Séminaires & Congrès
10, 2005, p. 391–428

FAMILLE ADMISE ASSOCIÉE À UNE VALUATION DE $K[x]$

par

Michel Vaquié

Résumé. — Toute valuation μ de $K[x]$ prolongeant une valuation ν donnée de K permet de construire une famille admise de valuations de $K[x]$, essentiellement unique, qui converge vers μ. L'étude de l'ensemble $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ des valuations ou pseudo-valuations prolongeant ν à $K[x]$ peut alors se ramener à l'étude de l'ensemble $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ des familles admissibles, ce qui permet en particulier de définir une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{E}(K[x],\nu)$.

***Abstract* (Admissible family associated to a valuation of $K[x]$).** — Any valuation μ of $K[x]$ extending a given valuation ν of K gives a construction of an almost unique admissible family of valuations of $K[x]$, which converges to μ. The study of the set $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ of the valuations or pseudo-valuations extending ν to $K[x]$ is then reduced to the study of the set $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ of admissible families. By this way we can define an order on the set $\mathcal{E}(K[x],\nu)$.

Introduction

Soit K un corps muni d'une valuation ν, à valeurs dans un groupe ordonné Γ_ν. Nous savons que nous pouvons obtenir toute valuation ou pseudo-valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ qui prolonge ν grâce à *une famille admise de valuations convergente* $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ (*cf.* théorèmes 2.4 et 2.5 de [**Va**]).

Nous rappelons dans une première partie les notions de *valuations augmentées*s et de *valuations augmentées limites*, qui sont nécessaires pour définir les familles admises de valuations. Puis nous précisons dans une deuxième partie comment nous pouvons construire la famille admise associée à une valuation μ, ainsi nous pourrons la déterminer de manière essentiellement unique à partir de μ. Cela nous permettra de définir certains invariants de cette valuation et de décrire l'ensemble de toutes les extensions de la valuation ν à $K[x]$. En particulier nous pouvons définir grâce aux

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 13A18, 12J10, 14E15.
Mots clefs. — Valuation, extension, famille admise.

familles admises une relation d'ordre partiel sur cet ensemble, et nous comparons cet ordre avec l'ordre naturel défini par l'ordre sur le groupe des valeurs.

Toute famille admise est réunion de familles *admissibles simples*, qui sont elles-mêmes constituées d'une partie *discrète* et d'une partie *continue*. Dans une troisième partie, nous allons étudier la partie continue d'une famille admissible simple. Nous allons en particulier donner une propriété des *polynômes-clés limites* associés à cette partie continue, propriété équivalente à une propriété des *polynômes-clés* apparaissant dans la partie discrète, propriété caractéristique donnée par MacLane ([**McL1**] Theorem 9.4, [**Va**] Théorème 1.11).

Remerciements. — L'auteur tient à remercier le Mathematical Sciences Research Institute à Berkeley pour lui avoir offert un cadre de travail chaleureux et stimulant, pour un séjour au cours duquel cet article a été en partie rédigé.

1. Valuation augmentée et valuation augmentée limite

Dans ce qui suit nous nous donnons une valuation ν sur un corps K et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ que nous considérons sont des prolongements de ν. Nous nous donnons aussi un groupe totalement ordonné $\widetilde{\Gamma}$, contenant le groupe des ordres Γ_ν de la valuation ν, et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de $K[x]$ ont leur groupe des ordres Γ_μ qui est un sous-groupe ordonné de $\widetilde{\Gamma}$. Nous définissons aussi l'ensemble totalement ordonné $\overline{\Gamma} = \widetilde{\Gamma} \cup \{+\infty\}$.

En fait nous supposerons dans la suite que la valuation ν de K est de rang fini r, alors nous pouvons considérer le groupe des ordres Γ_ν comme un sous-groupe ordonné du groupe $\mathbb{R}^r$ muni de l'ordre lexicographique ([**Ab**], proposition 2.10), que nous notons $\Gamma_{\nu,\mathbb{R}}$. Alors toute valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ qui prolonge la valuation ν est de rang $r+1$ et son groupe des valeurs Γ_μ peut être inclus dans le groupe $\big(\mathbb{R} \oplus \Gamma_{\nu,\mathbb{R}}\big)_{\text{lex}} = \big(\mathbb{R}^{r+1}\big)_{\text{lex}}$. Nous pourons donc supposer dans la suite que le groupe $\widetilde{\Gamma}$ est le groupe $\big(\mathbb{R} \oplus \Gamma_{\nu,\mathbb{R}}\big)_{\text{lex}}$.

Pour toute valuation μ de $K[x]$ nous pouvons définir la notion de *polynôme-clé* ϕ, et si ϕ est un polynôme-clé pour μ et si γ est un élément de $\widetilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = [\mu\,;\, \mu'(\phi) = \gamma]$. Dans la suite, chaque fois que nous dirons que μ' est la valuation augmentée associée à un polynôme ϕ et à une valeur γ, ou que nous utiliserons la notation $\mu' = [\mu\,;\, \mu'(\phi) = \gamma]$, nous supposerons que le polynôme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ et que la valeur γ appartient à $\widetilde{\Gamma}$ et vérifie $\gamma > \mu(\phi)$. De plus nous pouvons aussi définir la notion de *famille de valuations augmentées itérées* comme une famille dénombrable $(\mu_i)_{i\in I}$ de valuations de $K[x]$, $I = \{1,\dots,n\}$ ou $I = \mathbb{N}^*$, associée à une famille de polynômes $\big(\phi_i\big)_{i\in I}$ et à une famille $\big(\gamma_i\big)_{i\in I}$ d'éléments de $\widetilde{\Gamma}$, telle que chaque valuation μ_i, $i>1$, est une valuation augmentée de la forme $\mu_i = [\mu_{i-1}\,;\, \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$ et où la famille des polynômes-clés $\left(\phi_i\right)$ vérifie les deux propriétés suivantes : pour tout $i > 2$ nous avons $\deg \phi_i \geqslant \deg \phi_{i-1}$ et les polynômes ϕ_i et ϕ_{i-1} ne sont pas μ_{i-1}-équivalents.

Nous renvoyons aux articles de MacLane [**McL1**], [**McL2**], et à l'article de l'auteur [**Va**], pour les définitions et les propriétés des polynômes-clés, des valuations augmentées et des familles de valuations augmentées itérées.

Dans [**Va**], nous avons introduit la notion de *famille admissible simple* de valuations de $K[x]$: une famille admissible simple $\mathcal{S}$ est composée par la réunion de deux familles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ définies de la manière suivante.

La famille $\mathcal{D} = (\mu_i)_{i\in I}$ est une famille non vide de valuations augmentées itérées de $K[x]$ telle que la famille de polynômes-clés $\left(\phi_i\right)_{i\in I}$ vérifie l'inégalité stricte $\deg \phi_i > \deg \phi_{i-1}$; de plus nous pouvons vérifier que pour tout i, sauf éventuellement pour $i = n$ le plus grand élément de I, la valeur γ_i appartient à $\Gamma_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

La famille $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est une famille de valuations de $K[x]$, où l'ensemble A est un ensemble totalement ordonné, sans élément maximal, associée à une famille de polynômes $\left(\phi_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ de même degré d, et à une famille $\left(\gamma_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ d'éléments de $\widetilde{\Gamma}$, pour tout $\alpha < \beta$ dans A, ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α et la valuation μ_β est la valuation augmentée $\mu_\beta = [\mu_\alpha\,;\, \mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$, avec $\gamma_\beta > \mu_\alpha(\phi_\beta) = \gamma_\alpha$. La famille $\mathcal{C}$ est vide si la famille $\mathcal{D}$ est infinie, sinon le degré d des polynômes-clé ϕ_α est égal au degré du dernier polynôme-clé ϕ_n de la famille $\left(\phi_i\right)_{i\in I}$ associée à $\mathcal{D}$, et pour tout α dans A, la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_n\,;\, \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$. En fait si nous savons que pour un indice α la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_n\,;\, \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, nous en déduisons que pour tout $\beta > \alpha$, la valuation μ_β est aussi la valuation augmentée $\mu_\beta = [\mu_n\,;\, \mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$. De plus pour tout α dans A, le groupe des ordres de la valuation μ_α est égal au groupe des ordres de la valuation μ_n.

Les familles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont appelées respectivement les parties *discrète* et *continue* de la famille admissible simple $\mathcal{S}$. De plus si la famille $\mathcal{C}$ est vide, c'est-à-dire pour $\mathcal{S} = \mathcal{D}$, nous disons que la famille $\mathcal{S}$ est une *famille admissible simple discrète* ou une *famille admissible discrète*, et si la famille $\mathcal{D}$ ne contient qu'une valuation, c'est-à-dire pour $\mathcal{S} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A^*}$ avec $A^* = \{1\} \cup A$, nous disons que la famille $\mathcal{S}$ est une *famille admissible simple continue* ou une *famille admissible continue*.

Remarquons que si $\mathcal{C}$ est la partie continue d'une famille admissible simple $\mathcal{S}$, pour tout α_0 dans A nous pouvons définir le sous-ensemble $A' = \{\alpha \in A \mid \alpha > \alpha_0\}$ et la famille $\mathcal{C}' = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A'}$. Alors $\mathcal{C}'$ est la partie continue d'une nouvelle famille admissible simple $\mathcal{S}'$ définie par $\mathcal{S}' = (\mu_{\alpha_0}) \cup \mathcal{C}'$. La famille $\mathcal{S}'$ est une famille admissible simple continue et est une sous-famille de la famille $\mathcal{C}$. En particulier toute partie continue $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ d'une famille admissible simple $\mathcal{S}$ telle que A possède un plus petit élément α_0 peut être considérée comme une famille admissible continue, et nous dirons en fait que toute partie continue $\mathcal{C}$ est une famille admissible continue, même si l'ensemble A ne possède pas de plus petit élément.

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille admissible continue de valuations, alors les groupes des ordres des valuations μ_α sont tous égaux à un même sous-groupe Γ de $\widetilde{\Gamma}$, et l'ensemble $\Lambda(A) = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est un sous-ensemble de Γ isomorphe à l'ensemble ordonné A. Nous en déduisons que $\Lambda(A)$ n'a pas de plus grand élément, en particulier si les valuations μ_α sont discrètes de rang un, c'est-à-dire pour $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$, cet ensemble n'est pas borné. Nous disons que la famille admissible continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est *exhaustive* si l'ensemble $\Lambda(A)$ est un intervalle du groupe Γ, c'est-à-dire si pour tout $\alpha < \alpha'$ dans A, pour tout élément γ de Γ vérifiant $\gamma_\alpha < \gamma < \gamma_{\alpha'}$, il existe α'' dans A tel que $\gamma = \gamma_{\alpha''}$.

Pour pouvoir définir la notion de *famille admissible* de valuations de $K[x]$ nous devons d'abord introduire la notion de *valuation augmentée limite* associée à une famille admissible continue.

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille admissible continue, associée à la famille $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de polynômes-clés dans $K[x]$ de degré d, et à la famille $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de valeurs dans $\widetilde{\Gamma}$, et soit Γ le groupe des ordres des valuations de $\mathcal{C}$.

Pour tout polynôme f de $K[x]$ et pour tout $\alpha < \beta$ dans A nous avons $\mu_\alpha(f) \leqslant \mu_\beta(f)$, avec l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$ pour $\deg f < d$. De plus, si pour le polynôme f il existe $\alpha < \beta$ avec $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$, alors pour tout $\alpha' > \alpha$ nous avons encore l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu_{\alpha'}(f)$. Nous pouvons définir le sous-ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ de $K[x]$ formé des polynômes pour lesquels la famille $\big(\mu_\alpha(f)\big)_{\alpha\in A}$ n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang,

$$\widetilde{\Phi}(A) = \big\{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)\ \forall\, \alpha < \beta \in A\big\}.$$

Pour tout polynôme f de $K[x]$ n'appartenant pas à $\widetilde{\Phi}(A)$ nous posons $\mu_A(f) = \sup\big(\mu_\alpha(f), \alpha \in A\big)$. En particulier $\mu_A(f)$ est défini pour tout polynôme f de degré strictement inférieur à d, et si l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ est vide μ_A est une nouvelle valuation de $K[x]$.

Dans le cas où l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ est non vide nous pouvons définir l'ensemble $\Phi(A)$ des polynômes unitaires appartenant à $\widetilde{\Phi}(A)$ de degré minimal, et tout polynôme ϕ appartenant à $\Phi(A)$ est un *polynôme-clé limite* pour la famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ (*cf.* [**Va**], proposition 1.21), et un tel polynôme ϕ permet alors de définir une *valuation augmentée limite* pour la famille $\mathcal{C}$.

Rappelons la définition de la valuation augmentée $\mu' = [\mu\,;\, \mu'(\phi) = \gamma]$ de $K[x]$, construite à partir d'une valuation μ, associée à un polynôme-clé ϕ pour μ et à une valeur γ dans $\widetilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$. Pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = g_m\phi^m + \cdots + g_1\phi + g_0$, où les polynômes g_j, $0 \leqslant j \leqslant m$ sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ϕ, et nous avons :

$$\mu'(f) = \inf\big(\mu(g_j) + j\gamma,\ 0 \leqslant j \leqslant m\big).$$

Rappelons que nous pouvons définir aussi pour tout polynôme unitaire ϕ de degré 1, $\phi = x + b$, et pour toute valeur γ de $\widetilde{\Gamma}$ une valuation μ de $K[x]$ de la manière suivante. Tout polynôme f de $K[x]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = a_d\phi^d + \cdots + a_1\phi + a_0$ et nous posons $\mu(f) = \inf\bigl(\nu(a_j) + j\gamma,\ 0 \leqslant j \leqslant d\bigr)$, nous notons cette valuation $\mu = [\nu\,;\, \mu(\phi) = \gamma]$.

De même la valuation augmentée limite μ' construite à partir de la famille admissible continue $\mathcal{C} = \bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha\in A}$, associée au polynôme-clé limite ϕ et à une valeur γ dans $\widetilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, est définie de la manière suivante. Pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons encore le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = g_m\phi^m + \cdots + g_1\phi + g_0$, les polynômes g_j, $0 \leqslant j \leqslant m$ sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ϕ, par conséquent sont de degré strictement inférieur à d est nous pouvons définir les valeurs $\mu_A(g_j)$, en fait nous pouvons trouver un indice α_0 tel que pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant m$, nous ayons $\mu_A(g_j) = \mu_\alpha(g_j)$ pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$. Nous posons alors :

$$\mu'(f) = \inf\bigl(\mu_A(g_j) + j\gamma,\ 0 \leqslant j \leqslant m\bigr).$$

L'application μ' ainsi définie est bien une valuation de $K[x]$, à valeurs dans $\widetilde{\Gamma}$, qui vérifie $\mu'(f) \geqslant \mu_\alpha(f)$ pour tout polynôme f de $K[x]$ et pour tout α dans A, et $\mu'(f) = \mu_A(f)$ pour tout f n'appartenant pas à $\widetilde{\Phi}(A)$. Nous la notons :

$$\mu' = \bigl[\bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha\in A}\,;\, \mu'(\phi) = \gamma\bigr].$$

Nous renvoyons à [**Va**] pour les définitions précises et les propriétés des polynômes-clés limites et des valuations augmentées limites.

Nous pouvons maintenant définir une famille admissible, et aussi fixer les notations que nous utiliserons dans la suite.

Définition. — Une *famille admissible $\mathcal{A}$ pour la valuation ν de K* est une famille de valuations $(\mu_i)_{i\in I}$ de $K[x]$, obtenue comme réunion de familles admissibles simples

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{S}^{(j)},$$

où J est un ensemble dénombrable, $J = \{1, \ldots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, et nous définissons J^* par $J^* = \{1, \ldots, N-1\}$ si J est fini et par $J^* = J = \mathbb{N}^*$ sinon. Pour tout j dans J la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}$ est constituée d'une partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ et d'une partie continue $\mathcal{C}^{(j)}$,

$$\mathcal{S}^{(j)} = \bigl(\mathcal{D}^{(j)}; \mathcal{C}^{(j)}\bigr) = \bigl((\mu_l^{(j)})_{l\in L^{(j)}}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\bigr),$$

avec $L^{(j)} = \{1, \ldots, n_j\}$ ou $L^{(j)} = \mathbb{N}^*$ et $A^{(j)}$ ensemble totalement ordonné sans élément maximal, vérifiant :

– pour j appartenant à J^*, la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)} = \bigl(\mu_l^{(j)}\bigr)_{l\in L^{(j)}}$ est finie et la partie continue $\mathcal{C}^{(j)} = \bigl(\mu_\alpha^{(j)}\bigr)_{\alpha\in A^{(j)}}$ est non vide, et la première valuation $\mu_1^{(j+1)}$ de la famille simple $\mathcal{S}^{(j+1)}$ est une valuation augmentée limite pour la famille admissible continue $\mathcal{C}^{(j)}$;

– la première valuation $\mu_1^{(1)}$ de la famille est la valuation associée à un polynôme unitaire $\phi_1^{(1)}$ de degré 1 et à une valeur $\gamma_1^{(1)}$, $\mu_1^{(1)} = [\nu\,;\, \mu_1^{(1)}(\phi_1^{(1)}) = \gamma_1^{(1)}]$.

Dans la suite, comme la valuation ν de K est fixée nous dirons simplement que $\mathcal{A}$ est une famille admissible de valuations de $K[x]$.

Nous pouvons aussi écrire la famille admissible $\mathcal{A}$ comme une famille indexée par un ensemble totalement ordonné I,

$$\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I},$$

et l'ensemble I peut être décrit de la manière suivante : pour tout j dans J, nous munissons l'ensemble $B^{(j)} = L^{(j)} \sqcup A^{(j)}$ de l'ordre total induit par les ordres sur $L^{(j)}$ et sur $A^{(j)}$ et défini par $l < \alpha$ pour tout $l \in L^{(j)}$ et tout $\alpha \in A^{(j)}$; et nous posons

$$I = \big\{(j,b) \mid j \in J \text{ et } b \in B^{(j)}\big\},$$

muni de l'ordre lexicographique, c'est-à-dire $(j,b) < (j',b')$ si $j < j'$ dans J et $(j,b) \leqslant (j,b')$ si et seulement si $b \leqslant b'$ dans $B^{(j)}$.

L'ordre sur l'ensemble I peut être caractérisé par la relation suivante : $i < k$ dans I si et seulement si pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons $\mu_i(f) \leqslant \mu_k(f)$ et il existe au moins un polynôme g avec $\mu_i(g) < \mu_k(g)$.

Nous pouvons remarquer que les ensembles $A^{(j)}$ peuvent être choisis comme sous-ensembles des groupes des ordres des valuations $\mu_{n_j}^{(j)}$, par conséquent nous ne pouvons faire aucune hypothèse sur le cardinal de ces ensembles, ni sur celui de l'ensemble I et de la famille $\mathcal{A}$.

A toute famille admissible $\mathcal{A}$ nous associons la famille des polynômes-clés ou polynômes-clés limites $\big(\phi_i\big)_{i\in I}$, que nous appelons pour simplifier la famille des polynômes-clés, et la famille des valeurs $\big(\gamma_i\big)_{i\in I}$.

Définition. — Une famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ de valuations de $K[x]$ est dite *complète* si l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar\imath$, sinon la famille admissible $\mathcal{A}$ est dite *ouverte*.

Remarque 1.1. — Une famille admissible $\mathcal{A}$ est complète uniquement dans le cas où $\mathcal{A}$ est réunion d'un nombre fini de familles simples et où la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est discrète finie, $\mathcal{S}^{(N)} = \big(\mu_1^{(N)}, \dots, \mu_{n_N}^{(N)}\big)$.

Nous utiliserons aussi de manière essentielle le théorème de factorisation (théorème 1.19 de [**Va**]), pour cela, nous rappelons les notations suivantes.

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille admissible continue, associée à la famille $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de polynômes-clés de degré d, et à la famille $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de valeurs dans $\widetilde{\Gamma}$, et nous supposons que l'ensemble A a un plus petit élément ω, nous pouvons toujours nous ramener à ce cas car nous ne nous intéressons qu'à ce qui se passe pour α suffisamment grand. Nous définissons $+\infty$ tel que $\forall\,\alpha \in A$, $\omega \leqslant \alpha < +\infty$, et $\overline{A} = A \cup \{+\infty\}$, et nous définissons formellement $\phi_{+\infty}$ par $\forall\,\alpha \in A$, $\mu_\alpha(\phi_{+\infty}) = \gamma_\alpha$.

Alors, si nous posons $\gamma_{+\infty} = +\infty$, pour tout α dans A et tout β dans $\overline{A}$, nous avons :

$$\mu_\alpha(\phi_\beta) = \inf(\gamma_\alpha, \gamma_\beta).$$

Nous disons que deux polynômes f et g de $K[x]$ sont A-équivalents, et nous notons $f \underset{A}{\sim} g$, si et seulement si pour tout α dans A, nous avons l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(g)$.

Théorème de factorisation. — *Soit f un polynôme de $K[x]$ de degré n, avec $n<(m+1)d$, $m \geqslant 0$, alors il existe $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ dans $\overline{A}$, avec $\omega \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_m \leqslant +\infty$, et f_0 dans $K[x]$ de degré $\deg f_0 < d$ tels que : $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1}\cdots\phi_{\alpha_m}$.*

Corollaire. — *Soit f un polynôme de $K[x]$ de degré n, $n < (m+1)d$, $m \geqslant 1$, alors :*

- *il existe un entier $s \geqslant 0$,*
- *il existe $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ dans A, avec $\omega = \alpha < 1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s < +\infty$,*
- *il existe des entiers $r_1, \dots, r_s$, avec $m \geqslant r_1 > r_2 > \cdots > r_s \geqslant 0$,*

tels que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant s$, pour tout α avec $\alpha_j \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{j+1}$, nous avons :

$$\mu_\alpha(f) = \mu_{\alpha_j}(f) + r_j\gamma_\alpha.$$

En particulier pour tout polynôme f de $K[x]$, de degré $n < (m+1)d$, il existe α_0 dans A, un élément δ de Γ et un entier t, $0 \leqslant t \leqslant m$ tel que pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$, nous ayons $\mu_\alpha(f) = \delta + t\gamma_\alpha$. Le polynôme f appartient à l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ si et seulement si l'entier t est strictement positif.

Rappelons que si μ est une valuation de l'anneau $K[x]$, nous disons que deux polynômes f et g sont μ-équivalents, et nous notons $f \underset{\mu}{\sim} g$, si f et g ont même image dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$, c'est-à-dire si nous avons $\mu(f-g) > \mu(f) = \mu(g)$. Et de même nous disons qu'un polynôme g est μ-divisible par un polynôme f, et nous notons $f \underset{\mu}{|} g$, s'il existe un polynôme h tel que g soit μ-équivalent à hf.

La proposition suivante permet de savoir à quelles conditions deux polynômes ϕ_1 et ϕ_2 de $K[x]$, qui sont polynômes-clés pour une valuation donnée μ de $K[x]$, définissent la même valuation augmentée pour une valeur γ fixée.

Proposition 1.2. — *Soit μ une valuation de $K[x]$, soient ϕ_1 et ϕ_2 deux polynômes-clés pour la valuation μ et soient $\gamma_1 > \mu(\phi_1)$ et $\gamma_2 > \mu(\phi_2)$ deux valeurs dans un groupe totalement ordonné $\widetilde{\Gamma}$ contenant le groupe des ordres de μ. Alors les valuations augmentées $\mu_1 = [\mu\,;\, \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$ et $\mu_2 = [\mu\,;\, \mu_2(\phi_2) = \gamma_2]$ définies par ces polynômes et ces valeurs sont égales si et seulement si $\gamma_1 = \gamma_2$ et si les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 ont même degré et vérifient $\mu(\phi_2 - \phi_1) \geqslant \gamma_1 = \gamma_2$.*

Dans ce cas les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 sont μ-équivalents.

Démonstration. — Supposons d'abord que les deux valuations augmentées μ_1 et μ_2 soient égales. Comme $\mu_2(\phi_1) = \gamma_1$ est strictement plus grand que $\mu(\phi_1)$, ϕ_1 est μ-divisible par ϕ_2, d'où l'inégalité $\deg\phi_2 \leqslant \deg\phi_1$, et par symétrie nous en déduisons que ϕ_1 et ϕ_2 ont même degré d. Soit $h = \phi_2 - \phi_1$, alors $\deg h < d$, et nous avons

$\mu(h) = \mu_1(h) \geqslant \inf(\gamma_1, \gamma_2)$. De plus, de l'égalité $\phi_2 = \phi_1 + h$, nous déduisons $\gamma_2 = \mu_1(\phi_2) = \inf(\gamma_1, \mu(h))$, d'où l'inégalité $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, et par symétrie l'égalité $\gamma_1 = \gamma_2$. Remarquons de plus que l'inégalité $\mu(h) \geqslant \gamma_1 > \mu(\phi_1)$ entraîne que les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 sont μ-équivalents.

Supposons maintenant que les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 sont de même degré d, soit $h = \phi_2 - \phi_1$, d'où $\deg h < d$, et nous supposons $\mu(h) \geqslant \gamma_1 = \gamma_2$. Soit f un polynôme de $K[x]$ de degré n et soit $m(f) = m = [n/d]$ le degré du développement de f selon les puissances de ϕ_1 (ou de ϕ_2), c'est-à-dire tel que nous ayons l'égalité $f = f_m\phi_1^m + \cdots + f_1\phi_1 + f_0$, avec $\deg f_j < d$ pour tout j, et $f_m \neq 0$. Nous allons montrer par récurrence sur $m(f)$ que pour tout f dans $K[x]$, nous avons $\mu_1(f) = \mu_2(f)$.

Pour $m = 0$, c'est-à-dire pour $\deg f < d$, nous avons $\mu_1(f) = \mu_2(f) = \mu(f)$.

Supposons que nous avons l'égalité $\mu_1(g) = \mu_2(g)$ pour tout polynôme g avec $m(g) < m$ et soit f avec $m(f) = m$. Nous pouvons alors écrire la division euclidienne de f par ϕ_1, $f = p\phi_1 + s$, avec $\deg s < d$ et $m(p) < m$, et nous avons l'égalité $\mu_1(f) = \inf\bigl(\mu_1(p)+\gamma_1, \mu(s)\bigr)$. Nous pouvons aussi écrire $f = p(\phi_2 - h) + s = (p-q)\phi_2 + (s-r)$, où $ph = q\phi_2 + r$ est la division euclidienne de ph par ϕ_2, et nous avons encore $\deg r < d$ et $m(q) < m$, et l'égalité $\mu_2(ph) = \inf\bigl(\mu_2(q) + \gamma_2, \mu(r)\bigr)$.

Nous trouvons alors $\mu(r) \geqslant \mu_2(ph) = \mu_2(p) + \mu(h) \geqslant \mu_1(p) + \gamma_1$, d'où :

$$\mu(s-r) \geqslant \inf\bigl(\mu(r), \mu(s)\bigr) \geqslant \inf\bigl(\mu_1(p) + \gamma_1, \mu(s)\bigr) = \mu_1(f).$$

De même, nous déduisons de $\mu_2(q) + \gamma_2 \geqslant \mu_2(ph) \geqslant \mu_1(p) + \gamma_1$ l'inégalité :

$$\mu_2(p-q) + \gamma_2 \geqslant \inf\bigl(\mu_2(p) + \gamma_2, \mu_2(q) + \gamma_2\bigr) = \mu_1(p) + \gamma_1 \geqslant \mu_1(f).$$

Par conséquent, nous avons :

$$\mu_2(f) = \inf\bigl(\mu_2(p-q) + \gamma_2, \mu(s-r)\bigr) \geqslant \mu_1(f),$$

et par symétrie $\mu_2(f) = \mu_1(f)$. □

Remarque 1.3. — Soit ϕ_1 un polynôme de $K[x]$ qui est un polynôme-clé pour la valuation μ, alors tout polynôme ϕ_2 unitaire, μ-équivalent à ϕ_1 et de même degré que ϕ_1 est encore un polynôme-clé pour μ. Mais les deux valuations augmentées $\mu_1 = [\mu\,;\, \mu_1(\phi_1) = \gamma]$ et $\mu_2 = [\mu\,;\, \mu_2(\phi_2) = \gamma]$ seront égales si et seulement si nous choisissons une valeur γ vérifiant $\mu(\phi_2 - \phi_1) \geqslant \gamma > \mu(\phi_1) = \mu(\phi_2)$.

Nous avons un résultat analogue pour les valuations augmentées limites.

Proposition 1.4. — *Soit $\mathcal{C} = \bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha\in A}$ une famille admissible continue et soient ψ et ψ' deux polynômes-clés limites pour cette famille, alors les polynômes ψ et ψ' sont μ_α-équivalents pour tout α suffisamment grand. De plus les valuations augmentées limites $\mu_1 = \bigl[\bigl(\mu_\alpha\bigr)\,;\, \mu_1(\psi) = \gamma\bigr]$ et $\mu'_1 = \bigl[\bigl(\mu_\alpha\bigr)\,;\, \mu'_1(\psi) = \gamma'\bigr]$ définies respectivement par ψ et ψ' et par les valeurs γ et γ' sont égales si et seulement si $\gamma = \gamma'$ et si les polynômes ψ et ψ' vérifient $\mu_A(\psi' - \psi) \geqslant \gamma > \mu_\alpha(\psi) = \mu_\alpha(\psi')$.*

Démonstration. — Si ψ et ψ' sont deux polynômes-clés limites pour la famille $\mathcal{C}$, nous pouvons écrire $\psi' = \psi + h$ avec $\deg h < \deg \psi = \deg \psi'$, en particulier il existe α_0 tel que $\mu_\alpha(h) = \mu_{\alpha_0}(h)$ pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$. S'il existait $\alpha \geqslant \alpha_0$ avec $\mu_\alpha(h) = \mu_\alpha(\psi) \leqslant \mu_\alpha(\psi')$, alors pour $\beta > \alpha$ nous aurions $\mu_\beta(h) < \mu_\beta(\psi)$ et $\mu_\beta(h) < \mu_\beta(\psi')$, ce qui est impossible. Par conséquent nous avons $\mu_\alpha(h) > \mu_\alpha(\psi) = \mu_\alpha(\psi')$, c'est-à-dire ψ et ψ' sont μ_α-équivalents, pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$.

L'équivalence entre l'égalité entre les valuations $\mu_1 = \big[(\mu_\alpha)\,;\,\mu_1(\psi) = \gamma\big]$ et $\mu'_1 = \big[(\mu_\alpha)\,;\,\mu'_1(\psi) = \gamma'\big]$ et les propriétes portant sur les valeurs γ et γ' et sur les polynômes-clés limites ψ et ψ' se démontre comme pour la proposition 1.2. $\square$

2. Famille admise de valuations

Nous considérons toujours un corps K muni d'une valuation ν et soit L une extension monogène de K, c'est-à-dire $L = K(x)$ extension transcendante pure ou $L = K(\theta) = K[x]/(G)$ extension algébrique. Nous allons rappeler comment nous pouvons associer à toute valuation μ sur L qui prolonge la valuation ν de K, une famille admissible de valuations de $K[x]$.

Nous remarquons que dans le cas d'une extension transcendante $L = K(x)$ toute valuation μ de L est déterminée par sa restriction, encore notée μ, à l'anneau des polynômes $K[x]$, et que dans le cas d'une extension algébrique $L = K[x]/(G)$ toute valuation μ de L est déterminée par une unique pseudo-valuation $\widetilde{\mu}$ de $K[x]$ dont le socle $\mathcal{P}_{+\infty} = \{f \in K[x] \mid \widetilde{\mu}(f) = +\infty\}$ est l'idéal premier (G). Nous sommes ainsi dans les deux cas ramenés à étudier une valuation ou pseudo-valuation μ sur $K[x]$ dont la restriction à K est la valuation ν.

Nous notons Γ_μ le groupe des valeurs de la valuation ou de la pseudo-valuation μ, et $\overline{\Gamma}_\mu$ l'ensemble totalement ordonné défini par $\overline{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu \cup \{+\infty\}$.

Remarquons aussi que la famille admissible de valuations que nous allons définir à partir de la valuation μ de L dépend du générateur x ou θ de L sur K.

Une famille admise $\mathcal{A}$ de valuations de $K[x]$ associée à une valuation ou à une pseudo-valuation μ, est une famille admissible $(\mu_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble totalement ordonné I, où I possède un plus petit élément 1 et éventuellement un plus grand élément $\overline{\imath}$, telle que pour tout i appartenant à I, sauf éventuellement pour le plus grand élément $\overline{\imath}$ de I quand il existe, μ_i est une valuation de $K[x]$, et $\mu_{\overline{\imath}}$ est égale, quand elle existe, à la valuation ou à la pseudo-valuation μ. A cette famille de valuations $(\mu_i)_{i\in I}$ sont associées une famille de polynômes de $K[x]$, $\big(\phi_i\big)_{i\in I}$, et une famille de valeurs dans l'ensemble $\overline{\Gamma}_\mu$, $\big(\gamma_i\big)_{i\in I}$, où seul $\gamma_{\overline{\imath}}$ peut éventuellement prendre la valeur $+\infty$. Nous posons aussi 0 tel que $0 < 1$, c'est-à-dire tel que $0 < i$ pour tout i dans I, et nous notons μ_0 la valuation ν de K, ainsi pour tout polynôme ϕ_1 de degré 1 et pour toute valeur γ_1, nous pouvons définir la valuation $\mu_1 = [\mu_0\,;\,\mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$ sur $K[x]$.

Nous voulons que cette famille $\mathcal{A}$ vérifie les propriétés de « croissance » suivantes :

– *croissance 1* : pour tout f dans $K[x]$, la famille $\big(\mu_i(f)\big)_{i\in I}$ est croissante et majorée par $\mu(f)$, c'est-à-dire $\forall\, i<j$ dans I, $\mu_i(f)\leqslant\mu_j(f)\leqslant\mu(f)$, et s'il existe $i<j$ dans I avec $\mu_i(f)=\mu_j(f)$, alors $\forall\, i'\geqslant i$ nous avons $\mu_i(f)=\mu_{i'}(f)=\mu(f)$.

– *croissance 2* : la famille de polynômes $\big(\phi_i\big)_{i\in I}$ associée est à degrés croissants, c'est-à-dire $\forall\, i<j$ dans I, $\deg\phi_i\leqslant\deg\phi_j$, et de plus pour tout f dans $K[x]$ avec $\deg f<\deg\phi_i$ nous avons $\mu_i(f)=\mu(f)$.

Nous voulons que cette famille converge vers la valuation ou pseudo-valuation μ, c'est-à-dire :

– *convergence* : pour tout f dans $K[x]$ il existe une valuation μ_i de la famille, ou éventuellement une pseudo-valuation pour $i=\overline{\imath}$, telle que $\mu(f)=\mu_i(f)$.

Et enfin nous voulons construire cette famille de valuations par récurrence, c'est-à-dire obtenir chaque valuation μ_i de $\mathcal{A}$ soit comme valuation augmentée associée à une valuation précédente μ_j, avec $j<i$ dans I, soit comme valuation augmentée-limite associée à une famille continue de valuations (μ_α) de $\mathcal{A}$, avec $\alpha<i$ pour tout α.

Rappelons comment nous construisons cette famille (*cf.* [**Va**]).

Supposons que nous avons trouvé la famille jusqu'à l'ordre i, c'est-à-dire que nous avons construit une famille de valuations $\big(\mu_j\big)_{j\in J}$, avec i plus grand élément de J, vérifiant les propriétés de *croissance 1* et de *croissance 2*.

Si la valuation μ_i est égale à la valuation μ donnée, nous avons fini et la famille cherchée est la famille $\big(\mu_j\big)_{j\in J}$.

Sinon, nous considérons l'ensemble non vide suivant :

$$\widetilde{\Phi}_\mu(\mu_i)=\{f\in K[x]\mid \mu_i(f)<\mu(f)\},$$

nous appelons $d(\mu_i)$ le degré minimal d'un élément de $\widetilde{\Phi}_\mu(\mu_i)$, et nous définissons aussi l'ensemble suivant :

$$\Phi_\mu(\mu_i)=\{\phi\in K[x]\mid \mu_i(\phi)<\mu(\phi),\ \deg\phi=d(\mu_i)\text{ et }\phi\text{ unitaire}\}.$$

Dans la suite, chaque fois que la valuation ou pseudo-valuation μ avec laquelle nous comparons la valuation μ_i est donnée de manière claire et qu'il n'y a aucun risque de confusion, nous noterons ces ensembles respectivement $\widetilde{\Phi}(\mu_i)$ et $\Phi(\mu_i)$.

Tout polynôme ϕ appartenant à $\Phi(\mu_i)$ est un polynôme-clé pour la valuation μ_i (*cf.* [**McL1**] Theorem 8.1, [**Va**] Théorème 1.15), et comme $\gamma=\mu(\phi)$ vérifie $\gamma>\mu_i(\phi)$, nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu'=[\mu_i\,;\,\mu'(\phi)=\gamma]$. En ajoutant cette valuation $\mu'=\mu_{i+1}$ à la famille, nous trouvons bien une nouvelle famille de valuations de $K[x]$ qui vérifie encore les propriétés de *croisance 1* et de *croissance 2* et qui est plus proche que la valuation μ_i de la valuation μ. Mais en procédant ainsi nous risquons de trouver beaucoup trop de valuations dans la famille, c'est-à-dire des valuations « inutiles », et surtout nous risquons de ne jamais trouver une famille qui vérifie la propriété de *convergence*. Nous allons donc essayer de voir s'il est possible de choisir un polynôme dans $\Phi(\mu_i)$ qui soit *meilleur* que les autres. Pour cela nous devons considérer le sous-ensemble de $\overline{\Gamma}_\mu$ défini de la manière suivante :

$$\Lambda(\mu_i) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi(\mu_i)\}.$$

Remarque 2.1. — Soit ϕ un polynôme de $\Phi(\mu_i)$ et soit μ' la valuation augmentée définie par ϕ et $\gamma = \mu(\phi)$, $\mu' = [\mu_i\,;\mu'(\phi) = \gamma]$, alors si ψ est un polynôme unitaire de degré $d(\mu_i) = \deg\phi$ vérifiant $\mu(\psi) > \mu'(\psi)$, ψ appartient à $\Phi(\mu_i)$ et vérifie $\mu(\psi) > \mu(\phi) = \gamma$ (*cf.* [**Va**] Proposition 1.16).

Lemme 2.2. — *Soit ϕ un polynôme de $\Phi(\mu_i)$, et nous supposons qu'il existe un polynôme unitaire ψ de $K[x]$ de degré $d(\mu_i)$ vérifiant $\mu(\psi) > \mu(\phi)$. Alors ψ appartient aussi à $\Phi(\mu_i)$, et vérifie $\mu(\psi) > \mu_i(\psi) = \mu_i(\phi)$, et de plus la valeur $\mu(\phi)$ appartient au groupe des valeurs Γ_{μ_i} de la valuation μ_i.*

Démonstration. — Nous pouvons écrire $\psi = \phi + h$ avec $\deg h < \deg\phi = d(\mu_i)$, par conséquent nous avons l'égalité $\mu(\phi) = \mu(h) = \mu_i(h)$ et $\mu(\phi)$ appartient à Γ_{μ_i}.

Nous en déduisons aussi l'inégalité stricte $\mu_i(h) > \mu_i(\phi)$, d'où l'égalité $\mu_i(\psi) = \mu_i(\phi)$, et ψ appartient à $\Phi(\mu_i)$. $\square$

Nous rappelons le résultat suivant qui est une conséquence élémentaire des propriétés des valuations augmentées.

Lemme 2.3. — *Soient μ et μ' deux valuations de $K[x]$ vérifiant $\mu(f) \leqslant \mu'(f)$ pour tout f dans $K[x]$, soient ϕ appartenant à $\Phi_{\mu'}(\mu)$ et μ_1 la valuation augmentée définie par le polynôme-clé ϕ et la valeur $\gamma = \mu'(\phi)$, $\mu_1 = [\mu\,;\mu_1(\phi) = \gamma]$. Alors pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons les équivalences :*

$$\mu(f) < \mu'(f) \Longleftrightarrow \mu(f) < \mu_1(f) \Longleftrightarrow \phi \underset{\mu}{|} f.$$

Corollaire. — *Soient μ, μ' et μ'' trois valuations de $K[x]$ vérifiant $\mu(f) \leqslant \mu'(f)$ et $\mu(f) \leqslant \mu''(f)$ pour tout polynôme f de $K[x]$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\widetilde{\Phi}_{\mu'}(\mu) = \widetilde{\Phi}_{\mu''}(\mu)$,

ii) $\Phi_{\mu'}(\mu) = \Phi_{\mu''}(\mu)$,

iii) $\forall\,\phi' \in \Phi_{\mu'}(\mu) \quad \forall\,\phi'' \in \Phi_{\mu''}(\mu) \quad \phi' \underset{\mu}{\sim} \phi''$,

iv) $\exists\,\phi' \in \Phi_{\mu'}(\mu) \quad \exists\,\phi'' \in \Phi_{\mu''}(\mu)$ *tels que* $\phi' \underset{\mu}{\sim} \phi''$.

Nous pouvons maintenant préciser comment nous construisons la famille admissible $\mathcal{A}$, et ainsi préciser aussi la forme de cette famille.

La famille cherchée $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ est une famille admissible, c'est-à-dire est obtenue comme réunion d'une famille dénombrable de sous-familles admissibles simples, $\mathcal{A} = \bigcup_{j\in J}\mathcal{S}^{(j)}$, avec $J = \{1,\dots,N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$. Chaque famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}$, sauf éventuellement la dernière si l'ensemble J est fini, est réunion d'une partie discrète finie et d'une partie continue, c'est-à-dire nous pouvons écrire $\mathcal{S}^{(j)} =$

$\big(\mu_1^{(j)},\dots,\mu_{n_j}^{(j)};(\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\big)=\big((\mu_l^{(j)})_{l\in L^{(j)}};(\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\big)$, où $L^{(j)}=\{1,\dots,n_j\}$. La dernière famille $\mathcal{S}^{(N)}$, quand elle existe, est soit de la forme précédente, soit discrète de la forme $\mathcal{S}^{(N)}=\big(\mu_l^{(N)}\big)_{l\in L^{(N)}}$, avec $L^{(N)}$ fini ou infini.

Définissons d'abord la première famille admissible simple $\mathcal{S}^{(1)}=\mathcal{S}$, sa partie discrète est construite par récurrence de la manière suivante. (Pour alléger les notations, nous allons écrire dans la suite μ_i, ϕ_i et γ_i à la place respectivement de $\mu_i^{(1)}$, $\phi_i^{(1)}$ et $\gamma_i^{(1)}$).

Supposons que nous avons défini la valuation μ_i comme valuation augmentée $\mu_i=[\mu_{i-1}\,;\,\mu_i(\phi_i)=\gamma_i]$, et que nous avons l'égalité $\mu_i(f)=\mu(f)$ pour tout polynôme f de $K[x]$ avec $\deg f\leqslant\deg\phi_i$. Nous considérons le sous-ensemble $\Lambda(\mu_i)$ de Γ_μ défini précédemment, et nous avons deux cas à considérer.

Si l'ensemble $\Lambda(\mu_i)$ a un plus grand élément γ_{i+1}, nous choisissons ϕ_{i+1} dans $\Phi(\mu_i)$ avec $\mu(\phi_{i+1})=\gamma_{i+1}$, et nous construisons la valuation augmentée μ_{i+1} par

$$\mu_{i+1}=[\mu_i\,;\,\mu_{i+1}(\phi_{i+1})=\gamma_{i+1}].$$

Alors nous avons trouvé une nouvelle valuation de la famille discrète et le polynôme-clé ϕ_{i+1} vérifie $\deg\phi_{i+1}=d(\mu_i)>\deg\phi_i=d(\mu_{i-1})$. Il reste à vérifier que pour tout polynôme f de $K[x]$ avec $\deg f\leqslant\deg\phi_{i+1}$, nous avons $\mu_{i+1}(f)=\mu(f)$, c'est évident pour f de degré $d<\deg\phi_{i+1}=d(\mu_i)$ et pour f de degré $d=\deg\phi_{i+1}$ c'est une conséquence du choix de γ_{i+1} et de la remarque 2.1. Remarquons enfin que le polynôme ϕ_{i+1} ainsi obtenu vérifie par construction $\deg\phi_{i+1}=d(\mu_i)$ et que nous avons $d(\mu_i)<d(\mu_{i+1})$.

Si l'ensemble $\Lambda(\mu_i)$ n'a pas de plus grand élément, alors nous choisissons un élément ϕ_{i+1} de $\Phi(\mu_i)$ et nous définissons encore la valuation augmentée μ_{i+1} par $\mu_{i+1}=[\mu_i\,;\,\mu_{i+1}(\phi_{i+1})=\gamma_{i+1}]$, où $\gamma_{i+1}=\mu(\phi_{i+1})$, et nous avons encore $\deg\phi_{i+1}>\deg\phi_i$. La valuation μ_{i+1} est alors la dernière valuation de la partie discrète de la famille $\mathcal{S}^{(1)}$.

Pour commencer la récurrence, nous considérons la valuation μ'_1 définie par $\mu'_1(f)=\inf(\nu(a_j)+j\gamma'_1,0\leqslant j\leqslant m)$ pour tout polynôme $f=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ dans $K[x]$, c'est-à-dire la valuation notée $\mu'_1=[\mu_0\,;\,\mu'_1(\phi'_1)=\gamma'_1]$, avec $\mu_0=\nu$, $\phi'_1=x$ et $\gamma'_1=\mu(\phi'_1)$.

Nous définissons comme précédemment l'entier $d(\mu'_1)$, et si nous avons $d(\mu'_1)>1$, alors nous posons $\phi_1=\phi'_1=x$, $\gamma_1=\gamma'_1=\mu(x)$ et la première valuation μ_1 de la famille admissible $\mathcal{S}^{(1)}$ est la valuation

$$\mu_1=[\mu_0\,;\,\mu_1(\phi_1)=\gamma_1].$$

Si nous avons l'égalité $d(\mu'_1)=1$, alors il faut considérer l'ensemble $\Lambda(\mu'_1)$, si cet ensemble a un plus grand élément γ_1, nous choisissons ϕ_1 dans $\Phi(\mu'_1)$ vérifiant $\mu(\phi_1)=\gamma_1$. Nous avons alors ϕ_1 qui vérifie $\deg\phi_1=1$, et la valuation augmentée $\mu_1=[\mu'_1\,;\,\mu_1(\phi_1)=\gamma_1]$, qui est aussi égale à la valuation $[\mu_0\,;\,\mu_1(\phi_1)=\gamma_1]$, est la première valuation de la famille admissible $\mathcal{S}^{(1)}$. De plus, comme précédemment, nous vérifions que nous avons $d(\mu_1) > 1$.

Si nous avons $d(\mu'_1) = 1$ et si l'ensemble $\Lambda(\mu'_1)$ n'a pas de plus grand élément, alors nous posons encore $\phi_1 = \phi'_1 = x$, $\gamma_1 = \gamma'_1 = \mu(x)$ et la partie discrète de la famille admissible $\mathcal{S}^{(1)}$ ne contient que la valuation $\mu_1 = [\mu_0\,;\, \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$.

Remarque 2.4. — Nous cherchons le plus grand élément γ_{i+1} de $\Lambda(\mu_i)$ dans $\overline{\Gamma}_\mu$. Si ce plus grand élément est égal à $+\infty$, alors nous sommes dans le cas d'une pseudo-valuation μ et le polynôme unitaire ϕ_{i+1} de plus bas degré vérifiant $\mu(\phi_{i+1}) = +\infty$ est le générateur unitaire G du socle $\mathcal{P}_{+\infty}$, c'est-à-dire le polynôme irréductible unitaire tel que l'extension algébrique L soit égale à $K[x]/(G)$, et la pseudo-valuation μ est la pseudo-valuation $\mu_{i+1} = [\mu_i\,;\, \mu_{i+1}(G) = +\infty]$.

Nous avons ainsi obtenu une famille admissible discrète finie $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de valuations augmentées, avec $n \geqslant 1$, associée à la famille de polynômes-clés $\big(\phi_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$, vérifiant $1 = \deg \phi_1 < \deg \phi_2 < \cdots < \deg \phi_n$. Il y a alors trois cas à considérer.

Soit nous pouvons continuer la même construction indéfiniment, c'est-à-dire que pour tout entier i, l'ensemble $\Lambda(\mu_i)$ possède un plus grand élément dans l'ensemble $\overline{\Gamma}_\mu$. Nous construisons ainsi une suite infinie de valuations augmentées, c'est-à-dire que la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(1)}$ est une famille discrète infinie, $\mathcal{S}^{(1)} = \big(\mu_i\big)_{i\in L^{(1)}}$ avec $L^{(1)} = \mathbb{N}^*$. Comme la suite $\big(\deg \phi_i\big)_{i\in L^{(1)}}$ est strictement croissante, pour tout polynôme f de $K[x]$ il existe un indice i tel que $\mu_i(f) = \mu(f)$, et la famille admise cherchée $\mathcal{A}$ est égale à $\mathcal{S}^{(1)}$. Dans ce cas pour tout i, γ_i appartient au groupe des valeurs Γ_μ, et μ est une valuation.

Soit il existe un entier n tel que l'ensemble $\widetilde{\Phi}(\mu_n)$ soit vide, c'est-à-dire tel que la valuation μ_n soit égale à la valuation ou à la pseudo-valuation μ. Dans ce cas la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(1)}$ est discrète finie, $\mathcal{S}^{(1)} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ et la famille admise cherchée $\mathcal{A}$ est encore égale à $\mathcal{S}^{(1)}$.

Soit il existe un entier n tel que l'ensemble $\Lambda(\mu_{n-1})$ n'a pas de plus grand élément, c'est le cas que nous allons étudier maintenant.

Choisissons comme précédemment un élément quelconque ϕ_n de $\Phi(\mu_{n-1})$, avec $\mu(\phi_n) = \gamma_n$, et nous considérons le sous-ensemble Λ' de $\Lambda(\mu_{n-1})$ défini par

$$\Lambda' = \big\{\gamma \in \overline{\Gamma}_\mu \mid \gamma = \mu(\phi) \text{ avec } \phi \in \Phi(\mu_{n-1}) \text{ et } \gamma > \gamma_n\big\}.$$

Nous indexons l'ensemble Λ' par un ensemble totalement ordonné $A^{(1)}$, c'est-à-dire nous posons $\Lambda' = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A^{(1)}\}$, avec $\alpha < \beta$ si et seulement si $\gamma_\alpha < \gamma_\beta$, et pour tout α dans $A^{(1)}$, nous choisissons un polynôme ϕ_α dans $\Phi(\mu_{n-1})$ tel que $\mu(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha$. Nous définissons la valuation augmentée μ_α par

$$\mu_\alpha = [\mu_n\,;\, \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha].$$

Nous pouvons aussi remarquer que pour tout $\beta < \alpha$, ϕ_α est un polynôme-clé pour la valuation μ_β et nous avons encore $\mu_\alpha = [\mu_\beta\,;\, \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$ (*cf.* [**Va**] paragraphe

1.3). La partie continue de la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(1)}$ est alors la famille des valuations $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A^{(1)}}$.

De manière similaire à ce que nous venons de faire, nous considérons le sous-ensemble $\widetilde{\Phi}(A^{(1)})$ de $K[x]$ défini par :

$$\widetilde{\Phi}(A^{(1)}) = \big\{f\in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu(f)\ \forall\, \alpha\in A^{(1)}\big\}.$$

Remarque 2.5. — Cet ensemble dépend en fait uniquement de la famille continue $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A^{(1)}}$ (*cf.* [**Va**] Proposition 1.23) et peut être aussi défini par :

$$\widetilde{\Phi}(A^{(1)}) = \big\{f\in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)\ \forall\, \alpha<\beta\in A^{(1)}\big\}.$$

Si cet ensemble $\widetilde{\Phi}(A^{(1)})$ est vide, alors la famille admise cherchée $\mathcal{A}$ est la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(1)} = \big(\mu_1,\dots,\mu_n;(\mu_\alpha)_{\alpha\in A^{(1)}}\big)$, en effet pour tout polynôme f de $K[x]$, il existe une valuation μ_i de la famille $\mathcal{S}^{(1)}$ telle que $\mu_i(f)=\mu(f)$, en particulier nous voyons que cela ne peut arriver que dans le cas où μ est une valuation, et la valuation μ est notée $\mu_{A^{(1)}}$.

Si la famille admissible simple $\mathcal{S}=\mathcal{S}^{(1)}$ ne détermine pas le prolongement μ, c'est-à-dire si l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A^{(1)})$ est non vide, nous allons construire une deuxième famille admissible simple $\mathcal{S}^{(2)}$.

Soit $d^{(2)} = d(A^{(1)})$ le degré minimal d'un polynôme de $\widetilde{\Phi}(A^{(1)})$ et comme précédemment nous définissons un nouveau sous-ensemble $\Phi(A^{(1)})$ de $K[x]$ par :

$$\Phi(A^{(1)}) = \big\{\phi\in K[x] \mid \mu_\alpha(\phi) < \mu_\beta(\phi)\ \forall\, \alpha<\beta\in A^{(1)}, \deg\phi = d^{(2)} \text{ et } \phi \text{ unitaire}\big\}.$$

Tout polynôme ϕ appartenant à $\Phi(A)$ est un polynôme-clé limite pour la famille continue admissible $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A^{(1)}}$ et vérifie $\mu_\alpha(\phi) < \mu(\phi) = \gamma$ pour tout α, nous pouvons alors définir la valuation augmentée limite $\mu' = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A^{(1)}}\,;\, \mu'(\phi)=\gamma\big]$.

Nous définissons encore le sous-ensemble $\Lambda(A^{(1)})$ de $\overline{\Gamma}_\mu$ par

$$\Lambda(A^{(1)}) = \big\{\mu(\phi) \mid \phi\in\Phi(A^{(1)})\big\},$$

et comme précédemment nous devons différencier les cas suivant si $\Lambda(A^{(1)})$ a ou n'a pas de plus grand élément dans $\overline{\Gamma}_\mu$.

Si $\Lambda(A^{(1)})$ a un plus grand élément $\gamma_1^{(2)}$, nous choisissons un polynôme $\phi_1^{(2)}$ dans $\Phi(A^{(1)})$ avec $\mu(\phi_1^{(2)}) = \gamma_1^{(2)}$, et la première valuation $\mu_1^{(2)}$ de la partie discrète de la famille simple $\mathcal{S}^{(2)}$ est la valuation augmentée limite

$$\mu_1^{(2)} = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A^{(1)}}\,;\, \mu_1^{(2)}(\phi_1^{(2)}) = \gamma_1^{(2)}\big].$$

Nous pouvons avoir $\gamma_1^{(2)} = +\infty$, dans ce cas μ est une pseudo-valuation et nous choisissons $\phi_1^{(2)} = G$, où G est le générateur unitaire du socle $\mathcal{P}_{+\infty}$ de μ, et la valuation augmentée limite $\mu_1^{(2)}$ est une pseudo-valuation égale à μ. La famille admissible cherchée $\mathcal{A}$ est obtenue comme réunion de la famille simple $\mathcal{S}^{(1)}$ et de la famille simple $\mathcal{S}^{(2)}$ constituée de l'unique pseudo-valuation $\mu_1^{(2)}$.

Si nous avons $\gamma_1^{(2)} < +\infty$, alors nous pouvons procéder comme pour la famille simple $\mathcal{S}^{(1)}$, en particulier la partie discrète de la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(2)}$ contient au moins une autre valuation, et la famille simple $\mathcal{S}^{(2)}$ est constituée de cette partie discrète et éventuellement d'une partie continue $\big(\mu_\alpha^{(2)}\big)_{\alpha\in A^{(2)}}$.

Si $\Lambda(A^{(1)})$ n'a pas de plus grand élément, nous choisissons une valeur quelconque $\gamma_1^{(2)}$ dans $\Lambda(A^{(1)})$ et un polynôme $\phi_1^{(2)}$ de $\Phi(A^{(1)})$ avec $\mu(\phi_1^{(2)}) = \gamma_1^{(2)}$, et comme précédemment nous définissons la première valuation $\mu_1^{(2)}$ de la partie discrète de $\mathcal{S}^{(2)}$ comme la valuation augmentée limite

$$\mu_1^{(2)} = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A^{(1)}}\,;\, \mu_1^{(2)}(\phi_1^{(2)}) = \gamma_1^{(2)}\big].$$

Alors la partie discrète de $\mathcal{S}^{(2)}$ est réduite à la seule valuation $\mu_1^{(2)}$ et dans ce cas la famille simple $\mathcal{S}^{(2)}$ comprend aussi une partie continue $\big(\mu_\alpha^{(2)}\big)_{\alpha\in A^{(2)}}$ définie à partir des valuations associées aux valeurs γ_α dans $\Lambda(A^{(1)})$ avec $\gamma_\alpha > \gamma_1^{(2)}$ et aux polynômes ϕ_α de $\Phi(A^{(1)})$ vérifiant $\mu(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha$.

Nous construisons par récurrence une famille admissible de valuations constituée par la réunion de t familles admissibles simples $\mathcal{A}' = \mathcal{S}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{S}^{(t)}$, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant t-1$, la famille $\mathcal{S}^{(j)}$ est de la forme $\big((\mu_l^{(j)})_{l\in L^{(j)}}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\big)$, avec $L^{(j)}$ fini, et les polynômes-clés ou polynômes-clés limites associées vérifient :

$$(*)\qquad \begin{aligned} 1 = \deg \phi_1^{(1)} < \cdots < \deg \phi_{n_1}^{(1)} = \deg \phi_\alpha^{(1)} < \deg \phi_1^{(2)} < \cdots \\ \cdots < \deg \phi_{n_{t-1}}^{(t-1)} = \deg \phi_\alpha^{(t-1)} < \deg \phi_1^{(t)} < \cdots \end{aligned}$$

Le processus s'arrête si la famille simple $\mathcal{S}^{(t)}$ est une famille discrète infinie, c'est-à-dire $\mathcal{S}^{(t)} = \big(\mu_l^{(t)}\big)_{l\in L^{(t)}}$ avec $L^{(t)}$ infini, ou si la famille simple $\mathcal{S}^{(t)}$ est une famille discrète finie, $\mathcal{S}^{(t)} = \big(\mu_1^{(t)}, \ldots, \mu_{n_t}^{(t)}\big)$, dont le dernier élément $\mu_{n_t}^{(t)}$ est égal à la valuation ou à la pseudo valuation μ, ou enfin si la famille simple $\mathcal{S}^{(t)}$ est une famille discrète infinie, $\mathcal{S}^{(t)} = \big((\mu_l^{(t)})_{l\in L^{(t)}}; (\mu_\alpha^{(t)})_{\alpha\in A^{(t)}}\big)$, telle que pour tout f dans $K[x]$ il existe α dans $A^{(t)}$ avec $\mu_\alpha^{(t)}(f) = \mu(f)$, c'est-à-dire si $\mu = \mu_{A^{(t)}}$.

Sinon, nous pouvons trouver un polynôme-clé limite pour la famille $\big(\mu_\alpha^{(t)}\big)_{\alpha\in A^{(t)}}$, et définir une nouvelle famille simple $\mathcal{S}^{(t+1)}$.

La famille admissible cherchée $\mathcal{A}$ est ainsi obtenue, soit comme réunion d'un nombre fini de familles simples si le processus s'arrête pour un entier N, soit comme réunion infinie de familles simples, et dans ce cas nous déduisons des inégalités $(*)$ sur les degrés des polynômes-clés que pour tout polynôme f de $K[x]$ il existe une valuation $\mu_l^{(j)}$ de la famille $\mathcal{A}$ telle que $\mu_l^{(j)}(f) = \mu(f)$.

Définition. — Nous appelons la famille admissible $\mathcal{A}$ ainsi obtenue *la famille admise* associée à la valuation ou à la pseudo-valuation μ, et nous la notons $\mathcal{A}(\mu)$.

Remarque 2.6. — La valuation ou la pseudo-valuation μ appartient à la famille $\mathcal{A}(\mu) = (\mu_i)_{i\in I}$ si la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ est complète, dans ce cas nous avons $\mu = \mu_{\overline{\imath}}$ où $\overline{\imath}$ est le plus grand élément de I.

C'est le cas si la famille $\mathcal{A}(\mu)$ est réunion d'un nombre fini de familles simples avec la dernière famille $\mathcal{S}^{(N)}$ discrète finie, en particulier si μ est une pseudo-valuation.

Remarque 2.7. — Nous pouvons préciser la condition de *croissance 2*.

Soit $\mathcal{S}^{(j)} = \big(\mu_1^{(j)}, \dots, \mu_{n_j}^{(j)}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\big)$ une famille admissible simple, avec la famille de polynômes-clés associée $\big(\phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{n_j}^{(j)}; (\phi_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\big)$, alors :

– pour $1 \leqslant l \leqslant n_j - 1$, pour tout polynôme f de $K[x]$ avec $\deg f \leqslant \deg \phi_l^{(j)}$, nous avons l'égalité $\mu_l^{(j)}(f) = \mu(f)$,

– pour $b = n_j$ ou $b = \alpha \in A^{(j)}$, il existe un polynôme (unitaire) ϕ dans $K[x]$ de degré $d = \deg \phi_{n_j}^{(j)} = \deg \phi_\alpha^{(j)}$, avec l'inégalité stricte $\mu_b^{(j)}(\phi) < \mu(\phi)$.

Nous avons construit une famille admissible $\mathcal{A}$ à partir de la valuation ou pseudo-valuation μ, mais cette famille n'est pas vraiment unique. Pour pouvoir comparer les différentes familles que nous pouvons obtenir, nous avons besoin des définitions suivantes.

Définition. — Soit A un ensemble totalement ordonné sans élément maximal, alors une partie $B \subset A$ est dite *cofinale* dans A si elle vérifie :

$$\forall\, \alpha \in A\ \exists\, \beta \in B \quad \text{tel que} \quad \alpha \leqslant \beta.$$

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ un famille admissible continue de valuations de $K[x]$ et soit B une partie cofinale de A, alors la famille continue $\mathcal{B} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in B}$ obtenue par restriction est apelée une *sous-famille cofinale* de $\mathcal{C}$.

Remarque 2.8. — Si nous supposons que la famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est exhaustive, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs $\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est un intervalle du groupe des valeurs Γ, alors pour que la sous-famille cofinale $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in B}$ soit elle aussi exhaustive il faut que B soit un intervalle cofinal de A, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall\, \beta \in B,\ \forall\, \alpha \in A, \quad \alpha \geqslant \beta \Longrightarrow \alpha \in B.$$

Nous définissons alors une relation d'équivalence entre deux familles admissibles simples continues de valuations de $K[x]$ de la manière suivante.

Définition. — Soient $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ et $\mathcal{C}' = \big(\mu'_{\alpha'}\big)_{\alpha'\in A'}$ deux familles admissibles simples continues de valuations de $K[x]$, nous disons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont *asymptotiquement équivalentes* ou *coïncident asymptotiquement* s'il existe deux sous-familles cofinales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ qui sont isomorphes.

C'est équivalent à dire qu'il existe des parties cofinales B et B' repectivement dans A et A', et un isomorphisme d'ensembles ordonnés φ de B dans B' tel que pour tout β dans B les valuations μ_β et $\mu'_{\varphi(\beta)}$ soient égales.

Nous pouvons définir maintenant des relations d'équivalences pour les familles admissibles simples, puis pour les familles admissibles de valuations de $K[x]$.

Définition. — Deux familles admissibles simples $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de valuations de $K[x]$, constituées respectivement des sous-familles discrètes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et des sous-familles continues $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, sont dites *équivalentes* dans les cas suivants :

– si les sous-familles continues sont vides, c'est en particulier le cas si les sous-familles discrètes sont infinies, quand $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$;

– si les sous-familles continues sont non vides, quand les familles discrètes $\mathcal{D} = (\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathcal{D}' = \big(\mu'_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n'}$ coïncident jusqu'à l'avant-dernière valuation, c'est-à-dire quand $n = n'$ et $\mu_i = \mu'_i$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, et quand les sous-familles continues $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ coïncident asymptotiquement.

Définition. — Deux familles admissibles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ de valuations de $K[x]$, respectivement réunion des familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(j)}$, $j \in J$, et $\mathcal{S}'^{(j)}$, $j \in J'$, sont *équivalentes* si $J = J'$ et si pour tout $j \in J$ les familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{S}'^{(j)}$ sont équivalentes.

Proposition 2.9. — *Soit μ un prolongement de la valuation ν de K à une extension monogène L de K, alors si $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ sont deux familles admises associées à μ, les familles admissibles $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ sont équivalentes.*

Démonstration. — Nous pouvons remarquer que la valuation augmentée μ_{i+1} définie à partir de la valuation μ_i dépend essentiellement de la valeur γ_{i+1}, et non du polynôme-clé ϕ_{i+1}. Plus précisément, si ϕ'_{i+1} et ϕ''_{i+1} sont deux polynômes appartenant à $\Phi(\mu_i)$ vérifiant l'égalité $\mu(\phi'_{i+1}) = \mu(\phi''_{i+1}) = \gamma$, nous avons l'inégalité

$$\mu_i(\phi''_{i+1} - \phi'_{i+1}) = \mu(\phi''_{i+1} - \phi'_{i+1}) \geqslant \inf\big(\mu(\phi'_{i+1}), \mu(\phi''_{i+1})\big) = \gamma.$$

Nous déduisons alors de la proposition 1.2 que les valuations augmentées $\mu'_{i+1} = [\mu_i\,; \mu'_{i+1}(\phi'_{i+1}) = \gamma]$ et $\mu''_{i+1} = [\mu_i\,; \mu''_{i+1}(\phi''_{i+1}) = \gamma]$ sont égales.

Supposons que nous avons deux sous-familles admissibles simples $\mathcal{S}'^{(j)}$ et $\mathcal{S}''^{(j)}$ respectivement de $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ dont les premières valuations $\mu'^{(j)}_1$ et $\mu''^{(j)}_1$ sont égales. Alors nous déduisons par récurrence de ce qui précède que les sous-familles discrètes $\mathcal{D}'^{(j)} = \big(\mu'^{(j)}_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathcal{D}''^{(j)} = \big(\mu''^{(j)}_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ coïncident jusqu'à l'avant-dernière valuation. Supposons que les polynômes-clés $\phi'^{(j)}_n$ et $\phi''^{(j)}_n$ que nous avons choisis vérifient $\mu(\phi'^{(j)}_n) = \gamma'^{(j)}_n \leqslant \gamma''^{(j)}_n = \mu(\phi''^{(j)}_n)$, alors l'ensemble $\Lambda(\mu''^{(j)}_n) = \{\gamma''_\alpha \mid \alpha \in A''\}$ est inclus dans l'ensemble $\Lambda(\mu'^{(j)}_n) = \{\gamma'_\alpha \mid \alpha \in A'\}$, et nous pouvons considérer l'ensemble A'' comme le sous-ensemble de A' formé des indices α avec $\alpha > \alpha_0$ où α_0 est défini par $\gamma'_{\alpha_0} = \gamma''^{(j)}_n$, et nous avons $\gamma'_\alpha = \gamma''_\alpha$ pour tout α dans A''. Les valuations $\mu'^{(j)}_\alpha$ et $\mu''^{(j)}_\alpha$ sont encore égales pour α dans A'', par conséquent la famille continue $\mathcal{C}''^{(j)}$ est une sous-famille cofinale de la famille continue $\mathcal{C}'^{(j)}$, et les deux sous-familles continues $\mathcal{C}'^{(j)}$ et $\mathcal{C}''^{(j)}$ coïncident asymptotiquement. Nous en déduisons que les familles admissibles simples $\mathcal{S}'^{(j)}$ et $\mathcal{S}''^{(j)}$ sont équivalentes.

Il reste à vérifier que si les sous-familles admissibles simples $\mathcal{S}'^{(j)}$ et $\mathcal{S}''^{(j)}$ sont équivalentes, les deux premières valuations ${\mu'}_1^{(j+1)}$ et ${\mu''}_1^{(j+1)}$ des sous-familles $\mathcal{S}'^{(j+1)}$ et $\mathcal{S}''^{(j+1)}$ sont égales. Par construction les valuations ${\mu'}_1^{(j+1)}$ et ${\mu''}_1^{(j+1)}$ sont des valuations augmentées limites associées à des familles continues $\mathcal{C}'^{(j)}$ et $\mathcal{C}''^{(j)}$ qui coïncident asymptotiquement, par conséquent leur égalité est une conséquence de la proposition 1.4 et du fait que pour définir la valuation augmentée limite associée à une famille continue $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ il suffit de considérer les valuations μ_α pour α aussi grand que l'on veut. $\square$

Remarque 2.10. — Le choix de γ_i comme élément maximal de l'ensemble $\Lambda(\mu_{i-1})$, quand cet élément existe, c'est-à-dire dans la partie discrète de la famille simple, nous impose de manière unique la valuation μ_i à partir de la valuation précédente μ_{i-1}. Si nous avions fait un autre choix nous aurions fait apparaître des valuations augmentées supplémentaires, qui ne sont pas nécessaires (*cf.* [**McL1**] Lemma 15.1, [**Va**] Corollaire à la Proposition 1.8).

Par contre nous ne pouvons pas choisir de manière unique la dernière valuation de la partie discrète, que nous pouvons considérer aussi comme la première valuation de la partie continue, mais cela n'a aucune importance car c'est ce qui se passe « à l'infini » qui est important. De même, dans la construction que nous avons faite, nous avons toujours choisi des familles simples dont la partie continue est exhaustive, mais cela n'est pas nécessaire pour définir la valuation augmentée limite, et ainsi déterminer la famille admise. Mais si nous voulons avoir une version agréable du théorème de factorisation nous avons besoin de supposer que la partie continue est exhaustive.

Par conséquent, même si nous ne pouvons pas parler en général de la famille admise associée à une valuation ou pseudo-valuation μ, c'est uniquement possible quand la famille admise est réduite à une famille admissible simple discrète, nous pouvons définir de manière unique une classe d'équivalence de familles admissibles. Par abus de terminologie, nous continuerons quand même, quand cela ne présentera aucun risque de confusion, de parler de *la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée à μ*. De même nous continuerons à parler de *la famille des polynômes-clés* $\left(\phi_i\right)_{i\in I}$ et de *la famille des valeurs* $\left(\gamma_i\right)_{i\in I}$ associées à la famille admise $\mathcal{A}(\mu)=(\mu_i)_{i\in I}$.

En particulier si nous définissons des propriétés ou associons des invariants à une famille admissible $\mathcal{A}$ qui ne dépendent que de la classe d'équivalence de la famille, nous pourrons définir ces propriétés ou ces invariants pour la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$. Nous pourrons alors définir ces propriétés ou ces invariants pour la valuation ou pseudo-valuation μ sur $K[x]$, mais il se peut que ces propriétés ou ces invariants dépendent du générateur x choisi et ne soient pas liés intrinsèquement au prolongement de ν à l'extension L de K.

Parmi ces propriétés nous avons déjà vu la propriété d'être *complète* ou *ouverte* pour la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$. En effet cette propriété ne dépend que de la classe d'équivalence de la famille admissible.

Soit $\mathcal{A}$ une famille admissible de valuations de $K[x]$, et nous supposons que nous pouvons l'écrire comme réunion des familles simples $\mathcal{S}^{(j)}$,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{S}^{(j)},$$

où chaque famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ est elle-même de la forme

$$\mathcal{S}^{(j)} = \big((\mu_l^{(j)})_{l \in L^{(j)}}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha \in A^{(j)}}\big).$$

Nous pouvons alors définir les nombres suivants.

Définition. — L'ordre $N = \mathrm{ord}\mathcal{A}$ de la famille $\mathcal{A}$ est le nombre de familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(j)}$ composant la famille $\mathcal{A}$.

Le degré $d = \deg \mathcal{A}$ de la famille $\mathcal{A}$ est le degré maximal d'un polynôme ϕ_i appartenant à la famille des polynômes-clés associée à $\mathcal{A}$.

La longueur $\lambda = \lg \mathcal{A}$ de la famille $\mathcal{A}$ est la réunion des longueurs des parties discrètes des familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(j)}$.

Les nombres N, d et λ appartiennent tous à $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. L'ordre N est égal au cardinal de l'ensemble J si celui-ci est fini ; le degré d et la longueur λ sont finis si et seulement si la famille $\mathcal{A}$ est d'ordre fini N et si la dernière famille admissible simple $\mathcal{S}^{(N)}$ n'est pas discrète infine, dans ce cas le degré est égal à $\deg \phi_{n_N}^{(N)}$, le degré du dernier polynôme de la partie discrète de $\mathcal{S}^{(N)}$, et la longueur est égale à $n_1 + \cdots + n_N$, où n_j est la longueur de la partie discrète de $\mathcal{S}^{(j)}$.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux familles admissibles équivalentes, elles ont même ordre N, même degré d et même longueur λ. Par conséquent nous pouvons parler de l'ordre, du degré et de la longueur de la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée à une valuation μ.

Nous pouvons définir ainsi l'*ordre*, le *degré* et la *longueur* de la valuation ou pseudo-valuation μ, ces nombres ne dépendent pas uniquement de la valuation μ sur l'extension L de K, mais aussi du générateur x choisi.

L'ordre N mesure d'une certaine manière la complexité de la famille admise associée à une valuation μ, c'est-à-dire le nombre de fois où nous ne pouvons pas nous contenter de faire une récurrence simple pour construire la famille $\mathcal{A}(\mu)$, et où il est nécessaire d'introduire des valuations augmentées limites. En particulier dans le cas des valuations discrètes de rang un, ce qui était le cas étudié originellement par MacLane (*cf.* [**McL1**] et [**McL2**]), nous pouvons nous passer de cette dernière notion. Plus précisément nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.11. — *Si la valuation ν de K est discrète de rang un, alors la famille admise associée à tout prolongement μ de ν à l'extension L de K est d'ordre $N \leqslant 2$.*

Si L est l'extension transcendante $L = K(x)$, l'ordre est toujours égal à 1, et la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ est une famille admissible simple.

Si L est une extension algébrique, c'est-à-dire dans le cas où μ est une pseudo-valuation de $K[x]$, l'ordre peut éventuellement prendre la valeur 2, dans ce cas la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ est de la forme $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{S}^{(1)} \cup \mathcal{S}^{(2)}$ et la deuxième famille simple est réduite à un seul terme, $\mathcal{S}^{(2)} = \{\mu_1^{(2)}\}$ avec $\mu_1^{(2)} = \mu$.

Démonstration. — Nous construisons la partie discrète de la première famille simple $\mathcal{S}^{(1)} = \big(\mu_1, \ldots, \mu_i\big)$ par récurrence, et nous remarquons d'abord que si la valeur γ_i n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, alors le processus de construction ne peut continuer et nous avons $\mu = \mu_i$.

Supposons que nous avons $\mu_i \neq \mu$, alors γ_i appartient à $\Gamma_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, par conséquent le groupe des ordres Γ_{μ_i} est discret de rang un. Nous considérons l'ensemble $\Lambda(\mu_i)$, s'il possède un plus grand élément nous pouvons continuer le processus de récurrence qui nous donne une famille admissible discrète. Supposons que cet ensemble n'a pas de plus grand élément, alors nous déduisons du lemme 2.2 que c'est un sous-ensemble de l'ensemble discret Γ_{μ_i}, par conséquent qu'il n'est pas borné. Nous choisissons une suite infinie strictement croissante $\big(\gamma_l\big)_{l \geqslant i+1}$ dans $\Lambda(\mu_i)$, et pour tout $l \geqslant i+1$ nous choisissons un polynôme ϕ_l dans $\Phi(\mu_i)$ vérifiant $\mu(\phi_l) = \gamma_l$ et nous construisons la valuation augmentée $\mu_l = [\mu_i\,;\, \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$. Alors pour tout polynôme f de $K[x]$, la suite $\mu_l(f)$est une suite croissante dans Γ_{μ_i}. Si μ est une valuation, cette suite devient stationnaire à un certain cran, par conséquent la famille de valuation $\big(\mu_j\big)_{j \geqslant 1}$ est la famille admise associée à la valuation μ.

Si μ est une pseudo-valuation, un polynôme f vérifie $\mu_l(f) < \mu(f)$ si et seulement si $\mu(f) = +\infty$, par conséquent le polynôme unitaire G qui engendre le socle de la pseudo-valuation est le polynôme-clé limite de la famille simple continue $\big(\mu_l\big)_{l \geqslant i+1}$ et la famille admise associée à la pseudo-valuation μ est constituée de la réunion de la partie admissible simple $\mathcal{S}^{(1)} = \big(\mu_j\big)_{j \geqslant 1}$ et de la famille $\mathcal{S}^{(2)}$ constituée seulement de (μ). □

Rappelons que l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu R$ associée à une valuation sur un anneau R est définie par

$$\mathrm{gr}_\mu R = \oplus_{\gamma \in \Gamma_\mu} \mathcal{P}_\gamma / \mathcal{P}_\gamma^+,$$

où $\mathcal{P}_\gamma$ et $\mathcal{P}_\gamma^+$ sont définis respectivement par

$$\mathcal{P}_\gamma = \{x \in R \mid \mu(x) \geqslant \gamma\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_\gamma^+ = \{x \in R \mid \mu(x) > \gamma\}.$$

A tout élément x de R nous pouvons associer sa forme initiale $H_\mu(x)$ dans $\mathrm{gr}_\mu R$, qui est un élément homogène de degré $\gamma = \mu(x)$.

Alors l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ associée à la valuation, ou pseudo-valuation, μ sur $K[x]$ est une algèbre sur l'algèbre gradué $\mathrm{gr}_\nu K$, et la longueur λ de la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée à μ donne une information sur le nombre de générateurs de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ sur $\mathrm{gr}_\nu K$. En effet nous déduisons de la proposition 1.14 et du théorème 1.26 de [**Va**] le résultat suivant.

Proposition 2.12. — *Si la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée à un prolongement μ de ν à $K[x]$ est complète, de longueur finie λ, l'algèbre graduée $gr_\mu K[x]$ est engendrée par les λ éléments homogènes $H_\mu(\phi_i^{(j)})$, avec $1 \leqslant j \leqslant N$ et $1 \leqslant i \leqslant n_N$.*

Remarque 2.13. — Dans le cas d'une famille admise complète $\mathcal{A}(\mu)$, la longueur λ de la famille nous donne une borne supérieure du nombre minimal de générateurs de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ sur l'algèbre $\mathrm{gr}_\nu K$, nous pouvons nous demander dans quels cas la longueur est exactement le nombre minimal de générateurs.

Si la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ est de longueur finie et ouverte, c'est le cas quand $\mathcal{A}(\mu)$ est d'ordre fini N avec la dernière famille admissible simple $\mathcal{S}^{(N)}$ non discrète, il n'est pas possible de déduire des résultats de [**Va**] si l'algèbre $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est de type fini sur l'algèbre $\mathrm{gr}_\nu K$.

Nous pouvons enfin remarquer que si la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée à μ est complète, alors le degré d de la famille est égal au degré du dernier polynôme $\phi_{n_N}^{(N)}$ de la famille des polynômes-clés associée à $\mathcal{A}(\mu)$. En particulier si μ est la pseudo-valuation associée à un prolongement de la valuation ν de K à une extension algébrique L de K définie par $L = K[x]/(G)$, ce dernier polynôme est toujours égal à G, et le degré de la famille est égal au degré de l'extension, $d = [L : K]$.

Si nous nous fixons une valuation ν d'un corps K, nous pouvons définir l'ensemble $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ des classes d'équivalence de familles admissibles $\mathcal{A}$ pour la valuation ν et l'ensemble $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ des valuations ou pseudo-valuations μ de $K[x]$ dont la restriction à K est égale à ν. Grâce aux théorèmes 2.4 et 2.5 de [**Va**] et à la proposition 2.9, nous pouvons considérer $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ comme le sous-ensemble de $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ formé des classes d'équivalence de familles admises associées à une valuation ou à une pseudo-valuation. Dans la suite nous parlerons de $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ comme l'ensemble des familles admissibles et omettrons « classes d'équivalence ».

Toute famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ de valuations de $K[x]$ n'est pas une famille admise associée à une valuation ou pseudo-valuation μ, c'est-à-dire n'appartient pas à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$. Si la famille $\mathcal{A}$ est complète, c'est-à-dire si I possède un plus grand élément $\bar{\iota}$, alors $\mathcal{A}$ est la famille admise associée à la valuation ou pseudo-valuation $\mu_{\bar{\iota}}$. Si la famille $\mathcal{A}$ est de degré infini, c'est-à-dire soit $\mathcal{A}$ est d'ordre infini soit $\mathcal{A}$ est d'ordre fini et la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est discrète infinie, la famille $\mathcal{A}$ est associée à la valuation μ définie par $\mu(f) = \sup(\mu_i(f), i \in I)$. Si la famille $\mathcal{A}$ est ouverte d'ordre fini N, c'est-à-dire avec la dernière famille simple de la forme $\mathcal{S}^{(N)} = \big(\mu_1^{(N)}, \dots, \mu_{n_N}^{(N)}; (\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha \in A^{(N)}}\big)$, la famille $\mathcal{A}$ est associé à une valuation μ si et seulement si l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A^{(N)})$ est vide ; dans ce cas la valuation μ est la valuation $\mu_{A^{(N)}}$. Par contre si la famille $\mathcal{A}$ est ouverte d'ordre fini tel que l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A^{(N)})$

est non vide, la famille $\mathcal{A}$ n'est pas une famille admise associée à une valuation appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$. Nous disons que $\mathcal{A}$ est une famille admissible *non-admise*.

Remarque 2.14. — Dans le cas où la famille $\mathcal{A}$ est non-admise, si pour tout polynôme f de $K[x]$, $\sup(\mu_\alpha^{(N)}(f), \alpha\in A^{(N)})$ existe dans $\overline{\Gamma}$ et si nous posons $\mu_{+\infty}=\sup(\mu_\alpha^{(N)})$, alors la valuation $\mu_{+\infty}$ est une valuation augmentée limite et la famille admise associée est la famille $\mathcal{A}(\mu_{+\infty})=\mathcal{S}^{(1)}\cup\cdots\cup\mathcal{S}^{(N)}\cup\mathcal{S}^{(N+1)}$ avec $\mathcal{S}^{(N+1)}=(\mu_1^{(N+1)})=(\mu_{+\infty})$ (*cf.* [**Va**] Proposition 1.28). C'est le cas si l'ensemble $\Lambda=\{\gamma_\alpha^{(N)}, \alpha\in A^{(N)}\}$ admet une borne supérieure $\overline{\gamma}$ appartenant à $\Gamma_{\nu,\mathbb{R}}\cup\{+\infty\}$ (*cf.* [**Va**] Proposition 1.20). Pour tout polynôme ϕ appartenant à $\Phi(A^{(N)})$, la valuation $\mu_1^{(N+1)}$ est la valuation augmentée limite associée à ϕ et à la valeur $\gamma_{+\infty}=\mu_{+\infty}(\phi)$, nous déduisons de la proposition 1.4 que la valeur $\gamma_{+\infty}$ est indépendante du polynôme ϕ choisi dans $\Phi(A^{(N)})$ (en fait nous pouvons déduire du théorème 3.7 que sous certaine hypothèse supplémentaire $\gamma_{+\infty}=m\overline{\gamma}$ avec $m=\deg\phi/\deg\phi_\alpha^{(N)})$ et que l'ensemble $\Phi(A^{(N)})$ est de la forme :

$$\Phi(A^{(N)})=\big\{\psi=\phi+h \mid h\in K[x] \quad \text{avec } \deg h<\deg\phi \text{ et } \mu_{+\infty}(h)\geqslant\gamma_{+\infty}\big\}.$$

Nous définissons une relation d'ordre partiel sur les ensembles $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ et $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ de la manière suivante.

Définition

i) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux familles admissibles de $\mathcal{F}(K[x],\nu)$, nous disons que $\mathcal{A}'$ est *induite* par $\mathcal{A}$ si et seulement si pour toute famille admissible $\mathcal{A}'_0$ appartenant à la classe d'équivalence $\mathcal{A}'$ il existe une famille admissible $\mathcal{A}_0$ appartenant à la classe d'équivalence $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}'_0$ est incluse dans $\mathcal{A}_0$. Nous notons :

$$\mathcal{A}'\ll\mathcal{A}.$$

ii) Soient μ' et μ deux valuations ou pseudo-valuations appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$, nous disons que μ' est *induite* par μ si et seulement si la famille admise $\mathcal{A}(\mu')$ associée à μ' est induite par la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée à μ. Nous notons :

$$\mu'\ll\mu.$$

Soient μ' et μ deux valuations ou pseudo-valuations appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$, et soient $\mathcal{A}'=(\mu'_{i'})_{i'\in I'}$ et $\mathcal{A}=(\mu_i)_{i\in I}$ des familles admissibles associées respectivement à μ' et μ, nous écrivons chacune de ces familles comme réunion de familles admissibles simples, $\mathcal{A}'=\bigcup_{j\in J'}\mathcal{S}'^{(j)}$ et $\mathcal{A}=\bigcup_{j\in J}\mathcal{S}^{(j)}$, et chacune des familles admissibles simples sous la forme $\mathcal{S}'^{(j)}=\big((\mu_i'^{(j)})_{i\in L'^{(j)}};(\mu_\alpha'^{(j)})_{\alpha\in A'^{(j)}}\big)$ et $\mathcal{S}^{(j)}=\big((\mu_i^{(j)})_{i\in L^{(j)}};(\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\big)$, avec $A'^{(j)}$ et $A^{(j)}$ éventuellement vides pour les dernières familles simples. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 2.15. — *La valuation μ' est induite par μ si et seulement si nous sommes dans la situation suivante :*

1) $J'\subset J$,

2) *pour tout j dans J', sauf éventuellement pour $j = N'$ le plus grand élément de J' quand il existe, les familles admissibles simples $\mathcal{S}'^{(j)}$ et $\mathcal{S}^{(j)}$ sont équivalentes,*

3) *si J' a un plus grand élément N' :*

– soit $L'^{(N')} \subsetneq L^{(N')}$ et $\mathcal{S}'^{(N')}$ est la sous-famille discrète finie de $\mathcal{S}^{(N')}$ définie par $\mathcal{S}^{(N')} = \big(\mu_l^{(N')}\big)_{l \in L'^{(N')}}$;

– soit $L'^{(N')} = L^{(N')} = \{1, \dots, n_{N'}\}$, $\mu_i'^{(N')} = \mu_i^{(N')}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n_{N'} - 1$ et $\mu_{n_{N'}}'^{(N')}$ appartient à $\big(\mu_{n_{N'}}^{(N')}; (\mu_\alpha^{(N')})_{\alpha \in A^{(N')}}\big)$, et $A'^{(N')} = \varnothing$;

– soit $L'^{(N')} = L^{(N')}$ et les familles simples $\mathcal{S}'^{(N')}$ et $\mathcal{S}^{(N')}$ sont équivalentes, $J' = J$ et $\mu' = \mu$.

Démonstration. — Remarquons avant tout que si $\mu' \neq \mu$, alors μ' ne peut pas être une pseudo-valuation et doit être de degré fini, de plus si la famille admise $\mathcal{A}'$ est complète la valuation μ' appartient à la famille $\mathcal{A}$. Dans tous les cas, pour tout f dans $K[x]$ il existe une valuation μ_i de la famille admise $\mathcal{A}$ telle que $\mu'(f) = \mu_i(f)$, par conséquent nous avons toujours $\mu'(f) \leqslant \mu(f)$.

Rappelons que pour deux valuations μ_i et μ de $K[x]$ vérifiant $\mu_i(f) \leqslant \mu(f)$ pour tout f dans $K[x]$, nous notons $\widetilde{\Phi}_\mu(\mu_i) = \{f \in K[x] \mid \mu_i(f) < \mu(f)\}$, et $\Phi_\mu(\mu_i)$ le sous-ensemble de $\widetilde{\Phi}_\mu(\mu_i)$ constitué des polynômes de degré minimal. Alors si $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est une famille admissible de valuations associée à une valuation ou pseudo-valuation μ, pour tout $i < j$ dans I, les ensembles $\widetilde{\Phi}(\mu_i) = \widetilde{\Phi}_\mu(\mu_i)$ et $\widetilde{\Phi}_{\mu_j}(\mu_i)$ sont égaux. Considérons maintenant une valuation $\mu'_{i'}$ de la famille $\mathcal{A}'$ et soit μ_i la valuation de $\mathcal{A}$ telle que $\mu'_{i'} = \mu_i$, alors si $\mu'_{i'} \neq \mu'$ les ensembles $\widetilde{\Phi}(\mu'_{i'})$ et $\widetilde{\Phi}(\mu_i)$, ainsi que les ensembles $\Phi(\mu'_{i'})$ et $\Phi(\mu_i)$, sont égaux. En effet, comme $\mu'_{i'} \neq \mu'$, il existe $k' \in I'$ avec $k' > i'$ et il existe aussi $k \in I$ tel que $\mu_{k'} = \mu_k$ et k vérifie aussi $k > i$.

Supposons que nous avons montré que les familles admises $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ coïncident, à équivalence près, jusqu'à la valuation $\mu'_i = \mu_i$, et supposons que cette valuation est dans la partie discrète d'une famille simple, c'est-à-dire $\mu'_i = \mu_l'^{(j)}$ et $\mu_i = \mu_l^{(j)}$ avec l appartenant à la fois à $L'^{(j)}$ et à $L^{(j)}$. Nous supposons que la valuation μ'_i n'est pas la valuation μ', alors il existe des valuations μ'_{i+1} et μ_{i+1} et nous avons $\mu_{i+1} \leqslant \mu'_{i+1} \leqslant \mu' \leqslant \mu$. Et d'après ce qui précède les ensembles $\widetilde{\Phi}(\mu'_i)$ et $\widetilde{\Phi}(\mu_i)$ sont égaux, et il en est de même des ensembles $\Phi(\mu'_i)$ et $\Phi(\mu_i)$. Nous déduisons alors de la remarque 2.7 que l est le dernier élément de $L'^{(j)}$ si et seulement si l est aussi le dernier élément de $L^{(j)}$.

a) Nous supposons d'abord que l n'est pas le dernier élément de $L'^{(j)}$ ou de $L^{(j)}$, alors nous pouvons définir les valuations $\mu'_{i+1} = \mu_{l+1}'^{(j)}$ et $\mu_{i+1} = \mu_{l+1}^{(j)}$, et nous supposons aussi que $l+1$ n'est pas le dernier élément de $L^{(j)}$. Alors nous avons $\mu_{l+1}'^{(j)}(\phi_{l+1}'^{(j)}) \leqslant \mu(\phi_{l+1}'^{(j)}) \leqslant \mu(\phi_{l+1}^{(j)}) = \mu_{l+1}^{(j)}(\phi_{l+1}^{(j)})$, car $\mu(\phi_{l+1}^{(j)}) = \sup\{\mu(\phi) \mid \phi \in \widetilde{\Phi}(\mu_l^{(j)})\}$, par conséquent nous en déduisons $\mu_{l+1}'^{(j)} \leqslant \mu_{l+1}^{(j)}$, d'où l'égalité $\mu_{l+1}'^{(j)} = \mu_{l+1}^{(j)}$. Alors nous savons aussi que $l+1$ n'est pas le dernier élément de $L'^{(j)}$ et nous pouvons continuer la récurrence.

b) Nous supposons encore que l n'est pas le dernier élément de $L'^{(j)}$ ou de $L^{(j)}$, mais que $l+1$ est le dernier élément de $L^{(j)}$, c'est-à-dire que la famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ est de la forme $\big(\mu_1^{(j)},\dots,\mu_{l+1}^{(j)};(\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\big)$. Si nous avons encore l'inégalité $\mu'^{(j)}_{l+1}(\phi'^{(j)}_{l+1})\leqslant\mu^{(j)}_{l+1}(\phi^{(j)}_{l+1})$, nous déduisons comme précédemment que les valuations $\mu'^{(j)}_{l+1}$ et $\mu^{(j)}_{l+1}$ sont égales, sinon nous avons $\mu(\phi'^{(j)}_{l+1})\geqslant\mu'^{(j)}_{l+1}(\phi'^{(j)}_{l+1})>\mu(\phi^{(j)}_{l+1})$, et le polynôme $\phi'^{(j)}_{l+1}$ appartient à la famille $\big(\phi_\alpha^{(j)}\big)_{\alpha\in A^{(j)}}$. Supposons que $\mu'^{(j)}_{l+1}$ ne soit pas la valuation μ', alors comme précédemment, nous déduisons de la remarque 2.7 que si la valuation $\mu'^{(j)}_{l+1}$ est égale à la valuation $\mu^{(j)}_{l+1}$ ou à une valuation $\mu_\alpha^{(j)}$, $l+1$ doit aussi être le dernier élément de $L'^{(j)}$, et la famille simple $\mathcal{S}'^{(j)}$ est de la forme $\big(\mu'^{(j)}_1,\dots,\mu'^{(j)}_{l+1};(\mu'^{(j)}_\alpha)_{\alpha\in A'^{(j)}}\big)$.

Par conséquent, quitte à remplacer la famille $\mathcal{S}^{(j)}$ par une famille équivalente, nous pouvons supposer $\mu'^{(j)}_{l+1}=\mu^{(j)}_{l+1}$, c'est-à-dire que les familles $\mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{S}'^{(j)}$ ont même partie discrète et les parties continues $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A^{(j)}}$ et $\big(\mu'_{\alpha'}\big)_{\alpha'\in A'^{(j)}}$ sont caractérisées respectivement par les ensembles de valeurs $\Lambda=\big\{\gamma_\alpha\mid\alpha\in A^{(j)}\big\}=\big\{\mu(\phi)\mid\phi\in\Phi\big\}$ et $\Lambda'=\big\{\gamma'_{\alpha'}\mid\alpha'\in A'^{(j)}\big\}=\big\{\mu'(\phi)\mid\phi\in\Phi\big\}$, avec $\Phi=\Phi(\mu^{(j)}_{l+1})$.

Soit ϕ appartenant à Φ, alors il existe α' dans $A'^{(j)}$ tel que $\mu'(\phi)=\mu'^{(j)}_{\alpha'}(\phi)$, et il existe $k\in I$ tel que $\mu'^{(j)}_{\alpha'}=\mu_k$, et nous avons forcément $\mu_k=\mu^{(j)}_\alpha$ pour un α dans $A^{(j)}$ et $\Phi(\mu'^{(j)}_{\alpha'})=\Phi(\mu^{(j)}_\alpha)$. Alors comme ϕ n'appartient pas à $\Phi(\mu'^{(j)}_{\alpha'})$, nous avons $\mu'(\phi)=\mu'^{(j)}_{\alpha'}(\phi)=\mu^{(j)}_\alpha(\phi)=\mu(\phi)$. Par conséquent pour tout ϕ dans Φ nous avons $\mu(\phi)=\mu'(\phi)$, nous en déduisons $\Lambda=\Lambda'$ et les familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{S}'^{(j)}$ sont égales.

Nous remarquons que la famille $\mathcal{A}(\mu')$ est égale à $\mathcal{S}'^{(1)}\cup\cdots\cup\mathcal{S}'^{(j)}$ si et seulement si l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A'^{(j)})$ est vide, et dans ce cas nous avons aussi $\mathcal{A}(\mu)=\mathcal{S}^{(1)}\cup\cdots\cup\mathcal{S}^{(j)}$ et $\mu'=\mu$. Nous pouvons alors supposer $\widetilde{\Phi}(A'^{(j)})\neq\varnothing$ et les polynômes-clés limites ϕ et ϕ' associés respectivement aux valuations $\mu_1^{(j+1)}$ et $\mu_1'^{(j+1)}$ appartiennent à $\Phi(A'^{(j)})$. De plus comme pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons encore $\mu_1^{(j+1)}(f)\leqslant\mu_1'^{(j+1)}(f)\leqslant\mu'(f)\leqslant\mu(f)$, nous en déduisons $\mu_1^{(j+1)}(\phi)=\mu'(\phi)=\mu(\phi)$. Comme précédemment si 1 n'est pas le plus grand élément de $L^{(j+1)}$ nous avons $\mu(\phi')\leqslant\mu(\phi)$ et nous en déduisons que les valuations $\mu_1'^{(j+1)}$ et $\mu_1^{(j+1)}$ sont égales. Nous pouvons alors continuer la récurrence.

c) Les cas $\mu'^{(j)}_l=\mu^{(j)}_l$ où l est le plus grand élément de $L^{(j)}$, ainsi que le cas des valuations $\mu_1'^{(1)}$ et $\mu_1^{(1)}$ s'étudient de façon similaire. □

Corollaire. — *Soit μ un prolongement de ν à $K[x]$ et soit $\mathcal{A}(\mu)$ la famille admise associée à μ, alors μ est un élément maximal de $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ pour la relation d'ordre $\ll$ dans les cas suivants :*

i) *la famille $\mathcal{A}(\mu)$ est de degré infini,*

ii) *la famille $\mathcal{A}(\mu)$ est ouverte de degré fini,*

iii) *la famille $\mathcal{A}(\mu)$ est complète et la dernière valeur γ_τ de la famille $(\gamma_i)_{i\in I}$ associée vérifie $\gamma_\tau\notin\Gamma_\nu\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, c'est en particulier le cas pour $\gamma_\tau=+\infty$, c'est-à-dire pour μ pseudo-valuation.*

Démonstration

i) Si $\mathcal{A}(\mu)$ est une sous-famille stricte d'une famille admissible alors la famille $\mathcal{A}(\mu)$ est forcément de degré fini.

ii) Si la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$ est de la forme $\mathcal{S}^{(1)} \cup \ldots \mathcal{S}^{(N)}$ avec $\mathcal{S}^{(N)}$ famille simple non discrète, alors l'ensemble $\Phi(A^{(N)})$ est vide et il n'existe aucun polynôme-clé limite pour la sous-famille continue de $\mathcal{S}^{(N)}$.

iii) Soit $\mu_{\overline{\iota}} = [\mu_{\overline{\iota}-1}\,; \mu_{\overline{\iota}}(\phi_{\overline{\iota}}) = \gamma_{\overline{\iota}}]$ la dernière valuation de la famille $\mathcal{A}(\mu)$, c'est-à-dire $\mu = \mu_{\overline{\iota}}$, alors pour qu'il existe un polynôme-clé ϕ pour la valuation $\mu_{\overline{\iota}}$ vérifiant $\deg\phi \geqslant \deg\phi_{\overline{\iota}}$ et ϕ et $\phi_{\overline{\iota}}$ non $\mu_{\overline{\iota}}$-équivalents, il faut que $\gamma_{\overline{\iota}}$ appartienne à $\Gamma_{\mu_{\overline{\iota}-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (*cf.* [**McL1**] Theorem 9.4, [**Va**] Théorème 1.11). $\square$

Remarque 2.16. — Nous pouvons nous demander si nous obtenons ainsi tous les éléments maximaux de $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ pour la relation d'ordre $\ll$. Plus généralement, nous pouvons nous poser la question suivante :

soit $\mu' = [\mu\,; \mu'(\phi) = \gamma]$ une valuation augmentée, ou $\mu' = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\,; \mu'(\phi) = \gamma\big]$ une valuation augmentée limite, appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$, alors existe-t-il toujours un polynôme-clé ϕ' pour la valuation μ' vérifiant $\deg\phi' \geqslant \deg\phi$ et ϕ et ϕ' ne sont pas μ'-équivalents ?

Soit $\mathcal{A}$ une famille admissible non-admise, $\mathcal{A} = \mathcal{S}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{S}^{(N)}$ avec $\mathcal{S}^{(N)} = \big(\mu_1^{(N)}, \ldots, \mu_{n_N}^{(N)} : (\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha\in A^{(N)}}\big)$ et $\widetilde{\Phi}(A^{(N)})$ non vide, alors il existe toujours un polynôme-clé limite ϕ appartenant à $\Phi(A^{(N)})$ et une valeur γ appartenant à $\overline{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha^{(N)}(\phi)$ pour tout α dans $A^{(N)}$. Nous pouvons alors définir une valuation augmentée limite, ou une pseudo-valuation pour $\gamma = +\infty$, $\mu_1^{(N+1)} = \big[(\mu_\alpha^{(N)})\,; \mu_1^{(N+1)}(\phi) = \gamma\big]$. La famille $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{\mu_1^{(N+1)}\}$ est une famille admissible, c'est la famille admise associée à la valuation $\mu_1^{(N+1)}$. Par conséquent la famille admissible non-admise $\mathcal{A}$ n'est pas un élément maximal de $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ pour la relation d'ordre $\ll$.

Soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ une famille admissible appartenant à $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ et soit $(\phi_i)_{i\in I}$ la famille de polynômes-clés associée, alors pour tout i dans I nous appelons degré de la valuation μ_i le degré du polynôme ϕ_i, $\deg\mu_i = \deg\phi_i$. Pour tout entier $d \geqslant 1$, nous pouvons définir la famille $\mathcal{A}_{\leqslant d}$ constituée des valuations μ_i de $\mathcal{A}$ de degré $\deg\mu_i \leqslant d$, alors la famille $\mathcal{A}_{\leqslant d}$ est encore une famille admissible de $\mathcal{F}(K[x],\nu)$.

Si $\mathcal{A}$ est la réunion des familles simples $\mathcal{S}^{(j)}$, pour $j \in J$, alors la famille $\mathcal{A}_{\leqslant d}$ est une famille de la forme $\mathcal{A}_{\leqslant d} = \mathcal{S}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{S}^{(j)} \cup \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est soit une sous-famille de la partie discrète de $\mathcal{S}^{(j+1)}$ soit égale à $\mathcal{S}^{(j+1)}$ en entier. En particulier pour tout j appartenant à J^*, si nous notons $d(j)$ le degré de la dernière valuation de la partie discrète de $\mathcal{S}^{(j)}$, c'est aussi le degré des valuations de la partie continue de $\mathcal{S}^{(j)}$, la famille admissible $\mathcal{A}_{\leqslant d(j)}$ est non-admise. Toutes les autres familles admissibles de la forme $\mathcal{A}_{\leqslant d}$, c'est-à-dire pour $d \notin [d(j), \deg\mu_1^{(j+1)} - 1]$, sont des familles admises associées complètes, sauf éventuellement la famille $\mathcal{A}_{\leqslant d} = \mathcal{A}$ pour $d \geqslant \deg\mathcal{A}$.

Nous remarquons que si μ et μ' sont deux valuations de $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ vérifiant $\mu(f) = \mu'(f)$ pour tout polynôme f de $K[x]$ de degré $\deg f \leqslant d$, alors les familles admissibles $\mathcal{A}(\mu)_{\leqslant d}$ et $\mathcal{A}(\mu')_{\leqslant d}$ sont égales.

Corollaire. — *Soit μ une valuation appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ maximale pour la relation d'ordre $\ll$ dont la famille admise associée $\mathcal{A}(\mu)$ est de degré fini $\deg \mathcal{A}(\mu) = d$. Alors si μ' est une valuation appartenent à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ vérifiant $\mu(f) = \mu'(f)$ pour tout polynôme f de $K[x]$ de degré $\deg f \leqslant d$, les valuations μ et μ' sont égales.*

Démonstration. — Comme nous avons $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{A}(\mu)_{\leqslant d} = \mathcal{A}(\mu')_{\leqslant d} \subset \mathcal{A}(\mu')$, nous en déduisons $\mu \ll \mu'$, d'où l'égalité $\mu = \mu'$. □

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux familles admissibles de $\mathcal{F}(K[x],\nu)$, et si nous choisissons des représentants respectifs $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}'_0$ des classes d'équivalence $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, la famille $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}'_0$ est encore une famille admissible de valuations de $K[x]$ dont la classe d'équivalence ne dépend pas des représentants choisis. Nous notons $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ la famille ainsi définie dans $\mathcal{F}(K[x],\nu)$, c'est alors le plus grand élément de $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ pour la relation d'ordre $\ll$ inférieur aux deux familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, nous pouvons poser $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}'$.

Si μ et μ' sont deux valuations appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$, nous voulons savoir dans quel cas il est possible de définir de la même manière une valuation $\lambda = \mu \wedge \mu'$. Si la valuation λ existe, alors la famille admise associée $\mathcal{A}(\lambda)$ est la famille $\mathcal{A}(\mu) \cap \mathcal{A}(\mu')$, et le problème de l'existence de $\lambda = \mu \wedge \mu'$ se ramène à savoir dans quel cas la famille admissible $\mathcal{A}(\mu) \cap \mathcal{A}(\mu')$ est admise.

Si nous écrivons comme précédemment $\mathcal{A}(\mu)$ et $\mathcal{A}(\mu')$ comme les réunions respectivement des familles $\mathcal{S}^{(j)}$, $j \in J$, et $\mathcal{S}'^{(j')}$, $j' \in J'$, la famille $\mathcal{A}(\mu) \cap \mathcal{A}(\mu')$ est admise s'il existe $j \in J \cap J'$ et $l \in L^{(j)} \cap L'^{(j)}$, avec l qui n'est pas à la fois le plus grand élément de $L^{(j)}$ et de $L'^{(j)}$, tels que les familles $\mathcal{A}(\mu)$ et $\mathcal{A}(\mu')$ coïncident jusqu'à l'indice $i = (j,l)$, c'est-à-dire que pour tout $k \leqslant (j,l)$ dans I et dans I' nous avons l'égalité $\mu_k = \mu'_k$ et tels que μ_{i+1} et μ'_{i+1} sont différentes. Alors la famille $\mathcal{A}(\mu) \cap \mathcal{A}(\mu')$ est la famille admise associée à la valuation $\mu \wedge \mu' = \mu_l^{(j)} = \mu_l'^{(j)}$. Il y a trois possibilités :

– $\Phi_\mu(\mu_l^{(j)}) \neq \Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$. C'est en particulier le cas si l'une des deux valuations, par exemple μ, est égale à $\mu_l^{(j)}$, alors nous avons $\mu \ll \mu'$ et $\mu \wedge \mu' = \mu$. C'est aussi le cas si l est le plus grand élément d'un des ensembles, par exemple $L^{(j)}$, dans ce cas cela suppose que nous avons choisi une famille admissible convenable dans la classe d'équivalence de $\mathcal{A}(\mu)$ pour avoir l'égalité $\mu_l^{(j)} = \mu_l'^{(j)}$;

– $\Phi_\mu(\mu_l^{(j)}) = \Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$ et les polynômes-clés $\phi_{l+1}^{(j)}$ et $\phi_{l+1}'^{(j)}$ qui appartiennent tous deux à cet ensemble sont différents, cela ne peut arriver que s'il existe ϕ dans $\Phi_\mu(\mu_l^{(j)})$ avec $\mu(\phi) > \mu'(\phi)$ et ϕ' dans $\Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$ avec $\mu'(\phi') > \mu(\phi')$;

– $\Phi_\mu(\mu_l^{(j)}) = \Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)}) = \Phi$, $\phi_{l+1}^{(j)} = \phi_{l+1}'^{(j)}$, et les valeurs $\gamma_{l+1}^{(j)}$ et $\gamma_{l+1}'^{(j)}$ qui sont définies par $\gamma_{l+1}^{(j)} = \sup\big(\mu(\phi), \phi \in \Phi\big)$ et $\gamma_{l+1}'^{(j)} = \sup\big(\mu'(\phi), \phi \in \Phi\big)$ sont différentes.

La famille $\mathcal{A}(\mu) \cap \mathcal{A}(\mu')$ est non-admise s'il existe $j \in J \cap J'$ tel que les familles $\mathcal{S}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{S}'^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{S}'^{(j)}$ sont équivalentes et telles que les valuations augmentées limites $\mu_1^{(j+1)}$ et $\mu_1'^{(j+1)}$ sont différentes. Dans ce cas nous avons toujours $\Phi(A^{(j)}) = \Phi(A'^{(j)})$ et il y a deux possibilités, suivant que les polynômes-clés limites $\phi_1^{(j+1)}$ et $\phi_1'^{(j+1)}$ sont égaux ou non.

Définition. — Soient μ et μ' deux valuations appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ et soit $\mathcal{A}$ la famille admissible de $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ définie par $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mu) \cap \mathcal{A}(\mu')$. Si la famille $\mathcal{A}$ est la famille admise associée à une valuation $\lambda = \mu_l^{(j)}$ nous posons $\mu \wedge \mu' = \lambda$, sinon nous appelons $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha^{(j)}\right)_{\alpha \in A^{(j)}}$ la partie continue de la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ de $\mathcal{A}$ et nous posons $\mu \wedge \mu' = \mathcal{C}$.

Nous disons que les deux valuations μ et μ' sont *transverses* si nous avons $\mu \wedge \mu' = \lambda$ avec $\Phi_\mu(\mu_l^{(j)}) \neq \Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$. Si nous avons $\mu \wedge \mu' = \lambda$ avec $\Phi_\mu(\mu_l^{(j)}) = \Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$ ou si nous avons $\mu \wedge \mu' = \mathcal{C}$ nous disons qu'elles sont *tangentes*.

Si les polynômes-clés $\phi_{l+1}^{(j)}$ et $\phi_{l+1}'^{(j)}$, ou polynômes-clés limites $\phi_1^{(j+1)}$ et $\phi_1'^{(j+1)}$ sont différents nous disons que les valuations sont tangentes *au premier ordre*, si ils sont égaux nous disons qu'elles sont tangentes *au deuxième ordre*.

Nous pouvons définir de façon naturelle une autre relation d'ordre partiel sur l'ensemble des valuations sur $K[x]$.

Définition. — Soient μ et μ' deux valuations appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$, nous disons que μ' est *inférieure* à μ si pour tout polynôme f appartenant à $K[x]$ nous avons l'inégalité $\mu'(f) \leqslant \mu(f)$. Nous notons :

$$\mu' \leqslant \mu.$$

Nous voulons comparer les relations d'ordre $\ll$ et $\leqslant$ que nous avons définis sur l'ensemble $\mathcal{E}(K[x], \nu)$. Nous avons déjà vu que si μ et μ' sont deux valuations de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ avec $\mu' \ll \mu$ alors nous avons $\mu' \leqslant \mu$.

Nous avons besoin de la définition suivante.

Définition. — Soit I un ensemble totalement ordonné, alors nous posons $I^* = I$ si I n'a pas de plus grand élément et $I^* = I \setminus \{\bar{\imath}\}$ si I a un plus grand élément $\bar{\imath}$.

Soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ une famille admissible appartenant à $\mathcal{F}(K[x], \nu)$, alors nous définissons la famille $\mathcal{A}^*$ par $\mathcal{A}^* = (\mu_i)_{i \in I^*}$.

Si la famille admissible $\mathcal{A}$ ne contient qu'une valuation, la famille $\mathcal{A}^*$ est vide, sinon la famille $\mathcal{A}^*$ est encore une famille admissible de $\mathcal{F}(K[x], \nu)$. Parfois, il est plus commode de considérer que nous avons rajouté la valuation $\mu_0 = \nu$ à toute famille admissible $\mathcal{A}$, cela revient à rajouter l'élément 0 à l'ensemble I, dans ce cas nous avons toujours la valuation ν qui appartient à $\mathcal{A}^*$, mais la famille (ν) n'est pas une famille admissible de $\mathcal{F}(K[x], \nu)$.

Remarque 2.17. — Les familles $\mathcal{A}^*$ et $\mathcal{A}$ sont égales si et seulement si la famille $\mathcal{A}$ est ouverte. Sinon la famille $\mathcal{A}^*$ est le *prédécesseur* de la famille $\mathcal{A}$ pour l'ordre $\ll$, c'est-à-dire la plus grande famille admissible de $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ strictement inférieure à $\mathcal{A}$ pour $\ll$.

La famille $\mathcal{A}^*$ est non-admise si et seulement si la famille admissible $\mathcal{A}$ est de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{S}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{S}^{(N)}$ avec la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ ne contenant qu'une seule valuation.

Proposition 2.18. — *Soient μ et μ' deux valuations appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$, alors si μ' est inférieure à μ le prédécesseur de la famille admise $\mathcal{A}(\mu')$ associée à μ' est induite par la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée à μ :*

$$\mu' \leqslant \mu \Longrightarrow \mathcal{A}(\mu')^* \ll \mathcal{A}(\mu).$$

De plus les valuations μ et μ' sont tangentes au deuxième ordre.

Démonstration. — Nous écrivons les familles $\mathcal{A}(\mu) = (\mu_i)_{i\in I}$ et $\mathcal{A}(\mu') = (\mu'_{i'})_{i'\in I'}$ comme réunions respectivement des familles simples $\mathcal{S}^{(j)}$, $j \in J$, et $\mathcal{S}'^{(j')}$, $j' \in J'$.

Nous supposons d'abord que les familles $\mathcal{A}(\mu)$ et $\mathcal{A}(\mu')$ coïncident jusqu'à un indice $i \in I \cap I'$ de la forme $i = (j,l)$, c'est-à-dire jusqu'à une valuation $\mu_l^{(j)} = \mu_l'^{(j)}$, avec $j \in J \cap J'$ et $l \in L^{(j)} \cap L'^{(j)}$, et nous considérons les ensembles $\widetilde{\Phi}_\mu(\mu_l^{(j)})$ et $\widetilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$. Nous avons toujours $\widetilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_l'^{(j)}) \subset \widetilde{\Phi}_\mu(\mu_l^{(j)})$, et nous supposons $\widetilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_l'^{(j)}) \neq \varnothing$, c'est-à-dire que la valuation $\mu_l'^{(j)}$ n'est pas égale à μ'. □

Lemme 2.19. — *Les sous-ensembles $\Phi_\mu(\mu_l^{(j)})$ et $\Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$ constitués des polynômes de degré minimaux respectivement dans $\widetilde{\Phi}_\mu(\mu_l^{(j)})$ et $\widetilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$ sont égaux.*

Démonstration du lemme. — Montrons d'abord que le degré minimal des polynômes de $\widetilde{\Phi}_\mu(\mu_l^{(j)})$ est égal au degré minimal des polynômes de $\widetilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$. En effet supposons qu'il existe des polynômes $\phi \in \Phi_\mu(\mu_l^{(j)})$ et $\phi' \in \Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$ avec $\deg\phi < \deg\phi'$, et soit $\phi' = q\phi + r$ la division euclidienne de ϕ' par ϕ. Comme ϕ est un polynôme-clé pour $\mu_l^{(j)}$, nous déduisons du lemme 2.3 que les polynômes ϕ' et $q\phi$ sont $\mu_l^{(j)}$-équivalents, ce qui est impossible car $\deg q < \deg\phi'$ et $\deg\phi < \deg\phi'$ ϕ' est un polynôme-clé pour $\mu_l^{(j)}$. Par conséquent nous avons $\Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)}) = \widetilde{\Phi}_{\mu'}(\mu_l'^{(j)}) \cap \Phi_\mu(\mu_l^{(j)})$.

Soient $\phi \in \Phi_\mu(\mu_l^{(j)})$ et $\phi' \in \Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)}) \subset \Phi_\mu(\mu_l^{(j)})$, alors ϕ' est $\mu_l^{(j)}$-divisible par ϕ et comme ϕ et ϕ' sont des polynômes-clés de même degré nous en déduisons que ϕ et ϕ' sont $\mu_l^{(j)}$-équivalents, par conséquent que ϕ appartient à $\Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$. □

Nous notons $\Phi = \Phi_\mu(\mu_l^{(j)}) = \Phi_{\mu'}(\mu_l'^{(j)})$, et nous définissons les sous-ensembles $\Lambda = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi\}$ et $\Lambda' = \{\mu'(\phi) \mid \phi \in \Phi\}$ de $\overline{\Gamma}$.

Lemme 2.20. — *Soient ϕ et ϕ' deux polynômes appartenant à Φ, alors nous avons :*

$$\mu(\phi) \geqslant \mu(\phi') \Longrightarrow \mu'(\phi) \geqslant \mu'(\phi').$$

Démonstration du lemme. — En effet, nous aurions sinon

$$\mu(\phi) \geqslant \mu(\phi') \geqslant \mu'(\phi') > \mu'(\phi) = \mu'(\phi - \phi') = \mu(\phi - \phi') = \mu_l^{(j)}(\phi - \phi'),$$

ce qui est impossible. □

Nous déduisons du lemme que si Λ a un plus grand élément $\gamma = \gamma_{l+1}^{(j)}$ et si $\phi = \phi_{l+1}^{(j)}$ est un polynôme de Φ vérifiant $\mu(\phi) = \gamma$, alors Λ' a aussi un plus grand élément $\gamma' = \gamma_{l+1}'^{(j)}$ avec $\mu'(\phi) = \gamma'$. Nous pouvons alors considérer les deux valuations augmentées $\mu_{l+1}^{(j)} = [\mu_l^{(j)}\,;\, \mu_{l+1}^{(j)}(\phi) = \gamma]$ et $\mu_{l+1}'^{(j)} = [\mu_l'^{(j)}\,;\, \mu_{l+1}'^{(j)}(\phi) = \gamma']$ appartenant respectivement aux familles $\mathcal{A}(\mu)$ et $\mathcal{A}(\mu')$.

Si $\gamma = \gamma'$, alors $\mu_{l+1}^{(j)} = \mu_{l+1}'^{(j)}$ et les familles coïncident jusqu'à l'indice $i+1$.

Si $\gamma > \gamma'$, alors $\mu_{l+1}'^{(j)}$ est égale à la valuation μ'. En effet sinon il existerait un polynôme-clé ψ' pour la valuation $\mu_{l+1}'^{(j)}$ de la forme $\psi' = \phi^m + \cdots + g_1\phi + g_0$ avec $\mu_{l+1}'^{(j)}(\psi') = m\gamma' = \mu_l'^{(j)}(g_0)$. Le polynôme ψ' serait alors $\mu_{l+1}^{(j)}$ équivalent à g_0, et nous aurions $\mu(\psi') = \mu_{l+1}^{(j)}(\psi') = \mu_l^{(j)}(g_0) < \mu'(\psi')$, ce qui est impossible.

Si Λ n'a pas de plus grand élément et si Λ' a un plus grand élément $\gamma' = \gamma_{l+1}'^{(j)}$, alors nous choisissons ϕ et ϕ' dans Φ avec $\gamma = \mu(\phi) > \mu(\phi') \geqslant \mu'(\phi') = \gamma'$, et nous avons forcément $\mu'(\phi) = \mu'(\phi')$. Alors nous considérons comme précédemment les deux valuations $\mu_{l+1}^{(j)} = [\mu_l^{(j)}\,;\, \mu_{l+1}^{(j)}(\phi) = \gamma]$ et $\mu_{l+1}'^{(j)} = [\mu_l'^{(j)}\,;\, \mu_{l+1}'^{(j)}(\phi) = \gamma']$ et nous en déduisons encore que la valuation $\mu_{l+1}'^{(j)}$ est égale à la valuation μ'.

Si les ensembles Λ et Λ' n'ont pas de plus grand élément, alors pour tout polynôme ϕ appartenant à Φ il existe un polynôme ϕ' de Φ vérifiant $\mu'(\phi') > \mu'(\phi)$. D'après le lemme nous avons aussi $\mu(\phi') > \mu(\phi)$, d'où l'égalité $\mu(\phi) = \mu(\phi - \phi') = \mu'(\phi - \phi') = \mu'(\phi)$. Nous en déduisons que les familles admissibles continues définies par les ensembles Λ et Λ' sont équivalentes, c'est-à-dire que les familles $\mathcal{A}(\mu)$ et $\mathcal{A}(\mu')$ coïncident jusqu'aux familles admissibles $\mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{S}'^{(j)}$.

Supposons maintenant que les familles $\mathcal{A}(\mu)$ et $\mathcal{A}(\mu')$ coïncident jusqu'aux familles $\mathcal{S}^{(j)} = \big(\mu_1^{(j)}, \ldots, \mu_{n_j}^{(j)}; (\mu_\alpha^{(j)})_{A^{(j)}}\big)$ et $\mathcal{S}'^{(j)} = \big(\mu_1'^{(j)}, \ldots, \mu_{n_j}'^{(j)}; (\mu_{\alpha'}'^{(j)})_{A'^{(j)}}\big)$. Alors nous avons le résultat similaire à celui du lemme 2.19, c'est-à-dire l'égalité $\Phi(A^{(j)}) = \Phi(A'^{(j)}) = \Phi$, et le résultat du lemme 2.20 est encore vrai pour cet ensemble Φ. Nous pouvons alors faire le même raisonnement que dans le cas précédent en considérant encore les ensembles Λ et Λ'.

Pour commencer la récurrence nous faisons encore de la même manière en considérant l'ensemble Φ des polynômes unitaires ϕ de $K[x]$ de degré 1.

Corollaire. — *Soit μ une valuation de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ de degré d et soit ϕ un polynôme unitaire de $K[x]$, alors si ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ nous avons* $\deg \phi \geqslant d$.

Remarque 2.21. — Soit μ une valuation de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ dont la famille admise associé $\mathcal{A}(\mu)$ est complète, alors il existe une unique pseudo-valuation $\overline{\mu}$ appartenant à

$\mathcal{E}(K[x],\nu)$ de même degré que μ vérifiant $\mu \leqslant \overline{\mu}$. En effet si nous notons respectivement $(\phi_i)_{i\in I}$ et $(\gamma_i)_{i\in I}$ les familles de polynômes-clés et de valeurs associées à $\mathcal{A}(\mu) = (\mu_i)_{i\in I}$, la famille admise $\mathcal{A}(\overline{\mu})$ associée à la pseudo-valuation $\overline{\mu}$ est définie par les familles $(\overline{\phi}_i)_{i\in I}$ et $(\overline{\gamma}_i)_{i\in I}$ avec $\overline{\phi}_i = \phi_i$ pour tout i dans I, $\overline{\gamma}_i = \gamma_i$ pour tout i dans I avec $i < \bar{\imath}$ et $\overline{\gamma}_{\bar{\imath}} = +\infty$, où $\bar{\imath}$ est le plus grand élément de I.

3. Polynôme-clé limite

Dans cette partie nous voulons étudier certaines propriétés des polynômes-clés limites associés à une famille admissible continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$. Plus précisément, nous savons que dans une famille admissible discrète $\mathcal{D} = (\mu_i)_{i\in I}$, pour tout $i > 2$, le développement du polynôme-clé ϕ_i selon les puissances de ϕ_{i-1} est de la forme $\phi_i = {\phi_{i-1}}^m + g_{m-1}{\phi_{i-1}}^{m-1} + \cdots + g_0$, et vérifie l'égalité $\mu_{i-1}(\phi_i) = m\gamma_{i-1} = \mu_{i-2}(g_0)$ (*cf.* [**McL1**], Theorem 9.4, [**Va**], Théorème 1.11), et nous voulons trouver un résultat analogue pour le développement d'un polynôme-clé limite ϕ selon les puissances des polynômes-clés ϕ_α de la famille associée à $\mathcal{C}$.

Dans la suite nous nous intéressons au cas d'une famille admissible simple continue $\mathcal{S} = (\mu) \cup \mathcal{C}$, où μ est une valuation de $K[x]$ et où $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ est la partie continue de $\mathcal{S}$ associée à la famille de polynômes-clés $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ de même degré d et à la famille de valeurs $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans $\widetilde{\Gamma}$. Nous pouvons écrire $\mathcal{S} = (\mu_\alpha)_{\alpha\in\{\bullet\}\cup A}$, avec $\mu_\bullet = \mu$ et $\mu_\alpha = [\mu\,;\,\mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, pour $\alpha \in A$.

Nous appelons Γ le groupe des ordres des valuations μ_α et nous supposons que la famille $\mathcal{C}$ est exhaustive, c'est-à-dire que le sous-ensemble $\Lambda = \Lambda(A) = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est un intervalle de Γ. Nous supposons de plus que Λ est majoré et n'a pas de plus grand élément dans Γ. Comme nous nous intéressons à ce qui se passe quand nous considérons des valuations μ_α pour α de plus en plus grand, nous pouvons, quitte à restreindre l'ensemble A, supposer qu'il a un élément minimal, ω, par conséquent nous pouvons supposer que l'ensemble Λ a aussi un élément minimal γ_ω. Nous pourrions aussi poser $\mu_\omega = \mu$ et choisir une valeur γ_ω dans Γ avec $\gamma_\omega < \gamma_\alpha$ pour tout α dans A.

Nous supposons que le groupe des ordres Γ est de rang fini r, et nous notons $(0) = \Gamma_{(0)} \subset \Gamma_{(1)} \subset \cdots \subset \Gamma_{(r)} = \Gamma$ la suite de ses sous-groupes isolés. Nous supposerons dans la suite que le sous-groupe isolé $\Gamma_{(1)}$, qui est un sous-groupe de rang un, donc isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$, est non discret. Ainsi si nous avons deux éléments γ et γ' de Γ avec $\gamma < \gamma'$, il existe une infinité d'éléments γ'' de Γ vérifiant $\gamma < \gamma'' < \gamma'$. En particulier, nous utiliserons cette propriété pour nous assurer de l'existence d'une infinité d'éléments α'' de A compris entre deux éléments distincts α et α'. Nous notons comme précédemment $\Gamma_\mathbb{R}$ le groupe ordonné isomorphe à $(\mathbb{R}^r)_{\text{lex}}$ contenant Γ, et pour tout j nous notons $\Gamma_{(j),\mathbb{R}}$ le sous-groupe isolé de $\Gamma_\mathbb{R}$ isomorphe à $(\mathbb{R}^j)_{\text{lex}}$, en particulier nous avons $\Gamma_{(j)} = \Gamma \cap \Gamma_{(j),\mathbb{R}}$.

Pour tout β dans A, la valuation μ_β de la famille $\mathcal{C}$ est la valuation augmentée $\mu_\beta = [\mu\,;\, \mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$, et si nous notons

$$f = g_{m,\beta}\phi_\beta^m + \cdots + g_{1,\beta}\phi_\beta + g_{0,\beta},$$

le développement d'un polynôme f de $K[x]$ selon les puissances du polynôme-clé ϕ_β, nous avons :

$$\mu_\beta(f) = \inf\bigl(\mu(g_{j,\beta}) + j\gamma_\beta,\ 0 \leqslant j \leqslant m\bigr).$$

Remarquons que pour tout polynôme g de degré strictement inférieur à d, et pour tout β dans A nous avons $\mu_\beta(g) = \mu(g)$.

En fait le développement de f selon les puissances du polynôme-clé ϕ_β permet de définir la valeur $\mu_\alpha(f)$ pour tout $\alpha \leqslant \beta$ dans A. Plus précisément nous avons le résultat suivant.

***Lemme 3.1* (*cf.* [McL2], lemma 3.4)**. — *Soit $f = g_{m,\beta}\phi_\beta^m + \cdots + g_{1,\beta}\phi_\beta + g_{0,\beta}$ le développement de f selon les puissances de ϕ_β, alors pour tout α dans A avec $\alpha \leqslant \beta$, nous avons l'égalité :*

$$\mu_\alpha(f) = \inf\bigl(\mu(g_{j,\beta}) + j\gamma_\alpha,\ 0 \leqslant j \leqslant m\bigr).$$

Démonstration. — Nous allons montrer le résultat plus général suivant. Soit μ' une valuation augmentée définie à partir d'une valuation μ et d'un polynôme-clé ϕ pour μ, $\mu' = [\mu\,;\, \mu'(\phi) = \gamma]$, et soit ϕ' un polynôme-clé pour la valuation μ' vérifiant $\deg\phi' \geqslant \deg\phi$ avec ϕ et ϕ' non μ'-équivalents. Alors pour tout f dans $K[x]$, la valuation $\mu'(f)$ peut être calculée à partir du développement de f selon les puissances de ϕ', c'est-à-dire si $f = f_m{\phi'}^m + \cdots + f_0$, avec $\deg f_j < \deg \phi'$, nous avons

$$\mu'(f) = \inf\bigl(\mu'(f_j{\phi'}^j), 0 \leqslant j \leqslant m\bigr).$$

Dans le cas où $\deg\phi' = \deg\phi$, nous avons de plus $\phi' = \phi + h$ avec $\mu(h) = \gamma = \mu'(\phi')$, $\deg f_j < \deg\phi$ pour tout j, et nous trouvons $\mu'(f) = \inf\bigl(\mu(f_j) + j\gamma, 0 \leqslant j \leqslant m\bigr)$.

Soit $f = f_m{\phi'}^m + \cdots + f_0$ le développement de f, nous avons toujours $\mu'(f) \geqslant \inf\bigl(\mu'(f_j{\phi'}^j)\bigr)$, et si nous avons une inégalité stricte il doit exister deux indices $s \neq t$ tels que le minimum est atteint pour les deux termes $f_s{\phi'}^s$ et $f_t{\phi'}^t$. Nous choisissons l'indice t maximal parmi ceux pour les quels le minimum est atteint, nous avons alors l'inégalité

$$\mu'(f_t{\phi'}^t + \cdots + f_0) \geqslant \inf\bigl(\mu'(f), \mu'(f_m{\phi'}^m + \cdots + f_{t+1}{\phi'}^{t+1})\bigr) > \mu'(f_t{\phi'}^t).$$

Les polynômes $-f_t{\phi'}^t$ et $f_{t-1}{\phi'}^{t-1} + \cdots + f_0$ sont alors μ'-équivalents, et $(f_{t-1}{\phi'}^{t-1} + \cdots + f_0)$ est μ'-divisible par ${\phi'}^t$ avec $\deg(f_{t-1}{\phi'}^{t-1} + \cdots + f_0) < \deg{\phi'}^t$, ce qui est impossible car ${\phi'}^t$ est μ'-minimal. □

Nous voulons comparer les coefficients $g_{j,\beta}$ quand β varie. Soient $\beta' > \beta$ dans A, alors nous avons l'égalité $\phi_{\beta'} = \phi_\beta + \xi$, où ξ est un polynôme de degré strictement inférieur à d vérifiant $\mu(\xi) = \gamma_\beta$. Nous avons les égalités :

$$f = \sum_{j=0}^{m} g_{j,\beta'} \left(\phi_\beta + \xi\right)^j = \sum_{j=0}^{m} g_{j,\beta'} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \phi_\beta^r \xi^{j-r}$$
$$= \sum_{r=0}^{m} \Big(\sum_{j=r}^{m} \binom{j}{r} g_{j,\beta'} \xi^{j-r} \Big) \phi_\beta^r,$$

d'où la relation :

$$g_{r,\beta} = \sum_{j=r}^{m} \binom{j}{r} g_{j,\beta'} \xi^{j-r}.$$

En particulier nous remarquons que le coefficient $g_{m,\beta}$ de la puissance maximale est indépendant de β.

Rappelons que d'après le théorème de factorisation, pour tout polynôme f de $K[x]$ de degré n, il α_0 dans A, un élément δ dans Γ et un entier t, $0 \leqslant t \leqslant m$ avec $m = [n/d]$, tel que pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$ nous ayons l'égalité $\mu_\alpha(f) = \delta + t\gamma_\alpha$. Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.2. — *Soit un polynôme f de $K[x]$, soient $\alpha_0 \in A$, $\delta \in \Gamma$ et $t \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$ nous ayons $\mu_\alpha(f) = \delta + t\gamma_\alpha$, et soit $\beta \in A$ avec $\beta > \alpha_0$. Alors $\forall\, \alpha \in A$, $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta$, nous avons :*

$$\phi_\beta^t \underset{\mu_\alpha}{\mid} f \quad \textit{et} \quad \phi_\beta^{t+1} \underset{\mu_\alpha}{\nmid} f.$$

Démonstration. — Nous choisissons β et nous considérons les α dans A avec $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta$, alors ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α.

Soit $f = g_{m,\beta}\phi_\beta^m + \cdots + g_{1,\beta}\phi_\beta + g_{0,\beta}$ le développement de f selon les puissances de ϕ_β, où les polynômes $g_{j,\beta}$ sont de degré strictement inférieur à d et nous notons $\delta_{j,\beta} = \mu(g_{j,\beta})$. D'après le lemme 3.1, pour tout $\alpha \leqslant \beta$, nous avons l'égalité $\mu_\alpha(f) = \inf(\delta_{j,\beta} + j\gamma_\alpha)$, et le plus grand entier $n = n_\alpha$ tel que f soit μ_α-divisible par ϕ_β^n est le plus petit entier j, $0 \leqslant j \leqslant m$, tel que $\mu_\alpha(f) = \delta_{j,\beta} + j\gamma_\alpha$. En effet comme ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α, toute puissance ϕ_β^k de ϕ_β est μ_α-minimale, c'est-à-dire que tout polynôme μ_α-divisible par ϕ_β^k est de degré supérieur ou égal au degré de ϕ_β^k. Nous en déduisons que pour tout g dans $K[x]$, si $g = q\phi_\beta^k + r$ est la division euclidienne de g par ϕ_β^k, g est μ_α-divisible par ϕ_β^k si et seulement si nous avons $\mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(g)$. Nous appliquons ceci au développement de f selon les puissances de ϕ_β, et nous déduisons de $\phi_\beta^n \underset{\mu_\alpha}{\mid} f$ et de $\phi_\beta^{n+1} \underset{\mu_\alpha}{\nmid} f$, les relations :

$$\mu_\alpha\big(g_{n-1,\beta}\phi_\beta^{n-1} + \cdots + g_{0,\beta}\big) > \mu_\alpha(f) \quad \text{et} \quad \mu_\alpha\big(g_{n,\beta}\phi_\beta^{n} + \cdots + g_{0,\beta}\big) = \mu_\alpha(f),$$

et l'entier $n = n_\alpha$ vérifie $\mu_\alpha(f) = \delta_{n_\alpha,\beta} + n_\alpha\gamma_\alpha$. Par conséquent pour tout α avec $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta$, nous avons l'égalité $\mu_\alpha(f) = \delta_{n_\alpha,\beta} + n_\alpha\gamma_\alpha = \delta + t\gamma_\alpha$, c'est-à-dire $(t - n_\alpha)\gamma_\alpha = (\delta_{n_\alpha,\beta} - \delta)$. Comme n_α ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, $0 \leqslant n_\alpha \leqslant m$, et comme $\{\gamma_\alpha | \alpha_0 \leqslant \alpha < \beta\}$ est un ensemble infini, nous avons forcément $t = n_\alpha$ pour tout α et $\delta = \delta_{t,\beta}$. □

En fait nous déduisons des relations $\mu_\alpha\big(g_{n-1,\beta}\phi_\beta^{n-1}+\cdots+g_{0,\beta}\big)>\mu_\alpha(f)$ et $\mu_\alpha\big(g_{n,\beta}\phi_\beta^{n}+\cdots+g_{0,\beta}\big)=\mu_\alpha(f)$ que l'entier $n=t$ vérifie :

$$\forall\, j\geqslant t,\ \delta_{j,\beta}+j\gamma_\alpha\geqslant\delta+t\gamma_\alpha\quad\text{et}\quad\forall\, j<t,\ \delta_{j,\beta}+j\gamma_\alpha>\delta+t\gamma_\alpha.$$

Supposons qu'il existe α, avec $\alpha_0<\alpha<\beta$, et $j>t$ tels que nous ayons l'égalité $\delta_{j,\beta}+j\gamma_\alpha=\delta+t\gamma_\alpha$, alors pour α' avec $\alpha_0<\alpha'<\alpha$, nous trouvons l'inégalité $\delta_{j,\beta}+j\gamma_{\alpha'}<\delta+t\gamma_{\alpha'}$, ce qui est impossible. Par conséquent nous avons montré que pour tout α, $\alpha_0<\alpha<\beta$, le polynôme f est μ_α-équivalent à $g_{t,\beta}\phi_\beta^t$.

De plus en passant à la limite, nous trouvons que nous avons encore les inégalités :

$$\forall\, j>t,\ \delta_{j,\beta}+j\gamma_\beta>\delta+t\gamma_\beta\quad\text{et}\quad\forall\, j<t,\ \delta_{j,\beta}+j\gamma_\beta\geqslant\delta+t\gamma_\beta.$$

Proposition 3.3. — *Soit f dans $K[x]$, soient $\alpha_0\in A$, $\delta\in\Gamma$ et $t\in\mathbb{N}$ définis comme précédemment, et nous supposons que l'ensemble Λ a une borne supérieure $\overline{\gamma}$ dans $\Gamma_{\mathbb{R}}$. Alors il existe β_0, $\beta_0>\alpha_0$, tel que pour tout $\beta\geqslant\beta_0$, nous ayons :*

$$f\underset{\mu_\alpha}{\sim}g_{t,\beta}\phi_\beta^t+\cdots+g_{0,\beta},\ \forall\,\alpha>\alpha_0.$$

Remarque 3.4. — Nous rappelons que le sous-ensemble Λ de Γ permet de définir une coupure $\Gamma=\Lambda_-\sqcup\Lambda_+$, avec

$$\Lambda_-=\{\gamma\in\Gamma\mid\exists\,\gamma_\alpha\in\Lambda\text{ avec }\gamma_\alpha\geqslant\gamma\}\quad\text{et}\quad\Lambda_+=\{\gamma\in\Gamma\mid\forall\,\gamma_\alpha\in\Lambda\ \gamma_\alpha<\gamma\},$$

et cette coupure est non triviale car nous avons supposé que Λ est majoré. Si nous notons $\lambda_i\colon\Gamma\longrightarrow\overline{\Gamma}^{(i)}$ l'application du groupe Γ dans le groupe quotient $\overline{\Gamma}^{(i)}=\Gamma/\Gamma_{(i)}$, pour $i=0,1,\ldots,r$, alors il existe un entier o, $0\leqslant o\leqslant r-1$, tel que $\lambda_o(\Lambda_-)\cap\lambda_o(\Lambda_+)=\varnothing$ et $\lambda_i(\Lambda_-)\cap\lambda_i(\Lambda_+)\neq\varnothing$ pour $i>o$. L'ensemble admet une borne supérieure $\overline{\gamma}$ dans $\Gamma_{\mathbb{R}}$ si et seulement si l'entier o est égal à 0. De plus, comme nous supposons que cet ensemble Λ n'a pas d'élément maximal, nous trouvons que le sous-groupe isolé $\Gamma_{(1)}$ est forcément non discret.

Démonstration. — Soit $f=g_{m,\beta}\phi_\beta^m+\cdots+g_{0,\beta}$ le développement de f selon les puissances de ϕ_β, et il suffit de montrer que pour tout j, $t+1\leqslant j\leqslant m$ et pour tout α dans A, $\alpha>\alpha_0$, nous avons l'inégalité $\mu_\alpha\big(g_{j,\beta}\phi_\beta^j\big)>\mu_\alpha(f)$ pour β assez grand.

Nous fixons j, $t+1\leqslant j\leqslant m$, d'après la proposition précédente, pour tout $\alpha\leqslant\beta$, nous avons l'inégalité cherchée $\mu_\alpha\big(g_{j,\beta}\phi_\beta^j\big)=\delta_{j,\beta}+j\gamma_\alpha>\mu_\alpha(f)=\delta+t\gamma_\alpha$. Pour $\alpha\geqslant\beta$, nous avons $\mu_\alpha\big(g_{j,\beta}\phi_\beta^j\big)=\delta_{j,\beta}+j\gamma_\beta$ et $\mu_\alpha(f)=\delta+t\gamma_\alpha$. Soit $\overline{\gamma}$ la borne supérieure de Λ, alors nous avons :

$$\delta+t\gamma_\alpha<\delta+t\overline{\gamma}=\delta+t\gamma_{\alpha_0}+t(\overline{\gamma}-\gamma_{\alpha_0})\leqslant\delta_{j,\beta}+j\gamma_{\alpha_0}+t(\overline{\gamma}-\gamma_{\alpha_0}).$$

Il suffit par conséquent d'avoir l'inégalité :

$$\delta_{j,\beta}+j\gamma_{\alpha_0}+t(\overline{\gamma}-\gamma_{\alpha_0})\leqslant\delta_{j,\beta}+j\gamma_\beta,$$

c'est-à-dire

$$\gamma_\beta\geqslant\overline{\gamma}(j)=\gamma_{\alpha_0}+\frac{t}{j}(\overline{\gamma}-\gamma_{\alpha_0}).$$

Comme nous avons choisi $j > t$, nous avons $\overline{\gamma} > \overline{\gamma}(j)$, par conséquent, pour β suffisamment grand, c'est-à-dire vérifiant $\beta \geqslant \beta(j)$ pour un certain $\beta(j)$, nous avons encore l'inégalité $\gamma_\beta > \overline{\gamma}(j)$. Il suffit alors de choisir $\beta_0 = \sup\,(\beta(j), t+1 \leqslant j \leqslant m)$, et pour $\beta \geqslant \beta_0$, nous avons $\mu_\alpha\big(g_{m,\beta}\phi_\beta^m + \cdots + g_{t+1,\beta}\phi_\beta^{t+1}\big) > \mu_\alpha(f)$ pour tout $\alpha > \alpha_0$, d'où $f \underset{\mu_\alpha}{\sim} g_{t,\beta}\phi_\beta^t + \cdots + g_{0,\beta}$. □

Si nous ne faisons plus l'hypothèse que l'ensemble Λ a une borne supérieure dans $\Gamma_{\mathbb{R}}$, nous pouvons encore conclure dans certains cas. Plus précisément, nous considérons l'entier o défini précédemment par la coupure non triviale $\Gamma = \Lambda_- \sqcup \Lambda_+$ associée à Λ. Alors le sous-ensemble $\overline{\Lambda}_-^{(o)} = \lambda_o(\Lambda_-)$ du groupe $\overline{\Gamma}^{(o)}$ a une borne supérieure $\overline{\gamma}^{(o)}$ dans $\overline{\Gamma}_{\mathbb{R}}^{(o)} = \Gamma_{\mathbb{R}}/\Gamma_{(o),\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{r-o}$, et nous choisissons $\overline{\gamma}$ dans $\Gamma_{\mathbb{R}}$ tel que $\lambda_o(\overline{\gamma}) = \overline{\gamma}^{(o)}$.

Proposition 3.5. — *Soit f dans $K[x]$, soient $\alpha_0 \in A$, $\delta \in \Gamma$ et $t \in \mathbb{N}$ définis comme précédemment ; si le sous-ensemble $\overline{\Lambda}_-^{(o)}$ n'a pas de plus grand élément, c'est-à-dire si $\overline{\gamma}^{(o)}$ n'appartient pas à $\overline{\Lambda}_-^{(o)}$, alors il existe β_0, $\beta_0 > \alpha_0$, tel que pour tout $\beta \geqslant \beta_0$, nous ayons :*

$$f \underset{\mu_\alpha}{\sim} g_{t,\beta}\phi_\beta^t + \cdots + g_{0,\beta}, \ \forall\, \alpha > \alpha_0.$$

Démonstration. — La démonstration est semblable à celle de la proposition précédente. Comme $\overline{\gamma}^{(o)}$ n'appartient pas à $\overline{\Lambda}_-^{(o)}$, quelque soit l'élément $\overline{\gamma}$ de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ choisi, nous avons $\overline{\gamma} \notin \Lambda$ et $\forall\, \alpha$, $\gamma_\alpha < \overline{\gamma}$. Comme précédemment, il suffit de montrer que pour tout j, $t+1 \leqslant j \leqslant m$, il existe un élément $\beta(j)$ de A suffisamment grand tel que nous ayons l'inégalité

$$\gamma_{\beta(j)} > \overline{\gamma}(j) = \gamma_{\alpha_0} + \frac{t}{j}(\overline{\gamma} - \gamma_{\alpha_0}).$$

Comme $\lambda_o(\gamma_{\alpha_0}) < \overline{\gamma}^{(o)}$ et comme $t < j$, nous avons $\lambda_o(\overline{\gamma}(j)) < \overline{\gamma}^{(o)}$, et il existe δ dans $\overline{\Lambda}_-^{(o)}$ tel que $\lambda_o(\overline{\gamma}(j)) < \delta$. Si nous choisissons $\beta(j)$ tel que $\lambda_o(\gamma_{\beta(j)}) = \delta$, alors $\gamma_{\beta(j)}$ vérifie aussi $\gamma_{\beta(j)} > \overline{\gamma}(j)$. □

Remarque 3.6. — Dans le cas où l'entier o est égal à 0, c'est-à-dire où l'ensemble Λ a une borne supérieure, par hypothèse cette borne n'appartient pas à Λ. Dans le cas où l'entier o est strictement positif, il se peut très bien que l'ensemble $\overline{\Lambda}_-^{(o)}$ ait un élément maximal, alors que Λ n'en a pas. Pour étudier le comportement de la famille de valuations $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, il semble alors nécessaire d'étudier la famille de valuations composées obtenue à partir de la famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ par l'application $\lambda_o \colon \Gamma \longrightarrow \overline{\Gamma}_{(o)}$.

Nous considérons encore la famille admissible simple continue $\mathcal{S} = (\mu) \cup \mathcal{C}$, avec $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, nous supposons que le groupe des ordres Γ est de rang fini r et que le sous-ensemble Λ n'a pas de plus grand élément, mais possède une borne supérieure $\overline{\gamma}$ dans $\Gamma_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^r$.

Pour tout entier t, $t \in \mathbb{N}$, nous définissons le sous-ensemble $\widetilde{\Phi}(A)_t$ de $K[x]$ par :

$$\widetilde{\Phi}(A)_t = \big\{f \in K[x] \mid \exists\, \alpha_0 \in A, \exists\, \delta \in \Gamma \text{ tels que } \forall\, \alpha \geqslant \alpha_0 \ \mu_\alpha(f) = \delta + t\gamma_\alpha\big\}.$$

Alors les sous-ensembles $\widetilde{\Phi}(A)_t$, pour $t \in \mathbb{N}$, forment une partition de $K[x]$, l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ des polynômes f de $K[x]$ pour lesquels la famille $\big(\mu_\alpha(f)\big)$ n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang, est égal à la réunion des $\widetilde{\Phi}(A)_t$ pour $t \geqslant 1$. De plus nous avons vu que si f est un polynôme de degré strictement inférieur à $(m+1)d$, alors f appartient à $\bigcup_{t\geqslant 0}^{m} \widetilde{\Phi}(A)_t$. Nous déduisons de la proposition 3.3 que si le polynôme f appartient au sous-ensemble $\widetilde{\Phi}(A)_t$, alors il existe β_0 dans A tel que pour tout $\beta \geqslant \beta_0$, f est μ_α-équivalent, pour tout α suffisamment grand, aux t premiers termes de son développement en les puissances de ϕ_β, en particulier f est μ_α-équivalent à un polynôme de degré strictement inférieur à $(t+1)d$.

Nous supposons que l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ est non vide, et soit f un polynôme appartenant à $\Phi(A)$ de degré minimal, et quitte à multiplier f par une constante non nulle, nous pouvons toujours supposer que f est unitaire, alors f est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$. Soit $t > 0$ l'entier tel que $f \in \widetilde{\Phi}(A)_t$, alors nous avons $\widetilde{\Phi}(A)_s = \varnothing$ pour tout s avec $0 < s < t$, et le degré de f vérifie $td \leqslant \deg f < (t+1)d$. Nous voulons montrer que nous avons l'égalité $\deg f = td$, c'est-à-dire que le développement de f selon les puissances d'un polynôme-clé ϕ_β est de la forme $f = \phi_\beta^t + g_{t-1,\beta}\phi_\beta^{t-1} + \cdots + g_{0,\beta}$, ce qui généralise le résultat pour les polynômes-clés dans une famille discrète de valuations augmentées (*cf.* [**McL1**], Theorem 9.4, [**Va**], Théorème 1.11).

Théorème 3.7. — *Avec les hypothèses précédentes, tout polynôme-clé limite f pour la famille admissible simple continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, est de degré égal à un multiple entier du degré d des polynômes-clés associés (ϕ_α). De plus si nous écrivons le développement de f selon les puissances du polynôme-clé ϕ_β,*

$$f = \phi_\beta^t + g_{t-1,\beta}\phi_\beta^{t-1} + \cdots + g_{0,\beta},$$

alors $\mu_\beta(f) = t\gamma_\beta = \mu(g_{0,\beta})$ pour β suffisamment grand.

Démonstration. — Soit f un polynôme unitaire, élément de degré minimal de $\widetilde{\Phi}(A)$, et soient α_0 dans A, δ dans Γ et l'entier $t > 0$ tels que pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$ nous ayons $\mu_\alpha(f) = \delta + t\gamma_\alpha$. Alors, comme f est de degré minimal dans $\widetilde{\Phi}(A)$, nous déduisons de la proposition 3.3 que f est μ_α-équivalent, pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$, à la somme des t premiers termes de son développement selon les puissances de ϕ_β, pour tout β suffisamment grand, par conséquent, pour tout β dans A nous avons l'égalité :

$$f = g_{t,\beta}\phi_\beta^t + g_{t-1,\beta}\phi_\beta^{t-1} + \cdots + g_{1,\beta}\phi_\beta + g_{0,\beta},$$

et de plus nous avons vu que le coefficient $g_{t,\beta}$ de la plus grande puissance est indépendant de β, nous le notons g_t et nous avons $\mu(g_t) = \delta$.

Supposons que le polynôme g_t est de degré $n > 0$, c'est-à-dire n'est pas égal à 1 car nous avons supposé f unitaire. Alors, comme $n < d$, il existe un polynôme h de $K[x]$, avec degré de h strictement plus petit que d, tel que pour tout α dans A le polynôme hg_t soit μ_α-équivalent à 1. Nous avons $\mu(h) = -\mu(g_t) = -\delta$, et $\mu_\alpha(hg_t - 1) = \varepsilon_\alpha$

vérifie $\varepsilon_\alpha \geqslant \varepsilon_0 = \mu_{\alpha_0}(hg_t - 1) > 0$ pour tout α dans A. Remarquons que la famille $\big(\varepsilon_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ ne dépend pas de β.

Si nous choisissons $\beta > \alpha_0$, nous pouvons définir le polynôme f' par :

$$f' = hf + (1 - hg_t)\phi_\beta^t,$$

c'est-à-dire

$$f' = \phi_\beta^t + (hg_{t-1,\beta})\phi_\beta^{t-1} + \cdots + (hg_{0,\beta}),$$

avec pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant t-1$, $\deg(hg_{j,\beta}) \leqslant 2d-2$ et $\mu(hg_{j,\beta}) = -\delta+\delta_{j,\beta} \geqslant (t-j)\gamma_\beta$.

Pour tout α, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, nous avons

$$\mu_\alpha\big((1 - hg_t)\phi_\beta^t\big) = \varepsilon_\alpha + t\gamma_\alpha > t\gamma_\alpha = \mu_\alpha(hf),$$

par conséquent $\mu_\alpha(f') = t\gamma_\alpha$. Nous allons montrer que pour β suffisamment grand, cette égalité est vérifiée pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Soit $\overline{\gamma}$ la borne supérieure de Λ dans $\Gamma_\mathbb{R}$, il existe $\beta_1 > \alpha_0$ tel que pour tout β dans A avec $\beta > \beta_1$, nous ayons l'inégalité $t(\overline{\gamma} - \gamma_\beta) < \varepsilon_0$. Alors pour tout α dans A, $\alpha \geqslant \beta$, nous avons encore

$$\mu_\alpha\big((1 - hg_t)\phi_\beta^t\big) = \varepsilon_\alpha + t\gamma_\beta > t\overline{\gamma} > t\gamma_\alpha = \mu_\alpha(hf),$$

d'où l'égalité $\mu_\alpha(f') = t\gamma_\alpha$.

Si le polynôme f' est de degré strictement inférieur au degré de f, ce qui est équivalent à demander l'inégalité $\deg hg_{t-1,\beta} < \deg g_t + d$, alors nous trouvons une contradiction car f est un polynôme de degré minimal dans $\Phi(A)$. Nous allons voir comment dans le cas général, nous pouvons remplacer le polynôme f' par un polynôme f'', de degré strictement inférieur au degré de f, et qui lui est « équivalent ».

Comme le polynôme $\psi_\beta = hg_{t-1,\beta}$ vérifie $\mu_\alpha(\psi_\beta) = \mu(\psi_\beta)$ pour tout α dans A, il existe un polynôme h'_β de degré strictement inférieur à d tel que ψ_β et h'_β sont μ_α-équivalents pour tout α, c'est-à-dire vérifient $\mu_\alpha\big(\psi_\beta - h'_\beta\big) - \mu_\alpha\big(\psi_\beta\big) = \varepsilon'_\alpha > 0$.

Pour controler la valeur de ε'_α, rappelons que nous trouvons ce polynôme h'_β comme le reste de la division euclidienne de ψ_β par le polynôme-clé ϕ_ω, où ω est le plus petit élément de A. Nous avons alors l'égalité :

$$\psi_\beta = q\phi_\omega + h'_\beta,$$

et comme ϕ_ω est un polynôme-clé pour la valuation μ, il est μ-minimal et nous avons l'inégalité $\mu\big(q\phi_\omega\big) \geqslant \mu(\psi_\beta)$. Alors pour tout α dans A, nous avons :

$$\mu_\alpha\big(q\phi_\omega\big) = \mu(q) + \gamma_\omega > \mu(q) + \mu(\phi_\omega) \geqslant \mu(\psi_\beta) = \mu_\alpha(\psi_\beta),$$

dont nous déduisons :

$$\varepsilon'_\alpha = \mu\big(q\phi_\alpha\big) - \mu_\alpha(\psi_\beta) \geqslant \gamma_\omega - \mu(\phi_\omega) = \varepsilon'_0 > 0.$$

Nous pouvons alors définir le polynôme f'' par :

$$f'' = f' + \big(h'_\beta - hg_{t-1,\beta}\big)\phi_\beta^{t-1} = \phi_\beta^t + h'_\beta\phi_\beta^{t-1} + (hg_{t-2,\beta})\phi_\beta^{t-2} + \cdots + (hg_{0,\beta}),$$

le polynôme f'' est de degré strictement inférieur au degré de f, par conséquent f'' n'appartient pas à l'ensemble $\widetilde{\Phi}(A)$ et il existe $\alpha_1 \geqslant \alpha_0$ et δ'' dans Γ tels que $\mu_\alpha(f'') = \delta''$ pour tout $\alpha \geqslant \alpha_1$. Pour tout $\alpha \geqslant \beta$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(f''-f') &= \mu_\alpha\big((h'_\beta - hg_{t-1,\beta})\phi_\beta^{t-1}\big)\\ &= \varepsilon'_\alpha + \mu(hg_{t-1,\beta}) + (t-1)\gamma_\beta \geqslant \varepsilon'_\alpha + t\gamma_\beta > t\gamma_\beta.\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $\alpha_2 > \beta$ tel que pour tout α avec $\beta \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, nous avons $\mu_\alpha(f''-f') > \mu_\alpha(f') = t\gamma_\alpha$, d'où $\mu_\alpha(f'') = \mu_\alpha(f')$. Nous déduisons du théorème de factorisation et de $\deg f'' = td$, que nous avons en fait l'égalité $\mu_\alpha(f'') = t\gamma_\alpha$ pour tout $\alpha \leqslant \alpha_2$, par conséquent nous avons $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 > \beta$ et $\delta'' = t\gamma_{\alpha_1} > t\gamma_\beta$.

Il existe $\beta_2 > \alpha_0$ tel que pour tout β dans A avec $\beta > \beta_2$ nous ayons l'inégalité $t(\overline{\gamma} - \gamma_\beta) < \varepsilon'_0$, où $\overline{\gamma}$ est la borne supérieure de Λ dans $\Gamma_\mathbb{R}$ et où ε'_0 a été défini précédemment par $\varepsilon'_0 = \gamma_\omega - \mu(\phi_\omega) > 0$.

Supposons que nous avons choisi β vérifiant $\beta > \sup\,(\beta_1, \beta_2)$, alors pour tout $\alpha > \alpha_1$ nous avons les inégalités :

$$\mu_\alpha(f''-f') \geqslant \varepsilon'_0 + t\gamma_\beta > t\overline{\gamma} > \mu_\alpha(f') = t\gamma_\alpha > \mu_\alpha(f'') = t\gamma_{\alpha_1},$$

ce qui est impossible.

Par conséquent, nous avons montré que si f est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, pour tout β dans A le développement de f selon les puissances de ϕ_β est de la forme : $f = \phi_\beta^t + g_{t-1,\beta}\phi_\beta^{t-1} + \cdots + g_{0,\beta}$.

Nous savons que pour $\beta \geqslant \alpha_0$, les coefficients $g_{j,\beta}$, $0 \leqslant j \leqslant t-1$, de ce développement vérifient les inégalités $\mu(g_{j,\beta}) = \delta_{j,\beta} \geqslant (t-j)\gamma_\beta$, et nous voulons montrer que pour le dernier coefficient $g_{0,\beta}$ nous avons égalité. Supposons que nous ayons $\delta_{0,\beta} > t\gamma_\beta$, alors il existe $\alpha_1 > \beta$ avec $\delta_{0,\beta} > t\gamma_{\alpha_1}$. Si nous écrivons $f = q\phi_\beta + g_{0,\beta}$, pour tout α, $\beta \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, nous avons $\mu_\alpha(f) = t\gamma_\alpha \leqslant t\gamma_{\alpha_1} < \delta_{0,\beta}$, par conséquent nous trouvons :

$$\mu_\alpha(q\phi_\beta) = \gamma_\beta + \mu_\alpha(q) = t\gamma_\alpha,$$

ce qui est impossible d'après le théorème de factorisation car $\deg q < td$. □

Nous pouvons aussi préciser ce qui se passe pour le deuxième coefficient $g_{t-1,\beta}$, plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.8. — *Si t, le degré en ϕ_β du polynôme-clé f, est divisible par la caractéristique du corps K, alors le coefficient $g_{t-1,\beta}$ du développement de f selon les puissances de ϕ_β est indépendant de β dans A.*

Si le degré t n'est pas divisible par la caractéristique de K, alors pour tout β dans A nous avons l'égalité $\delta_{t-1,\beta} = \mu(g_{t-1,\beta}) = \gamma_\beta$.

Démonstration. — Nous rappelons que pour tout $\beta < \beta'$ dans A, si nous écrivons $\phi_{\beta'} = \phi_\beta + \xi$, nous avons la relation

$$g_{r,\beta} = \sum_{j=r}^{t} \binom{j}{r} g_{j,\beta'} \xi^{j-r},$$

en particulier pour $r = t-1$, nous trouvons $g_{r-1,\beta'} = g_{r-1,\beta} - t\xi$.

Supposons d'abord que t est divisible par la caractéristique de K, alors nous avons l'égalité :

$$g_{t-1,\beta'} = g_{t-1,\beta}.$$

Si t n'est pas divisible par la caractéristique de K, supposons qu'il existe β dans A avec $\delta_{t-1,\beta} = \mu(g_{t-1,\beta}) > \gamma_\beta$. Alors pour $\beta' > \beta$, nous avons $\mu(t\xi) = \mu(\xi) = \gamma_\beta < \mu(g_{t-1,\beta})$, d'où $\delta_{t-1,\beta'} = \mu(g_{t-1,\beta'}) = \gamma_\beta$, ce qui est impossible car $\gamma_\beta < \gamma_{\beta'}$. $\square$

Références

[Ab] S.S. Abhyankar – *Ramification theoric methods in algebraic geometry*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1959.

[McL1] S. MacLane – « A construction for absolute values in polynomial rings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936), p. 363–395.

[McL2] ———, « A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field », *Duke Math. J.* **2** (1936), p. 492–510.

[Va] M. Vaquié – « Extension d'une valuation », `www.math.jussieu.fr/~vaquie/prepubli/extension.ps`.

M. Vaquié, Laboratoire Émile Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, UFR MIG, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France • *E-mail :* `vaquie@picard.ups-tlse.fr`