FORMES DIFFÉRENTIELLES
SUR DES VARIÉTÉS AVEC DES ANSES FINES

Colette ANNÉ

Département de Mathématiques
Université de Nantes
2, rue de la Houssinière,
F-44072 Nantes Cedex 03 (France)

Abstract. This note presents the first approach of a work in common with Bruno Colbois [AC1], where we study the behaviour of the Hodge-Laplace Operator perturbed by the adjunction of thin handle.

Résumé. Ce texte est le premier effort d'un plus vaste travail entrepris avec Bruno Colbois pour étudier le comportement du laplacien de Hodge sous perturbation par ajout d'anses, voir [AC1].

M.S.C. Subject Classification Index (1991) : 53C21 58A10 58C40.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Nous voulons étudier ici la convergence (quand $\epsilon \to 0$) du spectre du laplacien sur les formes différentielles d'une variété riemannienne compacte $\widetilde{M}_\epsilon$, de classe C^∞ par morceaux, obtenue en ajoutant à une variété compacte orientable M^n une anse fine. Nous nous limitons ici à une anse cylindrique $C_\epsilon = [0, L] \times \mathbb{S}_\epsilon^{n-1}$ attachée à M en les points p et q. Il convient donc de supposer que la métrique de M est plate au voisinage de ces deux points. On note $\mathbb{S}_r^m$ la sphère de dimension m et de rayon r.

En posant $M_\epsilon = M - (B(p, \epsilon) \cup B(q, \epsilon))$ on a $\widetilde{M}_\epsilon = C_\epsilon \cup M_\epsilon$, ces deux parties ayant des bords isométriques.

LAPLACIEN DE HODGE SUR $X = X_1 \cup_Z X_2$

Soient X_1 et X_2 deux variétés riemanniennes orientables à bord isométrique Z. Il convient tout d'abord de prendre des orientations compatibles : si $\vec{n}_j$ est la normale à Z intérieure à X_j et ω_j les formes d'orientation de X_j, alors

$$\vec{n}_1 \lrcorner\, \omega_1 = \vec{n}_2 \lrcorner\, \omega_2 \,.$$

Notons t_j la distance au bord de chaque côté ; nous avons alors une bonne définition du premier espace de Sobolev pour les p-formes différentielles

$$H^1(\Lambda^p(X)) = \{(\Phi_1, \Phi_2) \in H^1(\Lambda^p(X_1)) \times H^1(\Lambda^p(X_2))$$
$$\text{si } \Phi_j = \alpha_j + dt_j \wedge \beta_j, \text{ alors } \alpha_{1|Z} = \alpha_{2|Z} \text{ et } \beta_{1|Z} = -\beta_{2|Z}\} \,.$$

L'opérateur $D = d + d^*$ de domaine $H^1(\Lambda^*(X))$ est alors un opérateur elliptique autoadjoint et d'image fermée. Il est donc de Fredholm et on peut faire la théorie de Hodge de X car $\mathrm{Im}\,(D) = \mathrm{Ker}\,(D)^\perp$.

Remarque. — Ici elliptique signifie que la norme de Sobolev de $H^1(\Lambda^*(X))$ est équivalente à la norme d'opérateur de D $||\Phi||_D^2 = ||\Phi||^2 + ||D(\Phi)||^2$.

Preuve. Il suffit de considérer des formes à support dans un voisinage de Z que l'on peut paramétrer par les coordonnées normales $(t_j, z \in Z)$; notons $*$ l'opérateur de Hodge de Z. On a alors la formule suivante pour une forme $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ qui s'écrit $\Phi_j = \alpha_j + dt_j \wedge \beta_j$ au voisinage de Z (voir [AC] § 3.1)

$$\int_{X_j} |D\Phi_j|^2 - |\nabla\Phi_j|^2 = \int_{X_j} < \mathcal{R}(\Phi_j), \Phi_j >$$

$$+ \int_Z \left(< \Gamma_j \Phi_j, \Phi_j > - *^{-1} \frac{\partial}{\partial t_j}(*)\beta_j \wedge *\beta_j + d_Z^* \alpha_j \wedge *\beta_j + \alpha_j \wedge *d_Z \beta_j \right)$$

où ∇ est la dérivée covariante de X, $\nabla_{\vec{n}_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + \Gamma_j$, d_Z est la différentielle de Z et d_Z^* son adjoint, $\mathcal{R}$ est le terme de courbure qui intervient dans la formule de Weitzenböck.

Si on additionne ces deux intégrales sur X_1 et sur X_2, les deux derniers termes s'éliminent à cause des conditions de recollement. On peut donc dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\int_X |\nabla\Phi|^2 - |D\Phi|^2| \leq C \left(\int_Z |\Phi|^2 + \int_X |\Phi|^2 \right) .$$

On conclut alors car (rappelons que Φ est nulle loin de Z)

$$\int_Z |\Phi|^2 \leq c^{te} \sqrt{\int_X |\Phi|^2} \sqrt{\int_X |\nabla\Phi|^2} \leq \frac{1}{2} \int_X |\nabla\Phi|^2 + C' \int_X |\Phi|^2 .$$

Remarque. — Les constantes qui interviennent ici sont des bornes du tenseur de courbure de X_1 et X_2 mais aussi des courbures principales du bord de chacune d'elles, dans notre cas ces courbures sont de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon}$ du côté de M_ϵ.

Montrons maintenant que Im D est fermée. Soit $\Theta = \lim_{n\to\infty}(L_2)D(\Phi_n)$. On peut supposer $\Phi_n \in$ Ker $(D)^\perp$. Montrons alors que la suite (Φ_n) est bornée dans L_2. En effet si ce n'était pas le cas la suite $\Psi_n = \Phi_n/||\Phi_n||$, qui est H^1-bornée, vérifierait

$\lim_{n\to\infty} D(\Psi_n) = 0$ et on pourrait en extraire une sous-suite qui convergerait faiblement H^1 et en norme L_2. Soit $\Psi \in H^1$ la limite. Elle vérifierait

$$||\Psi|| = 1 \text{ et } D(\Psi) = 0 \text{ comme distribution },$$

et donc $D(\Psi) = 0$ car $\Psi \in H^1$ mais $\Psi \in \ker(D)^\perp$. Ceci est absurde. On peut donc extraire de la suite (Φ_n) une sous-suite qui converge faiblement H^1 et en norme L_2. Soit $\Phi \in H^1$ la limite. Alors $D(\Phi) = \Theta \in \operatorname{Im}(D)$.

On peut définir alors le laplacien de Hodge de X comme étant le carré de l'opérateur elliptique D ou, ce qui revient au même, comme l'opérateur de polarisation de la forme quadratique q définie sur chaque $H^1(\Lambda^p(X))$ par $q(\Phi) = \int_X |D(\Phi)|^2$. On peut alors vérifier que le domaine de Δ est

$$\{\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) \in H^2(\Lambda^p(X_1)) \times H^2(\Lambda^p(X_2)) \text{ tels que } \Phi \in H^1(\Lambda^p(X)),$$

$$d\Phi \in H^1(\Lambda^{p+1}(X)) \text{ et } d^*\Phi \in H^1(\Lambda^{p-1}(X))\}.$$

Théorème. — *Supposons $n \geq 4$ et notons $\lambda_0(\epsilon) \leq \lambda_1(\epsilon) \leq \cdots$ le spectre de Δ agissant sur les p-formes de $\widetilde{M}_\epsilon$. Alors*

i) si $1 < p < (n-1)$ ce spectre converge vers celui des p-formes de M,

ii) si $p = 1$, notons $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots$ l'union avec multiplicité du spectre des 1-formes de M et du spectre des fonctions avec condition de Dirichlet de l'intervalle $[0, L]$ et soit $b_1 = \dim H^1(M, \mathbb{R})$ le premier espace de cohomologie de M,

$$\lambda_0(\epsilon) = \cdots = \lambda_{b_1}(\epsilon) = 0 \textit{ et pour } j > b_1, \lim \lambda_j(\epsilon) = \mu_{j-1}$$

iii) si $p = 0$ on sait déjà (voir [A]) que le spectre limite est l'union du spectre des fonctions de M et des fonctions avec condition de Dirichlet de l'intervalle $[0, L]$,

et les autres degrés se déduisent des précédents par dualité.

On a de plus convergence des espaces spectraux. En particulier en degré 1 l'asymptotique des formes propres est donné par les formes propres de M, les formes en $f(s)ds$ où s est le paramètre de longueur de $[0, L]$ et f une fonction propre avec *condition de Dirichlet au bord. La forme harmonique supplémentaire est approchée par la forme qui vaut $d(G_q - G_p)$ sur M_ϵ et ds sur C_ϵ, si G_a est le noyau de Green du laplacien de M sur les fonctions, de pôle a.*

SCHÉMA DE DÉMONSTRATION

Il suffit de traiter le cas $1 < p < (n-1)$, le degré 1 pouvant être traité par encadrement : mises à part les formes harmoniques que l'on connaît par la théorie de Hodge (il faut écrire la suite longue de Mayer-Vietoris du recouvrement de $\widetilde{M}_\epsilon$ par un cylindre de M_ϵ), les 1-formes différentielles s'obtiennent à partir des différentielles des fonctions et des codifférentielles des 2-formes. Nous suivons alors la même méthode que dans [AC], il s'agit donc de comparer à travers la formule du mini-max le problème donné avec un autre.

Notons $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$ le spectre du laplacien des p-formes de M. En coupant une forme propre de M au voisinage des points p et q, de la même façon que dans [AC] § (4.2), et en les prolongeant par 0 sur l'anse on obtient $\limsup_{\epsilon\to 0} \lambda_k(\epsilon) \leq \lambda_k$.

Regardons maintenant

$$\begin{aligned} H^1(\Lambda^p(\widetilde{M}_\epsilon)) &\xrightarrow{\widetilde{P}_\epsilon} H^1(\Lambda^p(M_\epsilon)) \oplus H^1(\Lambda^p(\mathbb{S}^1_{2L} \times \mathbb{S}^{n-1}_1)) \\ (\Phi_1, \Phi_2) &\mapsto (P_\epsilon(\Phi_1), (h_\epsilon(\Phi_2))^s) \ . \end{aligned}$$

Explications. — Ecrivons les formes sur l'anse $\Phi_2 = \alpha_2 + ds \wedge \beta_2$. On fixe l'espace du côté de l'anse en posant $h_\epsilon(\Phi_2) = \epsilon^{\frac{n-1}{2}-p}\alpha_2 + \epsilon^{\frac{n-1}{2}-p} ds \wedge \beta_2$. En effet h_ϵ réalise une isométrie entre $L_2(\Lambda^p(C_\epsilon))$ et $L_2(\Lambda^p(C_1))$. Le tore $\mathbb{S}^1_{2L} \times \mathbb{S}^{n-1}_1$ est le double de C_1 ; pour $\Phi_2 = \alpha_2 + ds \wedge \beta_2 \in H^1(\Lambda^p(C_1))$ la forme Φ_2^s est sa symétrisée

$$\begin{aligned} &\text{si } 0 \leq s \leq L \qquad \Phi_2^s(s) = \Phi_2(s) \\ &\text{si } L \leq s \leq 2L \qquad \Phi_2^s(s) = \alpha_2(2L-s) + ds \wedge \beta_2(2L-s) \ . \end{aligned}$$

P_ϵ est obtenu à partir du prolongé harmonique de Φ_1 sur les boules $B(p,\epsilon)$ et $B(q,\epsilon)$: supposons que la forme $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ soit à support dans $B(p,1) - B(p,\epsilon) \cup ([0,1] \times \mathbb{S}_\epsilon^{n-1})$ et que la métrique de M soit plate dans $B(p,1)$. Le calcul montre, dans des notations évidentes, avec d_0 la différentielle de $\mathbb{S}_1^{n-1}$ et d_0^* son adjoint, r le rayon de $B(p,1)$ et en appliquant h_ϵ à Φ_2 :

$$q(\Phi) = \int_{[0,1]\times\mathbb{S}_1^{n-1}} \frac{1}{\epsilon^2}(|d_0\alpha_2|^2 + |d_0^*\alpha_2|^2 + d_0\beta_2|^2 + d_0^*\beta_2|^2) + |\frac{\partial}{\partial s}\alpha_2|^2 + |\frac{\partial}{\partial s}\beta_2|^2$$

$$+ \int_{B(p,1)-B(p,\epsilon)} r^{n-2p-1}\left(|\frac{\partial}{\partial r}\alpha_1|^2 + |d_0\beta_1|^2 + d_0^*\beta_1|^2\right) + r^{n-2p-3}(|d_0\alpha_1|^2 + |d_0^*\alpha_1|^2) +$$

$$\frac{1}{r^{n-2p+1}}|\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-2p+1}\beta_1)|^2 - 4r^{n-2p-2} < \alpha_1, d_0\beta_1 > \quad .$$

Notons ν_1 la première valeur propre des p-formes fermées de $\mathbb{S}_1^{n-1}$; elle est non nulle car $1 < p < (n-1)$ et on a l'inégalité : $| < \alpha_1, d_0\beta_1 > | \leq \frac{1}{\nu_1}|d_0^*\alpha_1||d_0\beta_1|$. Donc si $\nu_1 > 4$, il existe une constante $C > 0$ telle que $q(\alpha_1) \leq Cq(\Phi)$ et $q(dr \wedge \beta_1) \leq Cq(\Phi)$, on peut donc utiliser le prolongement harmonique étudié dans [AC] §2. D'après [GM] on sait que si $n \geq 5$ alors $\nu_1 > 4$ et pour $n = 4$ on a $\nu_1 = 4$. Dans ce dernier cas (on a alors forcément $p = 2$), faisons la décomposition orthogonale $\alpha_1 = a_4 + A$ et de même $\beta_1 = b_4 + B$ avec $\Delta a_4 = 4a_4, d_0(a_4) = 0$ et $\Delta b_4 = 4b_4, d_0^*(b_4) = 0$. On a comme précédemment les inégalités $q(A) \leq Cq(\Phi)$ et $q(dr \wedge B) \leq Cq(\Phi)$, on peut donc faire le prolongement harmonique de cette partie. Quant à a_4 et b_4 on peut les prolonger par $\tilde{a}_4 = \frac{r^2}{\epsilon^2}a_4(\epsilon)$ et $\tilde{b}_4 = \frac{r}{\epsilon}b_4(\epsilon)$.

On vérifie alors que les opérateurs $\widetilde{P}_\epsilon$ ainsi définis sont bornés indépendamment de ϵ ce qui nous permet de conlure comme dans [AC] § 4.2 que $\liminf_{\epsilon\to 0} \lambda_k(\epsilon) \geq \lambda_k$.

La convergence des espaces propres est alors donnée par le lemme 4.4 énoncé dans [AC], on y trouve aussi les estimées du noyau de Green qui permettent de donner l'asymptotique de la nouvelle 1-forme harmonique.

Remarque. — Ces méthodes ne peuvent être utilisées en dimension 3, néanmoins on a toujours le même type de résultats [AC1].

BIBLIOGRAPHIE

[A] C. ANNÉ, *Spectre du Laplacien et écrasement d'anses*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris **20** (1987), 271–280.

[AC] C. ANNÉ, B. COLBOIS, *Opérateur de Hodge-Laplace sur des variétés compactes privées d'un nombre fini de boules*, J. Funct. Anal. **115** (1993), 190–211.

[AC1] C. ANNÉ, B. COLBOIS, *Spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d'anses*, Math. Ann. **303** (1995), 545–573.

[GM] S. GALLOT, D. MEYER, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures et Appl. **54** (1975), 259–284.