Séminaires & Congrès
14, 2006, p. 341–356

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES ET MÉROMORPHES D'ÉQUATIONS AUX q-DIFFÉRENCES

par

Changgui Zhang

Résumé. — Nous établissons le résultat suivant : étant donnée une équation aux q-différences linéaire et à coefficients analytiques à l'origine du plan complexe, si toutes les pentes de son polygone de Newton sont entières, alors il existe une solution analytique sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ privé de 0 et d'une q-spirale. Cette spirale qui contient tous les pôles de la solution proches de 0 peut être fixée à l'avance de façon générique.

Nous commentons, en outre, le cas des équations non-linéaires pour lesquelles une extension en termes de θ-transséries paraît incontournable.

***Abstract* (Asymptotic and meromorphic solutions of *q*-difference equations).** — We prove the following result: given a linear analytic q-difference equation at the origin of the complex plane, if all slopes of its Newton polygon are integers, then, there exists an analytic solution in a neighbourhood of 0 in $\mathbb{C}$ punctured at the origin and at a q-spiral. Such a spiral which contains all poles of this solution near 0 can be chosen a priori and generically.

A discussion of the non linear cases where an extension involving θ-transseries seems necessary is also provided.

L'étude analytique des équations fonctionnelles aux q-différences est relativement récente. Dans [**3**], Birkhoff regardait le problème de Riemann généralisé pour trois types d'équations fonctionnelles : différentielles, aux différences finies et aux q-différences ; dans cette même ligne, Trjitzinsky [**11**] a pour la première fois mis au point une théorie analytique pour les équations aux q-différences linéaires, dans laquelle on établit l'existence d'une solution analytique asymptotique à une solution formelle donnée. Comme la plupart de ses contemporains, Trjitzinsky se servait de la théorie des développements asymptotiques fondée par Poincaré. De notre côté, inspirés par des travaux de recherches développés dans les années 80 et 90 du XX-ième siècle en théorie analytique des équations différentielles, nous travaillons depuis

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 30E05, 30E99, 33D10, 39B22, 40G10.
Mots clefs. — Equation aux q-différences, sommabilité, fonction thêta.

quelques années pour tenter d'obtenir une théorie asymptotique dite *q-Gevrey* pour les équations aux q-différences linéaires ou non linéaires.

Avant d'aborder le contenu de ce travail, faisons quelques commentaires sur les équations aux q-différences en comparaison avec les équations différentielles. Dans tout ce qui suit, q désignera un nombre complexe tel que $|q| > 1$, auquel on associe l'opérateur fonctionnel σ_q défini par la relation $\sigma_q f(x) = f(qx)$.

Depuis Maillet (*cf*, par exemple, [**13**]), on sait que toute série entière satisfaisant une équation différentielle à coefficients analytiques est Gevrey, c'est-à-dire, ses coefficients a_n sont bornés par une suite du type $(CA^n(n!)^s)_n$, où C, $A > 0$ et $s \geq 0$ sont des constantes indépendantes de n. Dans le cas des équations aux q-différences, les solutions séries entières sont qualifiées de q-Gevrey : leurs coefficients sont contrôlés par les suites du type $(CA^n|q|^{n^2s/2})$; *cf* [**2**] pour les cas linéaires, [**13**] pour les cas non linéaires. Cette analogie peut être comprise par les relations

$$\delta^m x^n = n^m x^n, \qquad \sigma_q^m x^n = q^{mn} x^n,$$

dans lesquelles l'on note $\delta = x\frac{d}{dx}$, n et m étant des entiers positifs ou nuls. Partant de ces analogies Gevrey formelles, nous avons étudié, dans [**14**] puis [**5**], une version q-analogue de la sommation exponentielle de Borel-Laplace, en remplaçant la fonction exponentielle par son q-analogue $x \mapsto e_q(x) = q^{\frac{1}{2}(\frac{\log x}{\log q} - \frac{1}{2})^2}$, vu les relations

$$\delta e^x = xe^x, \qquad \sigma_q e_q(x) = xe_q(x).$$

Ceci fournit une théorie asymptotique q-Gevrey pour les équations aux q-différences **linéaires**.

Deux points sont à souligner. Premièrement, le choix de la fonction q-exponentielle e_q n'est pas unique, et la fonction theta de Jacobi donnée par

$$\theta_q(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{-n(n+1)/2} x^n,$$

également solution de $\sigma_q y = xy$, présente l'avantage d'être analytique sur tout le plan des complexes x non nuls ; ce nouveau choix de fonction q-exponentielle a donné lieu à une notion de développement asymptotique de caractère algébrique [**15**], [**8**]. Deuxièment, le produit de fonctions solutions d'équations aux q-différences présente une nature *peu stable vis-à-vis de l'indice de sommabilité*, comme l'illustre la comparaison ci-dessous entre différentielles et q-différences :

$$\frac{\delta(fg)}{fg} = \frac{\delta f}{f} + \frac{\delta g}{g}, \qquad \frac{\sigma_q(fg)}{fg} = \frac{\sigma_q f}{f} \times \frac{\sigma_q g}{g} \ ;$$

de ce fait on pourrait s'attendre à des difficultés particulières à surmonter pour bâtir une algèbre de fonctions asymptotiques q-Gevrey ...

Le présent article a un double objectif. Il s'agit d'abord d'étendre des résultats de [**15**] et [**8**] à toute équation aux q-différences linéaire ayant un polygone de Newton à pentes entières. La notion de développement asymptotique suivant une spirale, introduite dans nos travaux précédents, permet d'incarner toute solution formelle en une solution analytique à pôles prescrits lorsque l'équation étudiée admet une seule pente égale à un. Quand une équation possède plusieurs pentes, elle se factorise suivant ses pentes et nous verrons qu'elle a des solutions asymptotiques à un nombre fini d'échelles, du type

$$f_0 + \frac{f_1}{\Theta_1} + \cdots + \frac{f_n}{\Theta_n},$$

où les f_j sont des fonctions asymptotiques suivant des spirales et où les Θ_j sont des q-exponentielles exprimées à l'aide de θ. Notre construction peut être schématisée par le diagramme suivant :

« solution formelle série entière $\Longrightarrow$ quasi-solution $\Longrightarrow$ vraie solution » ;

noter également que les solutions correspondantes sont méromorphes dans un voisinage épointé en l'origine du plan complexe.

Un autre objectif du présent travail est de tenter de trouver un cadre général de fonctions asymptotiques qui permettrait de traiter aussi le cas des équations aux q-différences non linéaires. La construction à multi-échelles mentionnée plus haut suggérerait une écriture en transséries des solutions asymptotiques dans le cas non linéaire. A ce propos nous développerons à la fin de notre article quelques observations sur un exemple.

Les résultats obtenus dans cet article rejoignent la méthode algébrique de J. Sauloy [**10**] pour la résolution des équations aux q-différences linéaires. En effet, comme dans la théorie des fonctions elliptiques, la donnée du diviseur d'une solution permet généralement d'identifier la solution elle-même. Cette idée sera exploitée dans un travail en collaboration avec J.-P. Ramis et J. Sauloy sur la classification analytique des équations aux q-différences.

1. Notations et terminologies préliminaires

Etant donné λ un nombre complexe non nul, appelons *q-spirale passant par λ* l'ensemble discret $[\lambda]$ défini comme étant l'orbite de λ sous l'action de l'opérateur σ_q dans le plan complexe privé de zéro ; on a $[\lambda] = \lambda q^{\mathbb{Z}}$. Puisque $|q| > 1$, toute q-spirale tend à la fois vers zéro et l'infini.

Soit x un nombre complexe non nul ; définissons *la q-distance de x à la spirale* $[\lambda]$, notée $d_q(x; [\lambda])$, par la formule

$$d_q(x; [\lambda]) = \inf_{\xi \in [\lambda]} \left|1 - \frac{x}{\xi}\right|.$$

L'application $(\lambda, x) \mapsto d_q(x; [\lambda])$ est clairement q-invariante en x et en λ ; en outre, elle est quasi-symétrique au sens suivant : il existe des constantes C, D strictement positives, dépendant uniquement de q, telles que

$$C d_q(x; [\lambda]) < d_q(\lambda; [x]) < D d_q(x; [\lambda]).$$

Soit θ la fonction thêta de Jacobi définie dans tout le plan complexe sauf en zéro par

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{-n(n+1)/2}x^n = \prod_{n\in\mathbb{N}}(1-q^{-1-n})(1+xq^{-1-n})(1+q^{-n}/x),$$

où le triple produit permet de voir que θ s'annule sur la spirale $[-1]$. Pour simplifier, on note $\theta_\lambda(x) = \theta(-\frac{x}{\lambda})$ pour tous complexes non nuls λ et x. Les trois conditions sont équivalentes : (1) $\theta_\lambda(x) = 0$; (2) $x \in [\lambda]$ ou $\lambda \in [x]$; (3) $d_q(x;[\lambda]) = 0$.

Au voisinage de l'origine, la fonction exponenetielle $e^{\frac{1}{x}}$ a des comportements asymptotiques très constratés dans les demi-plans à gauche et à droite. Dans une direction analogue on a le résultat suivant (*cf* [**15**]), où l'on distingue essentiellement la spirale des zéros $[\lambda]$ et le reste du plan !

Lemme 1.1. — *Il existe des constantes C_1, C_2 strictement positives, toutes dépendant uniquement de q, telles que pour tout couple de nombres complexes non nuls (λ, x), on ait :*

$$C_1 d_q(x;[\lambda])\vartheta(|\frac{x}{\lambda}|) \leq |\theta_\lambda(x)| \leq C_2 d_q(x;[\lambda])\vartheta(|\frac{x}{\lambda}|),$$

où ϑ est la fonction thêta obtenue en remplaçant q par son module $|q|$ dans la définition de θ.

Remarque 1.2. — Du fait que $\theta(x)$ et $e_q(x)(= q^{\frac{1}{2}(\frac{\log x}{\log q}-\frac{1}{2})^2})$ vérifient la même équation fonctionnelle $\sigma_q y = xy$, leur rapport est une q-constante ; de là on pourra formuler la croissance de θ ou plutôt celle de ϑ en termes de $e_{|q|}$: il existe $C > 0$ et $D > 0$ vérifiant

$$C\vartheta(|x|) < e_{|q|}(|x|) < D\vartheta(|x|)$$

pour tout x non nul.

2. Développement asymptotique suivant une spirale

Soient λ un nombre complexe non nul et ϵ, R des réels strictement positifs. Posons

$$V([\lambda];R,\epsilon) = \{x \in \mathbb{C}\ : 0 < |x| < R, d_q(x;[\lambda]) > \epsilon\}\ ;$$

c'est un disque ouvert, épointé en zéro et dans lequel est supprimée une série de disques centrés sur la spirale $[\lambda]$. Puisque $d_q(x;[\lambda]) < 1$ pour tous les x, λ non nuls, on a $V([\lambda];R,\epsilon) = \varnothing$ si $\epsilon \geq 1$.

Soit

$$V([\lambda];R) = \cup_{\epsilon>0} V([\lambda];R,\epsilon).$$

On dira que $V([\lambda];R)$ est un *disque épointé sur* $[\lambda]$ *en zéro.*

Par $\mathbb{B}^{[\lambda]}$ nous désignons l'ensemble des germes de fonctions analytiques dans un disque épointé sur $[\lambda]$ en zéro, $V = V([\lambda];R)$, telles que, quels que soient $\epsilon > 0$ et $r \in]0,R[$, on ait l'encadrement suivant :

$$\sup_{x\in V([\lambda];r,\epsilon)} |f(x)| < \infty.$$

Définition 2.1. — *(*[**15**], [**8**]*)* Soit λ un nombre complexe non nul et soit $f \in \mathbb{B}^{[\lambda]}$. Soit $\hat{f} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ une série entière. On note $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ et on dira que f admet $\hat{f}$ pour *développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un en zéro suivant la spirale* $[\lambda]$ s'il existe des constantes strictement positives R, C, A telles que, pour tous $r \in]0, R[$, $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\sup_{x\in V([\lambda];r,\epsilon)} |x|^{-N} \Big| f(x) - \sum_{0\leq n<N} a_n x^n \Big| < \frac{C}{\epsilon} A^N |q|^{N^2/2}.$$

Rappelons qu'une série entière $\hat{f} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est dite *q-Gevrey d'ordre un* si la suite numérique $(|a_n|^{-1/n}|q|^{-n/2})_{n\geq 1}$ est une suite bornée ou, de façon équivalente, si la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n q^{-n^2/2} x^n$ a un rayon de convergence non nul. Soit $\mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1} \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$ l'anneau des séries entières q-Gevrey d'ordre un. Si $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$, son développement asymptotique est unique et appartient à $\mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1}$.

Le résultat suivant a été annoncé dans [**8**].

Théorème 2.2. — *L'application de Taylor $T : \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]} \to \mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1}$ qui associe à chaque $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ son développement $\hat{f}$ est un homomorphisme surjectif d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.*

En outre, son noyau peut être caractérisé de la façon suivante :

$$\ker T = \Big\{ \frac{h}{\theta_\lambda} \ : h \in \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}] \Big\},$$

où $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ désigne le corps des germes de fonctions méromorphes à l'origine du plan complexe.

Esquisse de démonstration.. — La surjectivité de T s'obtient par un mécanisme q-Borel-Laplace. En effet, soit $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série q-Gevrey d'ordre un ; soit ϕ sa transformée de q-Borel formelle définie par

$$\phi = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2} x^n,$$

qui représente une fonction analytique au voisinage de $x = 0$, soit $|x| < R$. Choisissons alors un entier n_0 tel que $|\lambda q^{n_0}| < R$, et définissons ensuite

$$f = \sum_{n\leq n_0} \frac{\phi(\lambda q^n)}{\theta(-\frac{x}{\lambda q^n})}.$$

On a $f \in \mathbb{B}^{[\lambda]}$; on peut vérifier que $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ et que $\hat{f}$ est son développement asymptotique.

Soit $f \in \ker T$ et notons $F = f\theta_\lambda$. Du fait que θ_λ s'annule sur la spirale $[\lambda]$, il vient que F peut se prolonger en une fonction analytique dans un disque épointé $0 < |x| < R$. Pour obtenir que F est méromorphe en $x = 0$, on vérifie qu'elle admet une croissance modérée, c'est-à-dire au plus polynomiale, lorsque x s'approche de zéro sur une famille de cercles concentrés en zéro. En effet, f étant asymptotiquement nulle, on a, pour tout entier $N > 0$:

$$|f(x)| < \frac{C}{\epsilon} A^N |q|^{N^2/2} |x|^N$$

pourvue que $d_q(x, [\lambda]) > \epsilon$. On termine la démonstration grâce au lemme 1.1, à la remarque 1.2 et à l'estimation suivante :

$$\min_{N \in \mathbb{N}} A^N |q|^{N^2/2} |x|^N \leq |q|^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln(A|x|)}{\ln|q|})^2 + \frac{1}{8}}. \quad \square$$

Remarque 2.3. — Si $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{C}^*$, on a $\theta_\lambda(xq^n) = q^{n(n-1)/2}(-\frac{x}{\lambda})^n \theta_\lambda(x)$; il en résulte que l'on a $f \in \ker T$ si, et seulement s'il existe un entier relatif n vérifiant $f \sigma_q^n \theta_\lambda \in \mathbb{C}\{x\}$.

Posons

$$\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}[x^{-1}] = \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]} \oplus x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}], \qquad \mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1}[x^{-1}] = \mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1} \oplus x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}],$$

où $x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ désigne l'ensemble des polynômes en x^{-1} sans terme constant. Si l'on envoie chaque polynôme $P \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ sur lui-même, l'application de Taylor T définie précédemment s'étend en une application linéaire, notée $\tilde{T}$, de $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}[x^{-1}]$ vers $\mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1}[x^{-1}]$.

Remarque 2.4. — *L'application* $\tilde{T} : \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}[x^{-1}] \to \mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1}[x^{-1}]$ *est surjective et admet le même noyau que* T : $\ker \tilde{T} = \frac{1}{\theta_\lambda}\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$.

3. Cas d'une seule pente

L'espace $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ a été introduit dans [**15**] et [**8**] lors de l'étude d'un formalisme q-analogue de la sommation exponentielle de Borel-Laplace. Il se trouve que toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire peut être resommée dans $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$, pour presque tout nombre complexe non nul λ, si le polygone de Newton de l'équation considérée admet une seule pente valant un. Plus précisemment, lorsque c'est le cas, à chaque solution formelle correspond par asymptoticité une unique solution analytique appartenant à $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$. Afin d'illustrer une telle correspondance, voici un exemple : l'équation fonctionnelle

$$(x\sigma_q + 1)y = 1$$

est satisfaite par la série entière $\hat{y}$, divergente mais q-Gevrey d'ordre un :

$$\hat{y} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{n(n-1)/2} x^n \ ;$$

notant ϕ la transformée q-Borel de $\hat{y}$:

$$\phi(\xi) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \xi^n = \frac{1}{1+\xi},$$

on vérifie que la fonction suivante définie comme étant q-Laplace de ϕ le long la spirale $[\lambda]$ (avec $[\lambda] \neq [-1]$) :

$$y(x;[\lambda]) = \sum_{xi\in[\lambda]} \frac{\phi(\xi)}{\theta(\frac{x}{\xi})},$$

est l'unique solution de l'équation initiale dans $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$, qui admet $\hat{y}$ pour développement asymptotique.

Dans la suite, nous allons étudier des équations ayant une pente égale à un entier $k > 0$ arbitraire. A ce sujet, il serait naturel d'utiliser une extension au niveau k de la q-sommation au moyen de la fonction θ. Compte tenu de difficultés non résolues pour le problème des moments correspondant, nous choisissons de mettre en place un cheminement *abstrait* vers la solution asymptotique depuis une solution formelle : « transformer » une quasi-solution en une vraie solution. On entend par *quasi-solution* d'une équation fonctionnelle toute fonction qui satisfait à l'équation à une fonction plate près ; en pratique, toute fonction asymptotique à une solution formelle peut être utilisée comme une quasi-solution du problème traité. On verra que le théorème 2.2, assurant entre autres l'existence de la quasi-solution, va jouer un rôle de première importance dans cette approche. Remarquons aussi que cette idée de quasi-solution, très classique, a été employée dans des circonstances plus ou moins similaires : [**12**] pour le théorème fondamental d'existence de solution asymptotique ; [**4**] et [**1**], pour le problème de sommabilité des solutions formelles d'une équation différentielle,. . .

Lemme 3.1. — *Soient k un entier strictement positif, α et λ des complexes non nuls et soit $h \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}[x^{-1}]$. Considérons l'équation fonctionnelle suivante :*

$$(x^k\sigma_q - \alpha)y = h. \tag{1}$$

Si $(-\lambda)^k \neq \alpha \bmod (q^{\mathbb{Z}})$, alors l'équation (1) admet une unique solution de la forme

$$y = f_0 + \frac{f_1}{\theta_\lambda} + \cdots + \frac{f_{k-1}}{\theta_\lambda^{k-1}},$$

où $f_0, \ldots, f_{k-1}$ sont k fonctions appartenant à l'espace $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}[x^{-1}]$.

Démonstration. — Nous allons procéder par récurrence sur k.

• $k = 1$. *Unicité* : soit $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ une solution de l'équation homogène $(x\sigma_q - \alpha)y = 0$; puisque la série nulle est l'unique solution formelle de cette équation, le développement de f est nul et, d'après la remarque 2.4, on a $f = \frac{u}{\theta_\lambda}$ avec $u \in \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$. Comme $\sigma_q\theta_\lambda(x) = (-\frac{x}{\lambda})\theta_\lambda(x)$, la fonction méromorphe u doit vérifier la relation $(-\lambda\sigma - \alpha)u = 0$; sous la condition de non résonnance $\lambda \neq -\alpha \bmod q^{\mathbb{Z}}$, il vient que la série de Laurent de u est nécessairement nulle, c'est-à-dire, $u \equiv 0$.

Existence : soit $\hat{h} = \sum_{n \geq n_0} h_n x^n$ le développement asymptotique de h ; substituons à y la série entière $\hat{y} = \sum_{n \geq n_0} a_n x^n$ dans l'équation (1). Par identification des coefficients, on obtient :

$$a_{n_0} = -\frac{h_{n_0}}{\alpha} \ ; \qquad a_n = -\frac{1}{\alpha}(h_n - a_{n-1} q^{n-1}), \quad n \geq n_0 + 1.$$

Comme $\hat{h}$ est q-Gevrey d'ordre un, par calculs directs, on peut vérifier que la série $\hat{y}$ définie ci-dessus est également q-Gevrey d'ordre un. Soit $\tilde{y} \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ une fonction qui est asymptotique à $\hat{y}$ (donc une *quasi-solution*) ; posons $y = \tilde{y} + z$ dans l'équation (1) et regroupons les termes de $\tilde{y}$, on trouve :

$$(x\sigma_q - \alpha)z = \epsilon \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}[x^{-1}], \qquad \epsilon \sim 0.$$

Avec la remarque 2.4, on écrit $\epsilon = \frac{e}{\theta_\lambda}$, où $e \in \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$; si l'on pose $z = \frac{u}{\theta_\lambda}$, on est conduit à l'équation régulière

$$(-\lambda\sigma_q - \alpha)u = e,$$

laquelle, étant donné que $\lambda \notin [-\alpha]$, admet une unique solution dans $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$. Ceci permet d'aboutir à la solution $y = \tilde{y} + z$ dans $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ pour l'équation (1) avec $k = 1$.

• $k \geq 1$ quelconque. Comme tout à l'heure, la solution formelle $\hat{y}$ est q-Gevrey d'ordre un. On va lui associer une fonction (*quasi-solution*) $\tilde{y}$ dans $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ (si $h \equiv 0$, on choisira $\tilde{y} \equiv 0$!). Posons $y = \tilde{y} + z$, $z = \frac{u}{\theta_\lambda}$ dans (1) et procédons de la même manière que tout à l'heure, on aura :

$$(-\lambda x^{k-1}\sigma_q - \alpha)u = e \in \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}].$$

Appliquons ensuite l'hypothèse de récurrence à cette dernière équation, ce qui donne l'existence et l'unicité de u dans l'espace somme $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}[x^{-1}] + ... + \frac{1}{\theta_\lambda^{k-2}}\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}[x^{-1}]$; on achève ainsi la démonstration du lemme. □

Remarque 3.2. — Compte tenu de la relation $\frac{1}{\theta_\lambda}\mathbb{C}[x^{-1}] \subset \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$, dans le lemme précédent, toutes les fonctions composantes f_1, ..., f_{k-1} peuvent être choisies dans $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$, à l'exception éventuelle de la fonction de tête f_0, laquelle doit être *de même nature que le second membre* h (f_0 étant *le* terme visible à l'ordre zéro dans l'échelle $(\theta_\lambda^{-n})_{n \geq 0}$).

Pour tout entier k strictement positif, définissons l'espace vectoriel $\mathbb{A}_{q;k}^{[\lambda]}$ sur $\mathbb{C}$ par

$$\mathbb{A}_{q;k}^{[\lambda]} = \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]} + \frac{1}{\theta_\lambda}\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]} + \cdots + \frac{1}{\theta_\lambda^{k-1}}\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]} \ ;$$

noter que $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]} \subset \cdots \subset \mathbb{A}_{q;k}^{[\lambda]}$, chaque inclusion étant stricte.

Soient λ, α deux nombres complexes non nuls. Pour simplifier, on dira que λ *diffère de* α *à l'ordre* $(q;k)$ si $(-\lambda)^k \notin \alpha q^{\mathbb{Z}}$.

Théorème 3.3. — *Soit k un entier strictement positif et soient α, λ deux nombres complexes non nuls. Considérons l'opérateur aux q-différences*

$$\Delta_{\alpha,k} = \alpha\sigma_q - x^k.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Le nombre λ diffère de α à l'ordre $(q;k)$.

(ii) L'opérateur fonctionnel $\Delta_{\alpha,k}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{A}_{q;k}^{[\lambda]}$ sur $\mathbb{C}$.

(iii) L'opérateur fonctionnel $\Delta_{\alpha,k}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{A}_{q;k}^{[\lambda]} + \mathbb{C}[x^{-1}]$ sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. — Soit ℓ un entier compris entre 0 et $k-1$; on a :

$$\Delta_{\alpha,k} y = \frac{h}{\theta_\lambda^\ell} \iff ((-\lambda)^\ell x^{k-\ell}\sigma_q - \alpha)(\theta_\lambda^\ell y) = h.$$

La démonstration du théorème résulte alors du lemme 3.1 et de la remarque 3.2. □

Le théorème 3.3 montre que l'espace $\mathbb{A}_{q;k}^{[\lambda]}$ est optimal pour l'action d'un opérateur aux q-différences du type $x^k\sigma_q - \alpha$, au sens de la remarque suivante.

Remarque 3.4. — Soient k, k' deux entiers strictement positifs, α un complexe non nul et considérons l'opŕateur fonctionnel $x^k\sigma_q - \alpha = \Delta_{\alpha,k;k'} : \mathbb{A}_{q;k'}^{[\lambda]} \to \mathbb{A}_{q;k'}^{[\lambda]}$. On suppose que λ diffère de α à l'ordre $(q;k)$. Alors, $\Delta_{\alpha,k;k'}$ est injectif si $k' \leq k$, et est surjectif si $k' \geq k$.

4. Equations linéaires à pentes entières, I

Soit Δ un opérateur aux q-différences de la forme

$$\Delta = a_0\sigma_q^n + a_1\sigma_q^{n-1} + ... + a_n \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q], \quad a_0 a_m \not\equiv 0,$$

où les a_j sont des fonctions analytiques au point à l'origine du plan complexe. Rappelons que *le polygone de Newton de* Δ (voir, par exemple, [**2**], [**14**]) est l'enveloppe convexe de l'ensemble des demi-droites

$$\cup_{0\leq j\leq n}(\{n-j\} \times [\mathrm{val}(a_j), \infty[)$$

dans la bande $[0,n]\times[0,\infty[$ du demi-plan supérieur, où $\mathrm{val}(a_j)$ désigne l'ordre en $x=0$ de a_j (par convention, on pose $\mathrm{val}(a) = \infty$ si a est identiquement nul). Supposons que le polygone de Newton n'a que des pentes entières $-\infty < k_1 < k_2 < ... < k_m < \infty$. Alors, l'opérateur Δ peut se factoriser analytiquement sous la forme suivante ([**5**]) :

$$(2) \qquad \Delta = h_0\Delta_{\alpha_{1,1},k_1}h_{1,1}\ldots\Delta_{\alpha_{1,\nu_1},k_1}h_{1,\nu_1}\Delta_{\alpha_{2,1},k_2}h_{2,1}\ldots\Delta_{\alpha_{m,\nu_m},k_m}h_{m,\nu_m} \ ;$$

ici et dans la suite, on utilisera les notations suivantes :

$$h_0 \in \mathbb{C}\{x\},\ \mathrm{val}(h_0) = \mathrm{val}(a_0) \ ; \quad h_{i,j} \in \mathbb{C}\{x\},\ h_{i,j}(0) = 1 \ ;$$

$$\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}^*, \quad \Delta_{\alpha_{i,j},k_i} = x^{k_i}\sigma_q - \alpha_{i,j} \ ; \quad \nu_i \geq 1,\ \nu_1 + ... + \nu_m = n.$$

Etendons d'abord le théorème 3.3 au cas d'un opérateur à plusieurs pentes.

Théorème 4.1. — *Soit Δ un opérateur donné par une expression du type (2) et supposons que* **toutes les pentes k_j sont strictement positives**. *Soit λ un nombre complexe non nul qui diffère de $\alpha_{i,j}$ à l'ordre $(q;k_{i,j})$ pour $i=1,\dots,m$ et $j=1,\dots,\nu_i$. Alors, on a les assertions suivantes :*

(i) L'opérateur Δ est un endomorphisme injectif du « petit » espace vectoriel $\mathbb{A}_{q;k_1}^{[\lambda]}$ sur $\mathbb{C}$.

(ii) Si $\mathrm{val}(h_0)=0$, i.e. $h_0(0)\neq 0$, ce même opérateur Δ est un endomorphisme surjectif du « grand » espace vectoriel $\mathbb{A}_{q;k_m}^{[\lambda]}$ sur $\mathbb{C}$.

Il en est de même lorsque $\mathbb{A}_{q;k_1}^{[\lambda]}$ et $\mathbb{A}_{q;k_m}^{[\lambda]}$ sont remplacés respectivement par $\mathbb{A}_{q;k_1}^{[\lambda]}+\mathbb{C}[x^{-1}]$ et $\mathbb{A}_{q;k_m}^{[\lambda]}+\mathbb{C}[x^{-1}]$.

Démonstration. — Le théorème s'obtient directement à partir de la remarque 3.4, suivie du théorème 3.3. □

Ceci étant, nous sommes en position d'établir le résultat central du présent article. On conviendra que $\mathbb{A}_{q;0}^{[\lambda]}=\mathbb{C}\{x\}$.

Théorème 4.2. — *Soit Δ un opérateur donné par une expression du type (2), où $-\infty<k_1<\ldots<k_m<\infty$. Soit λ un nombre complexe non nul; on suppose que la condition suivante est satisfaite : étant donnés deux couples d'indices* **distincts** *(i,j) et (i',j') de (2) tels que $i\le i'$, on a*

$$(-\lambda)^{k_{i'}-k_i}\notin \frac{\alpha_{i',j'}}{\alpha_{i,j}}q^{\mathbb{Z}}. \tag{3}$$

Alors, pour chaque couple d'indices (i,j) de (2), il existe une unique fonction $f_{i,j}\in 1+x\mathbb{A}_{q;k_m-k_i}^{[\lambda]}$ telle que, en posant

$$\mu_{i,j}=(-\lambda)^{k_i}\frac{\lambda}{\alpha_{i,j}},\qquad y_{i,j}=\frac{\theta_{\mu_{i,j}}}{\theta_\lambda^{k_i+1}}f_{i,j},$$

les n fonctions $(y_{i,j})_{1\le i\le m;1\le j\le\nu_i}$ constituent pour l'équation $\Delta y=0$ un système fondamental de solutions analytiques dans un disque épointé sur la spirale $[\lambda]$ en zéro du plan complexe.

Démonstration. — Nous allons procéder par récurrence sur le nombre m de pentes k_1, ..., k_m de Δ.

- $m=1$. Considérons une équation homogène de la forme

$$\Delta y=0,\qquad \Delta=(x^k\sigma_q-\alpha_1)h_1(x^k\sigma_q-\alpha_2)h_2\ldots(x^k\sigma_q-\alpha_n)h_n,$$

dans laquelle les h_i sont des fonctions analytiques et valant un en $x=0$. Noter que, dans ce cas, la condition (3) signifie la non resonnance entre les coefficients α_j : $\alpha_j\notin[\alpha_{j'}]$ si $j\neq j'$.

Soit j un entier compris entre 1 et n et posons $\mu_j = (-\lambda)^k \frac{\lambda}{\alpha_j}$. De la relation

$$(x^k\sigma_q - \alpha)\Big(\frac{\theta_\mu}{\theta_\lambda^{k+1}}u\Big) = \frac{\theta_\mu}{\theta_\lambda^{k+1}}\Big((-\lambda)^k\frac{\lambda}{\mu}\sigma_q - \alpha\Big)u,$$

il suit que

$$\Delta\Big(\frac{\theta_{\mu_j}}{\theta_\lambda^{k+1}}u\Big) = \alpha_j^m\frac{\theta_{\mu_j}}{\theta_\lambda^{k+1}}\Big(\sigma_q - \frac{\alpha_1}{\alpha_j}\Big)h_1 ... \Big(\sigma_q - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\Big)h_{j-1}\times$$

$$\times(\sigma_q - 1)h_j\Big(\sigma_q - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\Big)h_{j+1}\ldots\Big(\sigma_q - \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\Big)h_n u.$$

Puisque $\frac{\alpha_{j'}}{\alpha_j} \notin q^{\mathbb{Z}}$ pour tout indice $j' \neq j$, tout opérateur $\sigma_q - \frac{\alpha_{j'}}{\alpha_j}$, à l'exception du cas $j' = j$, est un automorphisme de $\mathbb{C}\{x\}$. On en déduit l'existence et l'unicité de la fonction $u \in 1 + x\mathbb{C}\{x\}$ vérifiant l'équation $\Delta(\frac{\theta_{\mu_j}}{\theta_\lambda^{k+1}}u) = 0$, car cette dernière équivaut à la suivante (on note $c_n = 1$) :

$$\Big(\sigma_q - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\Big)h_{j+1}\ldots\Big(\sigma_q - \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\Big)h_n u = \frac{c_j}{h_j}, \qquad c_j = \prod_{j<j'\leq n}\Big(1 - \frac{\alpha_{j'}}{\alpha_j}\Big).$$

- Considérons un opérateur aux q-différences Δ donné par (2), avec $m \geq 2$. Soit

$$\Delta_m = \Delta_{\alpha_{m,1},k_m}h_{m,1}\ldots\Delta_{\alpha_{m,\nu_m},k_m}h_{m,\nu_m}$$

et posons $\Delta = \Delta_{<m}\Delta_m$. Notons que $\Delta_{<m}$ est un opérateur d'ordre $(n-\nu_m)$ et à $(m-1)$ pentes ; puisque la condition (3) est satisfaite par Δ, il en est de même pour $\Delta_{<m}$. Par hypothèse de récurrence, il existe, pour chaque couple d'indices (i,j) de $\Delta_{<m}$ $(1 \leq i \leq m-1)$, une unique solution $w_{i,j}$ de l'équation $\Delta_{<m}y = 0$ vérifiant

$$w_{i,j} = \frac{\theta_{\mu_{i,j}}}{\theta_\lambda^{k_i+1}}u_{i,j}, \qquad u_{i,j} \in 1 + \mathbb{A}_{q;k_{m-1}-k_i}^{[\lambda]}.$$

Ceci étant, résoudre $\Delta y = 0$ revient à considérer les solutions des $(n - n_m + 1)$ équations suivantes :

$$\Delta_m y = w_{i,j} \quad (1 \leq i < m,\ 1 \leq j \leq \nu_i), \qquad \Delta_m y = 0.$$

D'après le raisonnement développé précédemment pour le cas d'une seule pente, la dernière équation $\Delta_m y = 0$ admet ν_m solutions de la forme $\frac{\theta_{\mu_{m,j}}}{\theta_\lambda^{k_m+1}}f_{m,j}$, $f_{m,j} \in 1 + x\mathbb{C}\{x\}$, $1 \leq j \leq \nu_m$. Pour le reste, en substituant dans chaque équation $\Delta_m y = w_{i,j}$ l'expression $\frac{\theta_{\mu_{i,j}}}{\theta_\lambda^{k_i+1}}z$ à y, il vient :

$$(x^{k_m-k_i}\sigma_q - \frac{\alpha_{m,1}}{\alpha_{i,j}})h_{m,1} ... (x^{k_m-k_i}\sigma_q - \frac{\alpha_{m,\nu_m}}{\alpha_{i,j}})h_{m,\nu_m}z = \frac{u_{i,j}}{\alpha_{i,j}^{\nu_m}}.$$

Compte tenu de la condition (3), le nombre λ diffère de $\frac{\alpha_{m,j'}}{\alpha_{i,j}}$ $(m > i)$ à l'ordre $(q; k_m - k_i)$, ce qui permet d'appliquer le théorème 3.3 pour conclure à ce que l'équation $\Delta_m y = w_{i,j}$ admet pour solution

$$y = \frac{\theta_{\mu_{i,j}}}{\theta_\lambda^{k_i+1}} z_{i,j}, \quad z_{i,j} \in \mathbb{A}_{q;k_m-k_i}^{[\lambda]},\ z_{i,j} \sim \frac{(-1)^{\nu_m}}{\alpha_{m,1}\dots\alpha_{m,\nu_m}} + O(x)\ ;$$

en divisant $z_{i,j}$ par sa valeur asymptotique en zéro, on obtient une fonction $f_{i,j} \in 1 + x\mathbb{A}_{q;k_m-k_i}^{[\lambda]}$ telle que, si l'on pose $y_{i,j} = \frac{\theta_{\mu_{i,j}}}{\theta_\lambda^{k_i+1}} f_{i,j}$, on a $\Delta y_{i,j} = 0$.

On vient de trouver n solutions $y_{i,j}$ de l'équation $\Delta y = 0$; montrons qu'elles sont indépendantes sur le corps $\mathcal{C}_q$ des q-constantes (ici, on entend par q-constante toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$ et invariante par σ_q). En effet, soient $c_{i,j}$ des q-constantes vérifiant la relation

$$\sum_{1\le i\le m; 1\le j\le \nu_i} c_{i,j} y_{i,j} = 0,$$

laquelle, avec $\Delta_m(y_{m,j}) = 0$, entraîne celle-ci :

$$\sum_{1\le i\le m-1; 1\le j\le \nu_i} c_{i,j} \Delta_m(y_{i,j}) = 0.$$

Les fonctions $\Delta_m(y_{i,j})$ $(i < m)$ figurant dans la dernière identité constituent un système fondamental de solutions pour $\Delta_{<m} y = 0$; il s'en suit que $c_{i,j} = 0$ pour $i < m$. Ceci étant, la relation initiale donnée sur les $c_{i,j}$ se réduit à la suivante :

$$c_{m,1}\theta_{\mu_{m,1}} f_{m,1} + \dots + c_{m,\nu_m}\theta_{\mu_{m,\nu_m}} f_{m,\nu_m} = 0,$$

ou encore, par itération de σ_q :

$$c_{m,1}\theta_{\mu_{m,1}}(\alpha_{m,1}^\ell \sigma_q^\ell f_{m,1}) + \dots + c_{m,\nu_m}\theta_{\mu_{m,\nu_m}}(\alpha_{m,\nu_m}^\ell \sigma_q^\ell f_{m,\nu_m}) = 0, \quad \ell \in \mathbb{Z},$$

ce qui donne immédiatement $c_{m,1} = \dots = c_{m,\nu_m} = 0$. Par conséquent, le système complet $(y_{i,j})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le \nu_i$, est libre sur $\mathcal{C}_q$.

Pour finir, notons que l'unicité de chaque $f_{i,j}$ est conséquence directe de la complétude du système $(y_{i,j})$ ainsi formé. □

5. Equations linéaires à pentes entières, II

La condition (3) du théorème 4.2 suppose entre autres, que, sur chaque pente k_i, les coefficients $\alpha_{i,j}$ ne sont pas q-congruents entre eux ; ceci exclut, par exemple, l'équation $(\sigma_q - 1)^2 y = 0$. Dans ce paragraphe, nous allons d'abord alléger cette contrainte puis en tirer quelques conséquences sur la nature des solutions d'une équation aux q-différences linéaire.

Quitte à permuter des facteurs appartenant à une même pente, on peut supposer que dans (2), on a la condition supplémentaire suivante (*cf* [**5**], 3.1.5) :

$$(4) \qquad j' > j \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha_{i,j'}}{\alpha_{i,j}} \notin q^{-\mathbb{N}^*}.$$

Soit (i,j) un couple d'indices figurant dans (2) ; appelons *multiplicité de* $\alpha_{i,j}$ le nombre $\nu_{i,j}$ défini par

$$\nu_{i,j} = \#\Big\{\alpha_{i,j'} : \frac{\alpha_{i,j'}}{\alpha_{i,j}} \in q^{\mathbb{N}}\Big\} ;$$

on a $\nu_{i,j} > \nu_{i,j'}$ si $j' > j$ et $\alpha_{i,j'} \in \alpha_{i,j} q^{\mathbb{N}}$.

On note ℓ_q une fonction q-logarithmique qui est, par définition, solution de l'équation aux q-différences $(\sigma_q - 1)y = 1$; on a $\sigma_q \ell_q^m = (\ell_q + 1)^m$. Comme dans [**9**], on peut choisir $\ell_q = \frac{\delta\theta}{\theta}$ $(= x\frac{\theta'}{\theta})$ ou une variante de celle-ci obtenue par le remplacement de x par λx.

Théorème 5.1. — *Conservons les notations λ, Δ, $\mu_{i,j}$ du théorème 4.2 et remplaçons la condition (3) par (4) augmentée de la condition de généricité suivante sur λ :*

$$i < i' \quad \Longrightarrow \quad (-\lambda)^{k_{i'} - k_i} \notin \frac{\alpha_{i',j'}}{\alpha_{i,j}} q^{\mathbb{Z}}. \tag{5}$$

Alors, pour chaque couple d'indices (i,j) de (2), il existe $\nu_{i,j}$ fonctions $f_{i,j,\epsilon} \in \mathbb{A}^{[\lambda]}_{q;k_m - k_i}$, $0 \leq \epsilon < \nu_{i,j}$, telles que, en posant

$$y_{i,j} = \sum_{0 \leq \epsilon < \nu_{i,j}} \frac{\theta_{\mu_{i,j}}}{\theta_\lambda^{k_i+1}} \ell_q^\epsilon f_{i,j,\epsilon},$$

les n fonctions $(y_{i,j})_{1\leq i\leq m; 1\leq j\leq \nu_i}$ constituent pour l'équation $\Delta y = 0$ un système fondamental de solutions méromorphes dans un disque épointé $0 < |x| < R$.

Démonstration. — Il s'agit d'une adaptation directe du théorème 4.2, dont nous laissons au lecteur le détail de la vérification (à comparer à la démonstration du théorème 3.3.2, [**5**]). □

Dans le théorème 4.2, les solutions $y_{i,j}$ sont toutes analytiques dans un disque épointé sur $[\lambda]$ en zéro et leur nature d'analyticité au voisinage de $[\lambda]$ dépend de k_m de la façon suivante. Si $k_m \geq 0$, les $y_{i,j}$ ont un pôle de multiplicité au plus $(k_m + 1)$ sur $[\lambda]$; si $k_m < 0$, les $y_{i,j}$ sont analytiques en tout point de $[\lambda]$ suffisamment proche de 0, ce qui équivaut à dire que $y_{i,j}$ sont analytiques au voisinage de zéro sauf éventuellement en zéro.

Dans le cas général, lorsque la résonnance a lieu, c'est-à-dire, lorsque certains coefficients $\alpha_{i,j}$ sont de multiplicité $\nu_{i,j} > 1$, des fonctions q-logarithmiques peuvent figurer dans une solution fondamentale. Si, par exemple, $\ell_q = x\frac{\theta'}{\theta}$, une *nouvelle* spirale de pôles s'ajoutera à la solution concernée. Cependant, on observera que, si $q > 1$, la q-logarithme ℓ_q s'annule une et exactement une fois entre deux zéros consécutifs. Dans le cas général, la fonction ℓ_q a autant de pôles que zéros dans $\mathbb{C}^*$, car l'intégrale de $\frac{\ell_q'}{\ell_q}$ sur un « contour » composé de deux cercles q-congruents $|x| = r_i$ $(r_1/r_2 \in q^{\mathbb{Z}})$ va s'annuler lorsque r_1/r_2 est suffisamment grand (ou petit). On dira que ℓ_q est d'ordre nul au sens de la définition 5.2 ci-dessous.

Définition 5.2. — Soit f une fonction méromorphe dans un disque épointé $0 < |x| < R$. Pour toute paire de nombres $(r,n) \in]0,R[\times\mathbb{N}$, on pose

$$\omega(f;r,n) = \sum_{r|q|^{-n}\leq|x_0|<r} \mathrm{val}(f;x_0),$$

où $\mathrm{val}(f;x_0)$ désigne la valuation de f en x_0. On dira que f est *d'ordre* $(q;d)$ *en zéro* s'il existe un nombre $r \in]0,R[$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega(f;r,n)}{n} = d.$$

S'il existe un tel r satisfaisant à la condition de la définition 5.2, il en sera de même pour n'importe quel nombre appartenant à $]0,R[$. On vérifiera immédiatement les faits ci-dessous.

• Toute fonction méromorphe q-constante est d'ordre nul ; il en est de même pour toute fonction q-logarithmique méromorphe.

• La solution $y_{i,j}$ étudiée dans le théorème 4.2 est de q-ordre au moins $(-k_m)$, quel que soit l'indice (i,j).

Ceci étant, nous faisons la conjecture suivante.

Conjecture 5.3. — *Soit Δ un opérateur défini par (2) et soit f une fonction méromorphe sur un voisinage épointé en zéro. Si $\Delta f = 0$, alors f est d'ordre $(q;d)$ en zéro avec $d \geq -k_m$.*

En particulier, si Δ est fuchsien en zéro et que f n'est pas identiquement nulle, alors f est d'ordre nul.

6. Derniers commentaires : vers le cas non linéaire

Aucun espace $\mathbb{A}_{q;k}^{[\lambda]}$ n'est suffisamment grand pour résoudre l'équation aux q-différences non linéaire suivante :

$$x\sigma_q y + y = x + cxy^2, \tag{6}$$

où c est un nombre complexe différent de zéro et de q. En effet, l'espace vectoriel $\mathbb{A}_{q;k}$ n'est pas stable par la multiplication. Cependant, l'équation (6) possède une unique série entière solution formelle, et celle-ci est de classe q-Gevrey d'ordre un ; ainsi se pose le probème de lui trouver des solutions asymptotiques ! Ci-dessous, nous évoquons deux approches qui nous semblent toutes les deux utiles dans ce cadre non linéaire.

Une première approche consiste à prolonger l'idée de quasi-solution jusqu'à l'ordre infini : la solution à construire serait représentée par une (trans)série du type

$$f_0 + \frac{f_1}{\theta_\lambda} + \frac{f_2}{\theta_\lambda^2} + \cdots + \frac{f_n}{\theta_\lambda^n} + \ldots,$$

les fonctions « coordonnées » f_j appartenant toutes à l'espace $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$.

Une autre approche consiste à linéariser (6) par une conjugaison analytique. D'après des travaux de F. Menous [**6**], il existe une transformation $z = w(x, y)$, analytique en $(x, y) = (0, 0)$, inversible en y, qui reduit l'équation (6) à la forme normale suivante :

$$xz(qx) + z(x) = A(c), \tag{7}$$

où $A(c)$ est une (ou *la*) constante classifiante. Soit λ un nombre complexe non nul qui n'appartient pas à la spirale $[-1]$, et soit u la solution de (7) dans $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$. Supposons que l'inverse de $z = w(x, y)$ est donnée par

$$y = \sum_{n\geq 0} \omega_n(x) z^n \ ;$$

chaque u^n étant un élément de $\mathbb{A}_{q;n}^{[\lambda]}$, on obtient cette fois encore, comme dans la première approche, une solution de (6) en termes de transserie.

Références

[1] W. Balser, B. Braaksma, J.-P. Ramis & Y. Sibuya – « Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations », *Asymptotic Analysis* **5** (1991), p. 27–45.

[2] J.-P. Bézivin – « Sur les équations fonctionnelles aux q-différences », *Aequationes Math.* **43** (1993), p. 159–176.

[3] G. Birkhoff – « The Generalized Riemann Problem for Linear Differential Equations and the Allied Problems for Linear Difference and q-Difference Equations », *Proc. Am. Acad.* **49** (1913), p. 521–568.

[4] B. Malgrange & J.-P. Ramis – « Fonctions multisommables », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), p. 353–368.

[5] F. Marotte & C. Zhang – « Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), p. 1859–1890.

[6] F. Menous – « An example of nonlinear q-difference equation », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Sér. 6* **13** (2004), p. 421–457.

[7] J.-P. Ramis – « About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Sér. 6* **1** (1992), p. 53–94.

[8] J.-P. Ramis & C. Zhang – « Développement asymptotique q-Gevrey et fonction theta de Jacobi », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **335** (2002), p. 899–902.

[9] J. Sauloy – « Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), p. 1021–1071.

[10] ———, « Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear q-difference equations », in *Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes (I). Volume en l'honneur de Jean-Pierre Ramis* (M. Loday-Richaud, éd.), Astérisque, vol. 296, SMF, 2004, p. 227–251.

[11] W. Trjitzinsky – « Analytic Theory of Linear q-difference Equations », *Acta Mathematica* **61** (1933), p. 1–38.

[12] W. Wasow – *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience Wiley, 1965.

[13] C. Zhang – « Sur un théorème du type de Maillet-Malgrange pour les équations q-différences-différentielles », *Asmptotic Analysis* **17** (1998), p. 309–314.

[14] ______, « Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **49** (1999), p. 227–261.

[15] ______, « Une sommation discrète pour des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques : théorie générale et exemples », in *Differential equations and the Stokes phenomenon* (B. L. J. t. Braaksma, éd.), World Scientific, Singapore, 2002, p. 309–329.

C. Zhang, Laboratoire Paul PAINLEVÉ (UMR – CNRS 8524), UFR Math., Université des Sciences et Technologies de Lille, Cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail : `zhang@math.univ-lille1.fr`