v = \Pi' u$ должны выполняться условия ортогональности

$$\overline{(v, \Phi) e^{-i\tau}} = 0; \quad (\bar{v}, L_{0i}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{3.5}$$

Здесь $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ — неизвестные постоянные, $v \in \widehat{H}'$ — неизвестная вектор-функция.

Задача инвариантна относительно сдвига времени $\tau \mapsto \tau + \tau_0$. Поэтому вместе с любым решением α, β, $v(\tau)$ вся орбита действия группы вращений окружности $\{\alpha e^{i\tau_0}, \beta, v(\tau + \tau_0)\}$ состоит из решений. Выбирая постоянную τ_0 так, что $\alpha > 0$, перепишем (3.4) в виде

$$u(\tau) = \alpha\psi(\tau) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i + v(\tau), \quad \psi(\tau) = \varphi e^{i\tau} + \varphi^* e^{-i\tau}. \tag{3.6}$$

Условия (3.5) по-прежнему выполняются.

Теперь перепишем уравнение (3.3) в виде эквивалентной системы

$$Tv = \Pi' f, \tag{3.7}$$

$$\Pi f = 0, \tag{3.8}$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} -\mu\alpha\psi' - \mu v' + F\left(\theta_0 + \alpha\psi + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i + v, \lambda_0 + \delta\right) - A_0(\alpha\psi + v).$$

Уравнение (3.8) эквивалентно набору равенств

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \overline{(f, \Phi) e^{-i\tau}} = 0; \quad h_i \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{f}, L_{0i}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{3.9}$$

Обратимся теперь к уравнению (3.7), чтобы выразить из него v через α, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, μ, δ. После этого подстановка в (3.9) дает систему уравнений разветвления циклов.

Сужение оператора T на $\widehat{H}'$ обозначим через T_1. Это обратимый оператор. Поэтому к уравнению (3.7) применима теорема о неявной функции (при $v = 0$ и $\alpha = \beta_i = \mu = \delta = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ оно, очевидно, выполнено). Отсюда следует, что при любых заданных малых α, β, μ, δ уравнение (3.7) имеет решение, которое единственно в некоторой окрестности нуля в $\widehat{H}'$ и аналитически зависит от α, β, μ, δ. Будем искать его в виде степенного ряда

$$v = \sum_{s,|\ell|,m,n=0}^{\infty} v_{s\ell mn}\alpha^s\beta^\ell\mu^m\delta^n. \tag{3.10}$$

Здесь $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_k)$ — мультииндекс, $|\ell| = \sum\limits_{i=1}^{k} \ell_i$, а $\beta^\ell = \beta_1^{\ell_1}\beta_2^{\ell_2}\ldots\beta_k^{\ell_k}$.

Коэффициенты $v_{s\ell mn}$ определяются последовательно после подстановки ряда (3.10) в уравнение (3.7) и приравнивания коэффициентов в левой и правой частях при одинаковых мономах $\alpha^s\beta^\ell\mu^m\delta^n$. При этом $v_{0000} = 0$, так что $v = 0$ при $\alpha = \beta_1 = \cdots = \beta_k = \mu = \delta = 0$. Чтобы выписать уравнения для определения $v_{s\ell mn}$, надо использовать разложение оператора F в ряд Тейлора в окрестности точки θ_0, λ_0 по степеням $\theta - \theta_0 = u$, $\lambda - \lambda_0 = \delta$:

$$F(\theta_0 + u, \lambda_0 + \delta) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{1}{k!\ell!} F_{\theta^k\lambda^\ell}(\theta_0, \lambda_0)u^k\delta^\ell. \tag{3.11}$$

Выпишем несколько первых членов этого ряда:

$$\begin{aligned} F(\theta_0 + u, \lambda_0 + \delta) = A_0u + F_{0\lambda}\delta + \frac{1}{2}F_0''u^2 \\ + \delta F_{0\lambda}'u + \frac{\delta^2}{2}F_{0\lambda\lambda} + \frac{1}{6}F_0'''u^3 + \frac{\delta}{2}F_{0\lambda}''u^2 + \ldots. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь штрих соответствует дифференцированию по θ, а индекс нуль означает, что производная вычислена в точке (θ_0, λ_0). Далее будет удобно обращаться к разложению правой части f уравнения (3.7), которую представим в виде

$$\begin{aligned} f = -\mu\alpha\frac{d}{d\tau}\psi - \mu\frac{d}{d\tau}v + F_{0\lambda}\delta + \frac{1}{2}F_0''\left(\alpha\psi + \sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i\right)^2 \\ + F_0''\left(\alpha\psi + \sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i, v\right) + \frac{1}{2}F_0''v^2 + \delta F_{0\lambda}'\left(\alpha\psi + \sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i\right) + \delta F_{0\lambda}'v + \frac{\delta^2}{2}F_{0\lambda\lambda} \\ + \frac{1}{6}F_0'''\left(\alpha\psi + \sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i\right)^3 + \frac{1}{2}F_0'''\left(\left(\alpha\psi + \sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i\right)^2, v\right) \\ + \frac{1}{2}F_0'''\left(\alpha\psi + \sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i, v^2\right) + \frac{1}{6}F_0'''v^3 + \frac{\delta}{2}F_{0\lambda}''\left(\alpha\psi + \sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i\right)^2 \\ + \delta F_{0\lambda}''\left(\alpha\psi + \sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i, v\right) + \frac{\delta}{2}F_{0\lambda}''v^2 + \ldots. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Обратимся к степенному разложению f по α, β, μ, δ и последовательно рассмотрим члены первой, второй и т. д. степеней. Если коэффициент $f_{s\ell mn}$ в ходе рекуррентной процедуры уже определен, находим $v_{s\ell mn}$, решая уравнение

$Tv_{s\ell mn} = \Pi' f_{s\ell mn}$. Затем определяем вклады этого слагаемого в уравнения разветвления (3.9), которые запишем в виде

$$\sum_{s,|\ell|,m,n=0}^{\infty} g_{s\ell mn}\alpha^s\beta^\ell\mu^m\delta^n = 0, \tag{3.14}$$

$$\sum_{s,|\ell|,m,n=0}^{\infty} h_{i,s\ell mn}\alpha^s\beta^\ell\mu^m\delta^n = 0, \quad i = 1,\ldots,k. \tag{3.15}$$

В итоге каждому коэффициенту $f_{s\ell mn}$ соответствуют слагаемое

$$v_{s\ell mn}\alpha^s\beta^\ell\mu^m\delta^n, \quad v_{s\ell mn} = T_1^{-1}\Pi' f_{s\ell mn}, \tag{3.16}$$

а также слагаемые

$$g_{s\ell mn}\alpha^s\beta^\ell\mu^m\delta^n, \quad g_{s\ell mn} = \overline{(f_{s\ell mn}, \Phi)e^{-i\tau}}, \tag{3.17}$$

$$h_{i,s\ell mn}\alpha^s\beta^\ell\mu^m\delta^n, \quad h_{i,s\ell mn} = (\overline{f_{s\ell mn}}, L_{0i}) \tag{3.18}$$

в уравнениях (3.14), (3.15) соответственно.

Начнем с членов первой степени. Легко видеть, что $f_{0001} = F_{0\lambda}$, а остальные члены равны нулю. Единственное линейное слагаемое разложения (3.10) имеет вид

$$v_{0001}\delta, \quad v_{0001} = T_1^{-1} f_{0001} = -{A_0'}^{-1} F_{0\lambda}.$$

В уравнениях (3.14), (3.15) разложение начинается со второй степени: $F_{0\lambda}$ не содержит ненулевых гармоник, а дифференцирование равенств (1.2) (определение косимметрии) по λ с учетом равенства (1.3) дает соотношения

$$(F_{0\lambda}, L_{0i}) = 0, \quad i = 1,\ldots,k. \tag{3.19}$$

Члены второй степени запишем в виде

$$\begin{gathered}
v_{2000} = \frac{1}{2}T_1^{-1}\Pi' F_0''\psi^2, \quad v_{1e_i00} = T_1^{-1}\Pi' F_0''(\psi,\gamma_i),\\
v_{1001} = T_1^{-1}\Pi'\big[F_0''(\psi, v_{0001}) + F_{0\lambda}'\psi\big],\\
v_{0e_{ij}01} = aT_1^{-1}\Pi' F_0''(\gamma_i,\gamma_j), \quad a = \begin{cases} 1/2, & i = j,\\ 1, & i \neq j,\end{cases}\\
v_{0e_i01} = T_1^{-1}\Pi'\big[F_0''(\gamma_i, v_{0001}) + F_{0\lambda}'\gamma_i\big],\\
v_{0002} = T_1^{-1}\Pi'\left[\frac{1}{2}F_0'' v_{0001}^2 + F_{0\lambda}' v_{0001} + \frac{1}{2}F_{0\lambda\lambda}\right],\\
v_{0011} = -\frac{d}{d\tau}v_{0001} = \frac{d}{d\tau}\big[{A_0'}^{-1}F_{0\lambda}\big] = 0.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Здесь $e_i = (\delta_{i1},\ldots,\delta_{ik})$; $e_{ij} = (\delta_{i1}+\delta_{j1},\ldots,\delta_{ik}+\delta_{jk})$ — векторы, где δ_{ij} — символ Кронекера. Остальные коэффициенты $v_{s\ell mn}$ с суммой индексов $k+|\ell|+m+n = 2$ равны нулю, $|\ell| = \sum\limits_{i=1}^{k}\ell_i$.

Далее понадобится еще коэффициент v_{3000}:

$$v_{3000} = T_1^{-1}\Pi'\left[\frac{1}{6}F_0'''\psi^3 + F_0''(\psi, v_{2000})\right]. \tag{3.21}$$

Таким образом, для v получается разложение

$$v = \delta v_{0001} + \alpha^2 v_{2000} + \alpha \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_{1e_i00} + \alpha\delta v_{1001} + \sum_{j,i=1}^{k} \beta_i\beta_j v_{0e_{ij}00} + \delta \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_{0e_i01} + \delta^2 v_{0002} + \alpha^3 v_{3000} + \dots. \qquad (3.22)$$

Соответственно уравнение (3.14) принимает вид

$$-i\alpha\mu + \alpha \sum_{i=1}^{k} \beta_i g_{1e_i00} + \alpha\delta g_{1001} + \alpha^3 g_{3000} + \dots = 0, \qquad (3.23)$$

$$g_{1e_i00} = \big(F_0''(\varphi,\gamma_i),\Phi\big), \quad g_{1001} = (F_0''(\varphi, v_{0001}) + F_{0\lambda}'\varphi, \Phi),$$

$$g_{3000} = \overline{(F_0''(\psi, v_{2000}), \Phi)e^{-i\tau}} + \frac{1}{6}\overline{\big(F_0'''\psi^3, \Phi\big)e^{-i\tau}}.$$

Здесь выписаны все члены разложения вплоть до второй степени, а из кубических оставлен только тот, который существен в дальнейшем.

Разложения левых частей уравнений (3.15) представляются в виде

$$\alpha^2 h_{i,2000} + \alpha^2 \sum_{j=1}^{k} \beta_j h_{i,2e_j00} + \alpha^2\delta h_{i,2001} + \alpha^4 h_{i,4000} + \dots, \qquad (3.24)$$

$$h_{i,2000} = \frac{1}{2}\big(\overline{F_0''\psi^2}, L_{0i}\big) = (F_0''(\varphi,\varphi^*), L_{0i}),$$

$$h_{i,2e_j00} = \big(\overline{F_0''(\psi, v_{1e_j00})} + F_0''(\gamma_j, \bar v_{2000}), L_{0i}\big) + \frac{1}{2}\big(\overline{F_0'''(\psi,\psi,\gamma_j)}, L_{0i}\big),$$

$$h_{i,2001} = \bigg(\overline{F_0''(\psi, v_{1001})} + \overline{F_0''(v_{0001}, v_{2000})} + \overline{F_{0\lambda}' v_{2000}} + .\frac{1}{2}\overline{F_{0\lambda}''\psi^2} + \frac{1}{2}\overline{F_0'''(\psi,\psi,v_{0001})}, L_{0i}\bigg),$$

$$h_{i,4000} = \bigg(\overline{F_0''(\psi, v_{3000})} + \frac{1}{2}\overline{F_0'' v_{2000}^2} + \frac{1}{2}\overline{F_0'''(\psi,\psi,v_{2000})} + \frac{1}{24}\overline{F_0^{IV}\varphi^4}, L_{0i}\bigg).$$

Здесь учтено, что $\bar\psi = 0$, $\bar v_{1001} = 0$, а слагаемые с мономами $\beta^\ell\delta^n$ исчезают благодаря присутствию мультикосимметрии. Более того, в уравнениях (3.24) исчезают все члены, не содержащие α. Докажем, что $h_i(0,\beta,\mu,\delta) = 0$.

Уравнение (3.7), как уже было сказано ранее, в некоторой окрестности нуля пространства $\widehat{H}'$ имеет единственное решение при любых достаточно малых α,β,μ,δ. Если положить $\alpha = 0$, то, как нетрудно видеть, существует равновесие этого уравнения. В самом деле, для уравнения равновесия условия теоремы о неявной функции в H' по-прежнему выполнены. Ввиду единственности в этом случае v зависит лишь от β,δ, но не от μ. Уравнения разветвления (3.15) в задаче о равновесиях выполняются тождественно. В самом деле, уравнение равновесия $F(\theta,\lambda) = 0$ в окрестности точки (θ_0,λ_0) эквивалентно уравнению

$$F(\theta,\lambda) - \sum_{j=1}^{k} q_j(\theta,\lambda)\gamma_j = 0, \quad q_j(\theta,\lambda) = (F(\theta,\lambda), L_{0j}), \qquad (3.25)$$

которое, очевидно, справедливо для равновесий. Если же выполнено уравнение (3.25), то, умножая его скалярно на $L_i(\theta,\lambda)$ $(i = 1,\ldots,k)$, с учетом равенств (1.2) заключаем, что

$$C(\theta,\lambda)q(\theta,\lambda) = 0, \tag{3.26}$$

где $q : (\theta,\lambda) \mapsto (q_1(\theta,\lambda),\ldots,q_k(\theta,\lambda))$ — вектор-функция, а $C : (\theta,\lambda) \mapsto C(\theta,\lambda)$ — матрица размера $[k \times k]$, коэффициенты которой $c_{ij}(\theta,\lambda) = (\gamma_j, L_i(\theta,\lambda))$ $(i,j = 1,\ldots,k)$ непрерывно зависят от вектора (θ,λ). Матрица C обратима, когда (θ,λ) близко к (θ_0,λ_0), так как из условий (2.6) следует, что $\det C(\theta_0,\lambda_0) = 1$. Значит, существует окрестность точки (θ_0,λ_0), в которой выполнение равенства (3.26) влечет равенство $q(\theta,\lambda) = 0$.

Итак, доказано, что уравнения разветвления (3.15), которые можно записать в виде $q(\theta,\lambda) = 0$, для равновесий выполняются тождественно, так что $h_i(0,\beta,\mu,\delta) = 0$ $(i = 1,\ldots,k)$. Заодно установлено, что k-мерное семейство равновесий $c(s)$, существующее при $\lambda = \lambda_0$, допускает продолжение по параметру λ. В случае мультикосимметрии $\mathscr{L}$, не зависящей от параметра, это вытекает также из общих результатов работы [3]. Из предыдущего рассуждения следует также отсутствие в разложении (3.10) для v мономов $\beta^\ell\mu^m\delta^n$ при $m > 0$. Осталось заметить, что в уравнении разветвления (3.14) есть лишь мономы $\alpha^s\beta^\ell\mu^m\delta^n$ с нечетным s, а в уравнениях (3.15) — только с четным s. Так выходит потому, что сдвиг времени $\tau \mapsto \tau + \pi$ оставляет эти уравнения неизменными ввиду инвариантности среднего по времени относительно сдвигов. С другой стороны, этот сдвиг эквивалентен замене $\alpha \mapsto -\alpha$.

Теорема 3.1. *Пусть для уравнения* (1.1) *с правой частью F, аналитической в окрестности точки (θ_0,λ_0), где (θ_0,λ_0) — равновесие, т. е. $F(\theta_0,\lambda_0) = 0$, и с мультикосимметрией $\mathscr{L}$ выполнены гипотезы* H1–H5. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *При малых $\delta = \lambda - \lambda_0$ существует семейство равновесий уравнения* (1.1), *аналитически зависящее от δ. Точнее, существует аналитическое отображение $c : W_0 \times (-\delta_0,\delta_0) \to H$, $(\beta,\delta) \mapsto c(\beta,\delta)$, такое, что $F(c(\beta,\delta),\lambda_0+\delta) = 0$. Здесь W_0 — некоторая окрестность нуля пространства $\mathbb{R}^k$, а $\delta_0 > 0$.*

2. *Если вектор $F_0''(\varphi,\varphi^*)$ трансверсален подпространству* $\mathrm{Lin}\{L_{01},\ldots,L_{0k}\}$, *т. е. выполняется хотя бы одно из неравенств*

$$h_{i,2000} = (F_0''(\varphi,\varphi^*), L_{0i}) \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,k, \tag{3.27}$$

то при малых δ в окрестности θ_0 нет малых предельных циклов.

3. *Пусть выполняется система равенств $h_{i,2000} = 0$ $(i = 1,\ldots,k)$ и справедливы неравенства*

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} g^r_{3000} & g^r_{1e_100} & \cdots & g^r_{1e_k00} \\ h_{1,4000} & h_{1,2e_100} & \cdots & h_{1,2e_k00} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{k,4000} & h_{k,2e_100} & \cdots & h_{k,2e_k00} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.28}$$

$$\Delta_1 \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} -g^r_{1001} & g^r_{1e_100} & \cdots & g^r_{1e_k00} \\ -h_{1,2001} & h_{1,2e_100} & \cdots & h_{1,2e_k00} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -h_{k,2001} & h_{k,2e_100} & \cdots & h_{k,2e_k00} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.29}$$

где значок r вверху соответствует действительной части. Тогда малый предельный цикл, стягивающийся при $\lambda \to \lambda_0$ к равновесию θ_0, существует, единствен, *аналитически зависит от параметра* $\sqrt{\delta} = \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ *и может быть определен по формуле*

$$\theta(t) = \theta_0 + \alpha_1 \varepsilon \psi(\omega_0 t) + \varepsilon^2 \left[\operatorname{sign} \frac{\Delta_1}{\Delta} \left(\sum_{j=1}^{k} \varkappa_j \gamma_j + v_{0001} \right) + \alpha_1^2 v_{2000} \right] + \dots, \quad (3.30)$$

причем малый параметр ε *и амплитудные коэффициенты* $\alpha_1, \varkappa_j$ $(j = 1, 2, \dots, k)$ *задаются равенствами*

$$\varepsilon = \begin{cases} \sqrt{\delta}, & \Delta_1/\Delta > 0, \\ \sqrt{-\delta}, & \Delta_1/\Delta < 0, \end{cases} \quad \alpha_1 = \sqrt{|\Delta_1/\Delta|}, \quad \varkappa_j = \delta_j/\Delta, \quad (3.31)$$

где δ_j — *определители, получаемые заменой* $(j+1)$*-й колонки в выражении* (3.28) *определителя* Δ *колонкой* $(-g^r_{1001}, -h_{1,2001}, \dots, -h_{k,2001})$. *В* (3.30) *опущены члены порядка* ε^3 *и выше. Это решение вещественно либо при* $\delta > 0$, *если* $\Delta_1/\Delta > 0$, *либо при малых* $\delta < 0$, *если* $\Delta_1/\Delta < 0$.

Частота ω *периодического движения аналитически зависит от* δ *и имеет вид*

$$\omega = \omega_0 + \mu_1 \delta + \dots, \quad (3.32)$$

$$\mu_1 = g^i_{1001} + \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{j=1}^{k} g^i_{1e_j00} \delta_j + g^i_{3000} \Delta_1 \right).$$

Верхний индекс i *соответствует мнимой части.*

Доказательство. Выше установлено, что в задаче о равновесиях β и δ остаются произвольными, а v однозначно определяется из уравнения (3.7). Для любых малых δ, β находим равновесие

$$\theta = c(\beta, \delta) = \theta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j \gamma_j + \delta v_{0001} + \sum_{j,i=1}^{k} \beta_i \beta_j v_{0e_{ij}00} + \delta \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_{0e_i01} + \delta^2 v_{0002} + \dots. \quad (3.33)$$

Коэффициенты определяются формулами (3.20).

Второе утверждение сразу следует из уравнений (3.24): каждое из них сокращается на α^2, а получившаяся система не может иметь малых решений, когда выполнено хотя бы одно из неравенств (3.27).

Если $h_{i,2000} = 0$ $(i = 1, \dots, k)$, то, сокращая уравнения разветвления (3.23) и (3.24) на α и α^2 соответственно, приведем их к виду

$$-\mu + \alpha^2 g^i_{3000} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j g^i_{1e_j00} + \delta g^i_{1001} + \dots = 0, \quad (3.34)$$

$$\begin{gathered} \alpha^2 g^r_{3000} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j g^r_{1e_j00} + \delta g^r_{1001} + \dots = 0, \\ \alpha^2 h_{i,4000} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j h_{i,2e_j00} + \delta h_{i,2001} + \dots = 0. \end{gathered} \quad (3.35)$$

При этом левые части уравнений (3.34), (3.35) аналитичны относительно неизвестных α^2, β, μ и параметра δ; в них опущены члены второй и более высоких степеней относительно этих величин. Теперь ясно, что условие (3.28) позволяет применить к системе (3.34), (3.35) теорему о неявной функции, что и дает перечисленные выше результаты. Теорема 3.1 доказана.

Поясним смысл условия (3.29). В классических теоремах имеется условие трансверсального пересечения мнимой оси вызывающими неустойчивость собственными значениями. В условиях теоремы 3.1, когда существует целое семейство равновесий, условие (3.29) тоже означает, что собственные числа одного из этих равновесий пересекают мнимую ось трансверсально. Именно, это должно выполняться для того равновесия, для которого выполняется необходимое условие ответвления цикла $h_{i,2000} = 0$ $(i = 1, \dots, k)$. Следующая теорема разъясняет ситуацию, когда нарушается условие (3.28).

Теорема 3.2. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнены гипотезы* H1–H5, *условия* $h_{i,2000} = 0$ *и неравенство* (3.29) *теоремы* 3.1.

Тогда λ_0 *есть точка ответвления цикла. При этом имеются лишь две возможности: либо ответвляется единственный нормальный цикл* (*частота* ω *при* $\lambda \to \lambda_0$ *стремится к* ω_0) *и эта бифуркация односторонняя, либо при* $\lambda = \lambda_0$ *уравнение* (1.1) *имеет однопараметрическое семейство периодических решений* $\{\theta_\alpha\}$, *зависящее аналитически от малого параметра* α (θ_α *не является равновесием при* $\alpha \neq 0$). *Если при этом* $\delta = \lambda - \lambda_0$ *достаточно мало, но отлично от нуля, то уравнение* (1.1) *не имеет малых периодических решений, отличных от равновесных.*

Доказательство. По теореме о неявной функции заключаем, что при достаточно малом $|\alpha|$ систему (3.35) можно разрешить относительно δ, β: существуют аналитические функции $\delta = \xi(\alpha^2)$, $\beta = \nu(\alpha^2)$, обращающие (3.35) в тождество и однозначно определяемые требованием $\xi(0) = 0$, $\nu(0) = 0$. Подстановка в уравнение (3.34) дает $\mu = \rho(\alpha^2)$, при этом $\mu(0) = 0$.

Возьмем произвольную последовательность положительных чисел $\alpha_n \to 0$ и построим последовательности

$$\delta_n = \xi\bigl(\alpha_n^2\bigr) \to 0, \quad \beta_n = \nu\bigl(\alpha_n^2\bigr) \to 0, \quad \mu_n = \rho\bigl(\alpha_n^2\bigr) \to 0, \quad \omega_n = \omega_0 + \mu_n. \tag{3.36}$$

Тогда ряд (3.10) даст соответствующее решение уравнения (3.7), а формулы (3.6), (3.1) — периодическое решение уравнения (1.1), очевидно, не являющееся равновесием, так как $\alpha_n > 0$. Это доказывает, что λ_0 — точка ответвления цикла.

Разложим функцию ξ в ряд Тейлора и попытаемся при малых δ разрешить относительно α уравнение

$$\delta = \xi(\alpha^2) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \alpha^{2j}. \tag{3.37}$$

Предположим, что среди величин $c_1, c_2, \dots$ есть ненулевые и c_m — первая из них. Если $c_m > 0$ $(c_m < 0)$, то уравнение (3.37) имеет единственный малый положительный корень α при $\delta > 0$ $(\delta < 0)$ и не имеет малых вещественных корней при $\delta < 0$ $(\delta > 0)$. В обоих случаях

$$\alpha = \left(\frac{\delta}{c_m}\right)^{1/(2m)} \left[1 - \frac{c_{m+1}}{2mc_m}\left(\frac{\delta}{c_m}\right)^{1/m} + \dots\right]. \tag{3.38}$$

В квадратных скобках стоит ряд по степеням параметра $(\delta/c_m)^{1/m}$.

Для доказательства представления (3.38) достаточно применить теорему о неявной функции к уравнению, полученному из (3.37) делением на c_m и извлечением из обеих частей корня степени $2m$.

Итак, единственность и нормальность цикла в этом случае установлены.

Вторая возможность, указанная в теореме 3.2, реализуется в случае, когда все величины c_j $(j = 1, 2, \dots)$ равны нулю, так что $\xi(\alpha^2) \equiv 0$. Действительно, единственное решение системы (3.34), (3.35) есть $\mu = \rho(\alpha^2)$, $\beta = \nu(\alpha^2)$, $\delta = 0$. При этом величина α остается произвольной, и если α достаточно мало, то ряд (3.10) представляет решение уравнения (3.7) при $\mu = \rho(\alpha^2)$, $\beta = \nu(\alpha^2)$, $\delta = 0$. Однопараметрическое семейство периодических решений уравнения (1.1) в этом случае задается формулами (3.6), (3.1).

Теорема 3.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдович В. И.* Косимметрия и колебательная неустойчивость. I. Рождение предельного цикла из непрерывного семейства равновесий динамической системы с косимметрией / Ростовск. ун-т. М., 1994. 30 с. Деп. в ВИНИТИ 28.10.94, № 2440–В94.

2. *Юдович В. И.* Косимметрия и колебательная неустойчивость. II. Пример затягивания бифуркации рождения цикла. Исследование устойчивости предельного цикла / Ростовск. ун-т. М., 1995. 25 с. Деп. в ВИНИТИ 30.11.95, № 3187–В95.

3. *Юдович В. И.* О бифуркации рождения цикла из семейства равновесий динамической системы и ее затягивании // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 1. С. 22–34.

4. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Бифуркация рождения цикла в системе с косимметрией // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 3. С. 346–349.

5. *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* Bifurcation of the branching of a cycle in n-parameter family of dynamic system with cosymmetry // Chaos. 1997. V. 7, N 3. P. 376–386.

6. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах в системах с косимметрией // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. / II Междунар. конф., Ростов н/Д, 19–20 сентября 1996 г. Ростов н/Д: Книга, 1996. Т. 3. С. 99–103.

7. *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.

8. *Юдович В. И.* Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 2. С. 313–317.

9. *Yudovich V. I.* The cosymmetric version of implicit function theorem // Linear topological spaces and complex analisis. Ankara: Middle East Techn. Univ., 1995. V. 2. P. 105–125.

10. *Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5, N 2. P. 402–411.

11. *Куракин Л. Г.* Критические случаи устойчивости. Обращение теоремы о неявной функции для динамических систем с косимметрией // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 4. С. 572–578.

12. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

13. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Бифуркация рождения цикла в динамической системе с косимметрией / Ростовск. ун-т. М., 1998. 28 с. Деп. в ВИНИТИ 20.01.98, № 150–В98.

14. *Амитон А. Д.* Модель динамической системы с двумя косимметриями / Ростовск. ун-т. М., 1998. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 17.02.98, № 465–В98.

15. *Говорухин В. Н.* Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 6. С. 772–774.

16. *Yudovich V. I.* Cosymmetry and dynamical systems // Proc. ICIAM Ser. Applied sciences, espesially mechanics. 1995. N 4. P. 585–588.

17. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

18. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов н/Д: Изд-во Ростовск. ун-та, 1984. (Перев. на англ. яз: V. I. Yudovich. The linearization method hydrodynamical stability theory / Transl. of Math. Monographs. Providence: AMS, 1989. V. 74).

19. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

20. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, № 4. С. 638–655.

Статья поступила 28 июля 1998 г.

г. Ростов-на-Дону