Revista Colombiana de Estadística
Volumen 25 N° 2. Págs 97 *a* 126. Diciembre 2002

Sistemas aleatorios ramificados
Segunda parte

LILIANA BLANCO *
MYRIAM MUÑOZ**

Resumen

En el presente artículo, el cual es de carácter divulgativo, se considera un sistema de partículas ramificadas, sujeto en su evolución a través del tiempo a migración, reproducción e inmigración de partículas y se estudia el comportamiento asintótico del sistema.

Palabras claves:*sistemas aleatorios ramificados, proceso de fluctuaciones, funcional característico, convergencia débil.*

Abstract

In this article, we make a brief presentation of a special case of a system of particles in the d-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^d$, which evolutions through time subject to migration and reproduction of particles. We inquire the asymptotic properties of this kind of systems.

Key words: *branching random systems, fluctuation process, characteristic funcional, weak convergence.*

*Profesora Asociada, Departamento de Estadística; Universidad Nacional de Colombia; e-mail: igmantil@ciencias.ciencias.unal.edu.co, Con el patrocinio de la División de Investigación, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, DIB.

**Profesora Asociada, Departamento de Matemáticas; Universidad Nacional de Colombia; e-mail: halil@tutopia.com, Con el patrocinio de la División de Investigación, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, DIB.

1. Introducción

Los sistemas infinitos de partículas son modelos matemáticos que se presentan en el campo de la física, la biología y otras ciencias. Ellos son útiles pues ofrecen aproximaciones para sistemas finitos muy grandes que ocurren en la realidad, tales como la descripción de la evolución de colonias de bacterias, crecimiento de tumores cancerosos, etc.

El trabajo de Martin-Löf "Limit theorems for the motion of a Poisson system of independent Markovian particles with high density" publicado en el año 1976 en Z. Wahrs.Verw.Geb. Vol. 34 es quizás el antecedente matemático más importante en el estudio de esta clase de sistemas.

De acuerdo a lo expresado por Begoña Fernández en su trabajo "Teoremas límites de alta densidad para campos aleatorios ramificados", Aportes Matemáticos. Sociedad Mat. Mexicana 1986, la importancia del trabajo de Martin-Löf radica en el hecho de que en él se relacionan dos aspectos distintos de la teoría de la difusión: el probabilístico y el físico. En la teoría de la probabilidad se estudia el movimiento aleatorio de una partícula individual y se considera la densidad de probabilidad para su posición en el espacio. En la teoría física se estudia un gas de partículas y se considera la densidad real μ de partículas en el espacio. En este caso μ es una cantidad aleatoria pues las partículas se mueven aleatoriamente. Puesto que aún en un volumen infinitesimal de gas hay muchas partículas, entonces en algún sentido la densidad es grande y las fluctuaciones deben ser muy pequeñas, por lo que la densidad real puede ser aproximada por su promedio, el cual está dado por la densidad de probabilidad.

A partir del trabajo de Martin-Löf otros matemáticos se han interesado en el estudio del comportamiento asintótico de sistemas infinitos. Entre los trabajos realizados se destacan los siguientes:
Gorostiza, L.G, Kaplan, N. [11], D.A. Dawson y Gorostiza, L.G. [5], Gorostiza, L.G. [9], Gorostiza L.G., Porter, M., Rodrigues E. [12].

Es claro que a medida que el modelo se generaliza, los métodos para su análisis se hacen cada vez más complejos.

En este artículo, que es de carácter divulgativo y está basado en el trabajo de Fernández, B. [7] se considera un tipo especial de sistema de partículas en el espacio euclidiano d-dimensional $\mathbb{R}^d$, sujeto en su evolución a través del tiempo a migración, reproducción e inmigración de partículas. En la primera parte del presente artículo [3], se trabajaron los conceptos y los resultados generales necesarios para la presentación del modelo. En esta segunda parte, se hará la aplicación de dichos resultados en la descripción y análisis del sistema de partículas objeto del estudio.

1.1. Presentación del modelo

Consideremos entonces un sistema de partículas en el espacio euclidiano d-dimensional $\mathbb{R}^d$ sujeto en su evolución a través del tiempo a emigración, reproducción e inmigración de partículas. Suponemos que el sistema está definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y que:

En el tiempo inicial $t = 0$, las partículas están distribuidas de acuerdo a un campo aleatorio de Poisson homogéneo con intensidad $\gamma > 0$, esto es, si N_0 denota el número inicial de partículas, entonces

(i)

$$\begin{aligned} N_0 : \Omega &\to M^+(\mathbb{R}^d) \\ w &\to N_0(w) : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad A \to N_0(w, A) \end{aligned}$$

Si A y B son conjuntos Borel disyuntos y tienen medida de Lebesgue finita, entonces

$$\begin{aligned} N_0(A) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ w &\to N_0(w, A) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} N_0(B) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ w &\to N_0(w, B) \end{aligned}$$

son variables aleatorias de Poisson independientes con parámetros $\gamma\lambda(A)$ y $\gamma\lambda(B)$ respectivamente (donde λ es la medida de Lebesgue).

(ii) Al transcurrir el tiempo, cada partícula emigra independientemente de las otras con un movimiento Browniano estándar en $\mathbb{R}^d$. Esto es, la probabilidad de transición tiene densidad dada por

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2t}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0.$$

(iii) Cada partícula se reproduce independientemente de las otras y de la emigración, de acuerdo a una ley de ramificación $(p_n)_n$, donde $p_n := P(\text{“}n \text{ hijas”})$. Después de un tiempo de vida distribuido con distribución exponencial con parámetro ν. Las nuevas partículas aparecen en el mismo lugar en el que se ramificaron sus progenitoras y se reproducen y emigran de la misma manera. Se supone que la ley de ramificación tiene varianza finita y se denotará su media y su segundo momento factorial por m_1 y m_2 respectivamente.

De la teoría básica de los procesos de ramificación se sabe que el parámetro de Malthus α, en este caso, está dado por $\alpha = \nu(m_1 - 1)$. El proceso se denomina crítico, subcrítico o supercrítico, según si $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ o $\alpha > 0$ respectivamente.

(iv) Partículas de una fuente externa inmigran en $\mathbb{R}^d$ de acuerdo a un campo aleatorio de Poisson en espacio tiempo $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ con intensidad $\beta > 0$.

(a) $N_t^{(2)} :=$ # de partículas que inmigran en el tiempo t. Entonces

$$\begin{aligned} N_t^{(2)} : \Omega &\to M^+(\mathbb{R}^d) \\ w &\to N_t^{(2)}(w) : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad A \to N_t^{(2)}(w, A) \end{aligned}$$

es una v.a.

(b) Si A y B son conjuntos Borel disyuntos y tienen medida de Lebesgue finita, entonces

$$\begin{aligned} N_t^{(2)}(A) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ w &\to N_t^{(2)}(w, A) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} N_t^{(2)}(B) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ w &\to N_t^{(2)}(w, B) \end{aligned}$$

son v.a. independientes con distribución Poisson con parámetros $\beta\lambda(A)$ y $\beta\lambda(B)$ respectivamente.

Cada partícula inmigrante emigra y se reproduce independientemente de las demás, según lo descrito en (ii) y (iii).

1.2. Metodología

El proceso $N = \{N_t, t \geq 0\}$, donde para cada $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ se tiene que

$$\begin{aligned} N_t(A) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ w &\to N_t(w, A) = \# \text{ de partículas del sistema en } A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

se llama campo aleatorio ramificado con inmigración.

Es claro que $N_t(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i(t)}(A)$, donde $x_i(t)$ representa la posición de la i-ésima partícula presente en t.

Por otra parte, observamos que el sistema está compuesto por dos subpoblaciones: las partículas cuyo primer ancestro es una partícula inicial y aquellas que provienen de partículas inmigrantes. Esto es,

$$N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)},$$

donde $N_t^{(1)}(A)$ (resp. $N_t^{(2)}(A)$) denota el número de partículas presentes en el tiempo t provenientes de partículas *iniciales* (resp. inmigrantes) con posiciones en A. Denotaremos por $N^T = \{N_t^T, t \geq 0\}$ el proceso definido anteriormente, pero con densidad inicial igual a γT y densidad de inmigración igual a βT. Dichos procesos se conocen como procesos de alta densidad y el objetivo es estudiar el comportamiento asintótico cuando $T \to \infty$.
Tenemos

$$\begin{aligned} N_t^T : \Omega &\to M^+(\mathbb{R}^d) \\ w &\to N_t^T(w) : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad A \to N_t^T(w, A). \end{aligned}$$

Se probará que

(1) Para $\langle N_t^T, \phi\rangle$ la v.a. definida por

$$\begin{aligned} \langle N_t^T, \phi\rangle : \Omega &\to \mathbb{R} \\ w &\to \langle N_t^T(w), \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dN_t^T(w, x), \end{aligned}$$

se cumple:

$$E\langle N_t^T, \phi\rangle = Te^{\alpha t}[\gamma + \beta(1 - e^{-\alpha t})/\alpha] \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx,$$

donde $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$.

(2) Para cada $t \geq 0$

$$T^{-1}\langle N_t^T, \phi\rangle \xrightarrow[T\to\infty]{L^2} e^{\alpha t}[\gamma + \beta(1 - e^{-\alpha t})/\alpha] \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx.$$

(3) Sea $M^T := \frac{N^T - EN^T}{T^{1/2}}$ (proceso de fluctuaciones), entonces M^T converge débilmente en el espacio $D_{S'}[\infty]$.

Para probar este último resultado se procede como sigue:

(i) Se verifica que si $\phi \in S_p(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\langle N_t^T, \phi\rangle - \int_0^t \left\langle N_s^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle ds, \quad t \geq 0$$

es una martingala (donde $(1/2)\Delta + \alpha$ es el generador infinitesimal del movimiento Browniano).

(ii) Para cada $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$

$$\langle M_t^T, \phi\rangle - \int_0^t \left\langle M_s^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle ds, \quad t \geq 0$$

es una martingala respecto a $\mathfrak{F}_t^T = \sigma(M_s^T, s \leq t)$.

(iii) Se demuestra la convergencia de M^T cuando $T \to \infty$.

2. Demostraciones

Sea $N = \{N_t, t \geq 0\}$ un campo aleatorio ramificado. Denotamos por

$$\langle N_t, \phi\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dN_t(x),$$

donde $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una aplicación para la cual la expresión anterior tiene sentido.

Se consideran $N^{(1)}$ y $N^{(2)}$ los números de partículas que provienen de partículas iniciales e inmigrantes respectivamente. Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos compactos en $\mathbb{R}^d$ con $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ y $\bigcup_k A_k = \mathbb{R}^d$. Se supone que el campo aleatorio de Poisson inicial y el campo aleatorio de Poisson de la inmigración están restringidos a A_k y $A_k \times [0, t_m]$ respectivamente (esto es, se satisface (i), y si

$$A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \cap A_k = \{C \cap A_k : C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\},$$

con $A \cap B = \emptyset$, $\lambda(A) < \infty$, $\lambda(B) < \infty$, entonces $N_0(A)$ y $N_0(B)$ son v.a. de Poisson independientes, con parámetros $\gamma\lambda(A)$ y $\gamma\lambda(B)$ respectivamente). Se denotará por $\langle N_{t_j}^{(1)}, \phi_j\rangle_{A_k}$ y $\langle N_{t_j}^{(2}, \phi_j\rangle_{A_k}$ a las restricciones de $\langle N_{t_j}^{(1)}, \phi_j\rangle$ y $\langle N_{t_j}^{(2)}, \phi_j\rangle$ a la condición dada, esto es,

$$\langle N_{t_j}^{(1)}, \phi_j\rangle_{A_k} = \sum_{i=1}^{N_0} \langle N_{t_j}^{x_i}, \phi_j\rangle$$

donde N_0 es un campo aleatorio de Poisson sobre A_k con parámetro γ y $N_{t_j}^{x_i}(C)$ denota el número de partículas en C en el tiempo t_j que provienen de la partícula en N_0 en posición x_i. Análogamente

$$\langle N_{t_j}^{(2)}, \phi_j \rangle_{A_k} = \sum_{i=1}^{N_1} \langle N_{t_j - \tau_r}^{x_r}, \phi_j \rangle,$$

donde $N_{t_j-\tau_r}^{x_r}(C)$ denota el número de partículas presentes en C en el tiempo t_j que provienen de la partícula que inmigró en el tiempo τ_r en la posición x_r. N_1 es un campo aleatorio de Poisson sobre $A_k \times [0, t_j]$ con parámetro β.

Como $\langle N_{t_j}, \phi \rangle = \langle N_{t_j}^{(1)}, \phi \rangle + \langle N_{t_j}^{(2)}, \phi \rangle$ y $N^{(1)}$ y $N^{(2}$ son independientes, entonces la función característica del vector aleatorio

$$(\langle N_{t_1}, \phi_1 \rangle_{A_k}, \langle N_{t_2}, \phi_2 \rangle_{A_k}, \ldots, \langle N_{t_m}, \phi_m \rangle_{A_k})$$

es el producto de las funciones características de los vectores

$$\left(\langle N_{t_1}^{(1)}, \phi_1 \rangle_{A_k}, \langle N_{t_2}^{(1)}, \phi_2 \rangle_{A_k}, \ldots, \langle N_{t_m}^{(1)}, \phi_m \rangle_{A_k} \right) \tag{1}$$

y

$$\left(\langle N_{t_1}^{(2)}, \phi_1 \rangle_{A_k}, \langle N_{t_2}^{(2)}, \phi_2 \rangle_{A_k}, \ldots, \langle N_{t_m}^{(2)}, \phi_m \rangle_{A_k} \right). \tag{2}$$

Sea $F_{1,A_k}(u_1, \ldots, u_n)$ la función característica de (1), esto es,

$$\begin{aligned} F_{1,A_k}(u_1, \ldots, u_n) &= E\left(\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{(1)}, \phi_j \rangle_{A_k} \right\} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{(1)}, \phi_j \rangle_{A_k} \right\} \middle| N_0 = n \right) P(N_0 = n). \end{aligned}$$

Como N_0 es un campo aleatorio sobre A_k con parámetro γ, entonces

$$P(N_0 = n) = P(N_0(A) = n) = \frac{\gamma^n [\lambda(A_k)]^n e^{-\gamma\lambda(A_k)}}{n!}.$$

Por otra parte como bajo la condición $N_0 = n$ se tiene que

$$\langle N_{t_j}^{(1)}, \phi_j \rangle_{A_k} = \sum_{i=1}^{n} \langle N_{t_j}^{X_i}, \phi_j \rangle_{A_k},$$

donde los $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a. i.i.d. con distribución uniforme en A_k (pues los n puntos están independiente y uniformemente localizados en A_k). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &F_{1,A_k}(u_1, \ldots, u_n) \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n [\lambda(A_k)]^n e^{-\gamma\lambda(A_k)}}{n!} E\left(\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \sum_{l=1}^{n} \langle N_{t_j}^{X_l}, \phi_j \rangle_{A_k} \right\}\right). \end{aligned}$$

Como las v.a. $\sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{X_l}, \phi_j \rangle_{A_k}$, $l = 1, 2, \ldots, n$ son independientes e igualmente distribuidas, entonces la función característica de la suma es igual al producto de las funciones características, las cuales coinciden con la función característica de $\sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{X_1}, \phi_j \rangle_{A_k}$. Esto es,

$$\begin{aligned} &F_{1,A_k}(u_1, \ldots, u_n) \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n [\lambda(A_k)]^n e^{-\gamma\lambda(A_k)}}{n!} \prod_{l=1}^{n} E\left(\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{X_l}, \phi_j \rangle_{A_k} \right\}\right) \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n [\lambda(A_k)]^n e^{-\gamma\lambda(A_k)}}{n!} \left[E\left(\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{X_1}, \phi_j \rangle_{A_k} \right\}\right)\right]^n. \end{aligned}$$

Como X_1 tiene distribución uniforme en A_k, entonces

$$\begin{aligned} &E\left(\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{X_1}, \phi_j \rangle_{A_k} \right\}\right) \\ &\qquad = E\left(E\left(\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{X_1}, \phi_j \rangle_{A_k} \right\} \middle| X_1 \right)\right\} \\ &\qquad = E\left(\int_{A_k} \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{x}, \phi_j \rangle \right\} dx \right) \\ &\qquad = \int_{A_k} E\left(\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N_{t_j}^{x}, \phi_j \rangle \right\} dx \right), \end{aligned}$$

entonces

$$F_{1,A_k}(u_1,\ldots,u_n) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n\,[\lambda(A_k)]^n\, e^{-\gamma\lambda(A_k)}}{n!}\left(\int_{A_k} E\exp\{i\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N_{t_j}^x,\varphi\rangle dx\right)^n,$$

como $-\gamma\lambda(A_k) = -\gamma\int_{A_k} d\lambda = -\lambda\int_{A_k} dx$, entonces

$$F_{1,A_k}(u_1,\ldots,u_n) \\ = e^{-\lambda\int_{A_k} dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma\lambda(A_k)\int_{A_k} E\left(\exp\left(i\sum_{j=1}^m u_j\langle N_{t_j}^x,\phi\rangle\right)\right)dx\right)^n}{n!},$$

es decir,

$$\begin{aligned} F_{1,A_k}(u_1,\ldots,u_n) &= e^{-\gamma\lambda(A_k)}e^{\gamma\lambda(A_k)\int_{A_k} E\left(exp\left(i\sum_{j=1}^m u_j\langle N_{t_j}^x,\phi\rangle dx\right)\right)} \\ &= e^{\gamma\int_{A_k} E\left(\exp\left(i\sum_{j=1}^m u_j\langle N_{t_j}^x,\phi\rangle\right)-1\right)dx}. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene

$$F_{2,A_k}(u_1,\ldots,u_n) \\ = \exp\left\{\beta\int_0^{t_m}\int_{A_k} E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^m u_j\langle N_{t_j-s}^x,\phi_j\rangle\right\}-1\right)dxds\right\}.$$

De donde la función característica de $\left(\langle N_{t_1}^{(1)},\phi_1\rangle_{A_k},\ldots,\langle N_{t_m}^{(1)},\phi_m\rangle_{A_k}\right)$ es

$$\exp\left\{\gamma\int_{A_k} E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^m u_j\langle N_{t_j}^x,\phi_j\rangle\right\}-1\right)dx \right. \\ \left. +\beta\int_0^{t_m}\int_{A_k} E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^m u_j\langle N_{t_j-s}^x,\phi_j\rangle\right\}-1\right)dxds\right\}.$$

Tomando límite cuando $k\to\infty$ se obtiene que la función característica del vector aleatorio $(\langle N_{t_1}, \phi_1\rangle, \ldots, \langle N_{t_m}, \phi_m\rangle)$ es

$$\begin{aligned}
&F(u_1, \ldots, u_n)\\
&= \exp\left[\gamma \int_{\mathbb{R}^d} E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j}, \phi_j\rangle\right\} - 1\right) dx\right.\\
&\qquad \left. + \beta \int_0^{t_m} \int_{\mathbb{R}^d} E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j - s}, \phi_j\rangle\right\} - 1\right) dxds\right],
\end{aligned}$$

donde $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}$.

Observación. Si $m = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
F(u_1) = \exp\Big\{&\gamma \int_{\mathbb{R}^d} E\left(\exp\left\{iu_1\langle N^x_{t_1}, \phi_1\rangle\right\} - 1\right) dx\\
&+ \beta \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}^d} E\left(\exp\left\{iu_1\langle N^x_{t_1 - s}, \phi_1\rangle\right\} - 1\right) dxds\Big\},
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned}
F(u) = \exp\Big\{&\gamma \int_{\mathbb{R}^d} E\left(\exp\left\{iu\langle N^x_{t}, \phi\rangle\right\} - 1\right) dx\\
&+ \beta \int_0^{t} \int_{\mathbb{R}^d} E\left(\exp\left\{iu\langle N^x_{t - s}, \phi\rangle\right\} - 1\right) dxds\Big\},
\end{aligned}$$

al derivar con respecto a u y evaluar la derivada en 0, se obtiene

$$\begin{aligned}
E(\langle N_t, \phi\rangle) =& \frac{d}{du}\left(\exp\left\{\gamma \int_{\mathbb{R}^d} E\left\{\exp\left\{iU\langle N^x_{t}, \phi\rangle\right\} - 1\right\} dx\right\}\right)\\
&+ \frac{d}{du}\left(\beta \int_0^{t} \int_{\mathbb{R}^d} E\left(\exp\left\{iU\langle N^x_{t - s}, \phi\rangle\right\} - 1\right) dxds\right),
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du}\left(\exp\left\{\gamma \int_{\mathbb{R}^d} E\left(\exp\left\{iu\langle N^x_{t}, \phi\rangle\right\} - 1\right) dx\right\}\right)\Bigg|_{u=0}\\
&= \exp\left\{\gamma \int_{\mathbb{R}^d} E\left\{\exp\left\{iu\langle N^{(2)}_{t}, \phi\rangle\right\} - 1\right\} dx\right\} \times\\
&\quad \times \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{du} E\left\{\exp\left\{iu\langle N^x_{t}, \phi\rangle\right\} - 1\right\} dx\Bigg|_{u=0}\\
&= \gamma \int_{\mathbb{R}^d} E\langle N^{(2)}_t, \phi\rangle dx
\end{aligned}$$

y

$$\frac{d}{du}\left(\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}E\left(\exp\left\{iu\langle N^x_{t-s},\phi\rangle\right\}-1\right)dxds\right)=\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}E(\langle N^x_{t-s},\phi\rangle)dxds.$$

Entonces

$$E(\langle N_t,\phi\rangle)=\gamma\int_{\mathbb{R}^d}E(\langle N^x_t,\phi\rangle)dx+\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}E(\langle N^x_{t-s},\phi\rangle)dxds.$$

Para $m=2$, derivando en $u_1=u_2=0$ se tiene una expresión para la covarianza entre $\langle N_{t_1},\phi\rangle$ y $\langle N_{t_2},\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}\text{Cov }\left(\langle N_{t_1},\phi\rangle,\langle N_{t_2},\psi\rangle\right)=&\gamma\int_{\mathbb{R}^d}E(\langle N^x_{t_1},\phi\rangle\langle N^x_{t_2},\psi\rangle)dx\\&+\beta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}E(\langle N^x_{t_1-s},\phi\rangle\langle N^x_{t_2-s},\psi\rangle)dxds,\quad t_1\le t_2.\end{aligned}$$

2.1. Generador infinitesimal

Sea $\mathcal{L}$ un espacio de Banach de funciones medibles, consideramos un semigrupo $\{T_t,t\ge 0\}$ de operadores lineales fuertemente continuos, definidos sobre $\mathcal{L}$, es decir, se satisface la relación $T_sT_tf=T_{s+t}f$ para todo $f\in\mathcal{L}$ y $\lim_{t\to 0^+}T_tf=f$ para todo $f\in\mathcal{L}$.

Definición 2.1. Sea $(T_t)_{t\ge 0}$ un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales en $S(\mathbb{R}^d)$. El operador $L:S(\mathbb{R}^d)\to S(\mathbb{R}^d)$ se llama el **generador infinitesimal** de $(T_t)_{t\ge 0}$ si se satisface

$$T_t\phi-\phi=\int_0^t T_sL\phi ds=\int_0^t LT_s\phi ds,$$

para todo $t\ge 0$, $\phi\in S(\mathbb{R}^d)$.

Con esta definición se extiende a $S(\mathbb{R}^d)$ la propiedad usual de generador infinitesimal de semigrupos (no necesariamente de contracciones) en espacios de Banach.

Definición 2.2. Sobre $C(\mathbb{R}^d)$ se define el semigrupo T^α_t como sigue

$$\begin{aligned}T^\alpha_t:C(\mathbb{R}^d)&\to C(\mathbb{R}^d)\\ \phi&\to T^\alpha_t\phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\\ &\qquad x\to(T^\alpha_t\phi)(x),\end{aligned}$$

con $(T_t^\alpha \phi)(x) = e^{\alpha t} T_t \phi(x)$, donde α es el parámetro maltusiano y T_t es el semigrupo Browniano, esto es,

$$T_t\phi(x) = (2\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) e^{-\|y-x\|^2/(2t)} dy, \quad t \geq 0.$$

Se tiene que T_t^α tiene generador infinitesimal $A^\alpha = (1/2)\Delta + \alpha$, con Δ el operador Laplaciano y puesto que la aplicación $t \to T_t^\alpha$ es derivable, se cumple además que $\frac{d}{dt}(T_t^\alpha) = A^\alpha T_t^\alpha$, entonces

$$T_t^\alpha \phi - \phi = \int_0^t A^\alpha T_s^\alpha \phi ds.$$

Para calcular explícitamente $E\langle N_t, \phi\rangle$ y $\operatorname{Cov}(\langle N_{t_1}^x, \phi\rangle, \langle N_{t_2}^x, \phi\rangle)$ se emplea el *argumento de renovación* condicionado a la primera inmigración.

Para calcular $E(\langle N_t^x, \phi\rangle)$ y $\operatorname{Cov}(\langle N_{t_1}^x, \phi\rangle, \langle N_{t_2}^x, \phi\rangle)$ se usa la ecuación

$$E(\langle N_t^x, \phi\rangle) = E\left(\langle N_t^x, \phi\rangle I_{\{\tau > t\}}\right) + E\left(\langle N_t^x, \phi\rangle I_{\{\tau \leq t\}}\right),$$

donde τ denota el tiempo de vida de la partícula inicial (τ tiene distribución inicial con parámetro V). Si $\tau > t$, entonces sólo tenemos una partícula y N_t^x es sólo un movimiento Browniano iniciado en x, por lo tanto,

$$\begin{aligned} E\left(\langle N_t^x, \phi\rangle I_{\{\tau > t\}}\right) &= \left((2\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) e^{-\|y-x\|^2/2t} dy\right) P(\tau > t) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi p(t, x, y) dy\right) e^{-Vt}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} &E\left(\langle N_t^x,\ \phi\rangle I_{\{\tau \leq t\}}\right) \\ &\qquad = \int_0^t V e^{-Vs} ds \int_{\mathbb{R}^d} p(s, x, y) dy \sum_{k=0}^\infty p_k E\left(\left\langle \sum_{j=1}^k N_{t-s}^{y,j}, \phi \right\rangle\right), \end{aligned}$$

donde $N_{t-s}^{y,j}(C)$ es el número de partículas en C que provienen de la j-ésima partícula producida en la ramificación el tiempo s en la posición y, $(t-s)$ unidades de tiempo después del nacimiento. Como

$$E\left(\left\langle \sum_{j=1}^k N_{t-s}^{y,j}, \phi \right\rangle\right) = kE\left(\langle N_{t-s}^y, \phi\rangle\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}E\left(\langle N_t^x,\phi\rangle\right) =& e^{-Vt}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(y)p(t,x,y)dy \\ &+\int_0^t Ve^{-Vs}ds\int_{\mathbb{R}^d}p(t,x,y)dy\sum_{k=0}^{\infty}kp_kVE\left(\langle N_{t-s}^y,\phi\rangle\right)dy.\end{aligned}$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=m_1$, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}E\left(\langle N_t^x,\phi\rangle\right) =& e^{-Vt}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(y)p(t,x,y)dy \\ &+m_1\int_0^t Ve^{-Vs}\int_{\mathbb{R}^d}p(t,x,y)dyE\left(\langle N_{t-s}^y,\phi\rangle\right)dyds.\end{aligned}$$

Para obtener la integral de $E\left(\langle N_t^x,\phi\rangle\right)$ respecto de x, se procede como sigue: sea

$$F(x,t)=E\left(\langle N_t^x,\phi\rangle\right),$$

entonces se obtiene que

$$F(x,t)=e^{-Vt}T_t\phi(x)+Vm_1\int_0^t e^{-Vs}T_s(F(x,t-s))ds,$$

esto es,

$$F(x,t)=e^{-Vt}T_t\phi(x)+Vm_1\int_0^t e^{-V(t-s)}T_{t-s}F(x,s)ds.$$

$F(x,0)=\phi(x)$. Esta es una ecuación de evolución cuya solución está dada por

$$F(x,t)=e^{\alpha t}T_t(\phi)(x)=(T_t^{\alpha}\phi)(x),$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d}E\left(\langle N_t^x,\phi\rangle\right)dx=e^{\alpha t}\int_{\mathbb{R}^d}T_t\phi(x)dx=e^{\alpha t}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx,$$

puesto que T_t es el semigrupo del movimiento Browniano. Con argumentos similares se obtiene que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}E\left(\langle N_s^x,\phi\rangle\langle N_t^x,\psi\rangle\right) \\ &\qquad=e^{\alpha t}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx+m_2V\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^s e^{\alpha r}T_{2r}\phi(x)drT_{t-s}\psi(x)dx\right).\end{aligned}$$

Si se considera el proceso $N = \{N_t, t \geq 0\}$ pero N_0^T con intensidad λT (en vez de λ) se obtiene:

$$E\left(\langle N_t^T, \phi\rangle\right) = T\left[\gamma e^{\alpha t} + \beta(e^{\alpha t} - 1)/\alpha\right] \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx,\ t \geq 0 \tag{3}$$

y

$$\text{Cov}\ \left(\langle N_s^T, \phi\rangle, \langle N_t^T, \phi\rangle\right) = TC(s, \phi, t, \psi), \tag{4}$$

donde $C(s, \phi, t, \psi)$ =Cov $(\langle N_s, \phi\rangle, \langle N_t, \phi\rangle)$.
De las anteriores expresiones se obtiene la ley de los grandes números:

$$T^{-1}\langle N_t^T, \phi\rangle \quad \underset{T\to\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} \quad e^{\alpha t}[\gamma + \beta(1 - e^{-\alpha t})/\alpha] \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx.$$

Consideramos ahora el proceso

$$M^T = \frac{N^T - EN^T}{T^{\frac{1}{2}}}. \tag{5}$$

Haciendo uso del funcional característico y del teorema de continuidad de Levy (en $S'(\mathbb{R}^d)$) se demuestra que las distribuciones finito dimensionales del proceso M^T convergen débilmente en $D_{S'}[\infty]$ y que el límite es un proceso generalizado de Markov, gaussiano, centrado, continuo y que es solución débil de Langevin. Para poder concluir la convergencia débil hay que probar la tirantez, que puede hacerse de diferentes formas, una de ellas usando martingalas.

Teorema 2.3 (Ley de los grandes números). *Para cada real $t \geq 0$ y $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$*

$$T^{-1}\langle N_t^T, \phi\rangle \xrightarrow{L^2} \begin{cases} e^{\alpha t}[\gamma + \beta(1 - e^{-\alpha t})/\alpha] \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx, & si\ \ \alpha \neq 0, \\ [\gamma + \beta t] \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx, & si\ \ \alpha = 0, \end{cases}$$

cuando $T \to \infty$.

Demostración. De la ecuación (3) se obtiene

$$
\begin{aligned}
&E\left(T^{-1}\langle N_t^T,\phi\rangle - \left[\gamma e^{\alpha t} + \frac{\beta(e^{\alpha t}-1)}{\alpha}\right]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx\right)^2 \\
=&E\Bigg(T^{-1}(\langle N_t^T,\phi\rangle)^2 - 2T^{-1}\langle N_t^T,\phi\rangle\left[\gamma e^{\alpha t} + \frac{\beta(e^{\alpha t}-1)}{\alpha}\right]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx \\
&+\left(\gamma e^{\alpha t} + \frac{\beta(e^{\alpha t}-1)}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx\right)^2\Bigg) \\
=&T^{-2}E(\langle N_t^T,\phi\rangle)^2 - 2T^{-1}E(\langle N_t^T,\phi\rangle)\left[\gamma e^{\alpha t} + \frac{\beta(e^{\alpha t}-1)}{\alpha}\right]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx \\
&+\left(\left[\gamma e^{\alpha t} + \frac{\beta(e^{\alpha t}-1)}{\alpha}\right]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx\right)^2 \\
=&T^{-2}E(\langle N_t^T,\phi\rangle)^2 - 2T^{-1}T\left[\gamma e^{\alpha t} + \frac{\beta(e^{\alpha t}-1)}{\alpha}\right]^2\left(\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx\right)^2 \\
&+\left(\left[\gamma e^{\alpha t} + \frac{\beta(e^{\alpha t}-1)}{\alpha}\right]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx\right)^2 \\
=&T^{-2}\mathrm{Var}\ (\langle N_t^T,\phi\rangle) + T^{-2}(E(\langle N_t^T,\phi\rangle))^2 \\
&-\left(\left[\gamma e^{\alpha t} + \frac{\beta(e^{\alpha t}-1)}{\alpha}\right]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dx\right)^2 \\
=&T^{-2}\mathrm{Var}\ \langle N_t^T,\phi\rangle \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

□

A continuación veremos la convergencia de las distribuciones finito dimensionales del proceso de fluctuación, para ello necesitaremos del siguiente lema auxiliar.

Lema 2.4. *Si una v.a. X real tiene momento finito de orden n, entonces*

$$E(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(iu)^k}{k!}E(X^k) + \frac{(iu)^n}{n!}[E(X^n)+\delta(u)], \quad u\in\mathbb{R},$$

donde $\delta \to 0$ cuando $u \to 0$ y $|\delta(u)| \le 2E|x|^n$ para toda u.

Sea $M^T = \{M_t^T, t \ge 0\}$ el proceso de fluctuaciones definido por (5).

Teorema 2.5 (Convergencia débil de las fluctuaciones)**.** *Existe un proceso $M = \{M_t, t\ge 0\}$ Gaussiano centrado, con valores en $S'(\mathbb{R}^d)$ con funcional de* *covarianza*

$$
\begin{aligned}
&Cov\ (\langle M_s,\phi\rangle,\langle M_t,\psi\rangle)\\
&\quad=\begin{cases} e^{\alpha t}[\gamma+\beta(1-e^{-\alpha s})/\alpha]\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx, & si\quad \alpha\neq 0,\\ \quad [\alpha+\beta s]\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t-s}\psi(x)dx, & si\quad \alpha=0\end{cases}\\
&\quad+e^{\alpha t}\gamma m_2 V\int_0^s e^{\alpha(s-r)}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dx\\
&\quad+\begin{cases} e^{\alpha t}\beta m_2 V\displaystyle\int_0^s e^{\alpha(s-r)}(1-e^{-\alpha r})/\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr,\\ \hfill si\ \alpha\neq 0\\ \quad\beta m_2 V\displaystyle\int_0^s r\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{t+s-2r}\psi(x)dxdr,\quad si\quad\alpha=0,\end{cases}
\end{aligned}
$$

para $s\leq t$, tal que $M^T\xrightarrow{d} M$ es $D_{S'}[\infty]$, cuando $T\to\infty$, donde

$$T_t\phi(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\phi(y)e^{-\|x-y\|^2/(2t)}(2\pi t)^{-d/2}dy,\quad t\geq 0.$$

Demostración. Para la demostración debemos ver dos cosas:

(a) Las distribuciones finito dimensionales de M^T convergen débilmente a las correspondientes de M cuando $T\to\infty$.

(b) Compacidad relativa débil. Debemos demostrar que para cada $\phi\in S(\mathbb{R}^d)$ y $\mathfrak{F}^T_{t,\phi}=\sigma(\langle M^T_s,\phi\rangle, s\leq t)$ se tiene que para cada $\tau>0$ y $\delta>0$, existen v.a. $\gamma^\tau_T(\delta)\geq 0$ tales que

$$E(|\langle M^T_{t+\delta},\phi\rangle-\langle M^T_t,\phi\rangle|^2\mid\mathfrak{F}^T_{t,\phi})\leq E\left(\gamma^\tau_T(\delta)\mid\mathfrak{F}^T_{t,\phi}\right),\quad 0\leq t\leq\tau,$$

y

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{T\to\infty}E(\gamma^\tau_T(\delta))=0.$$

(a) Convergencia de las distribuciones finito dimensionales. Sean $t_1\leq\cdots\leq t_m$

en $[0,\infty)$, $\phi_1,\ldots,\phi_m$ en $S(R^d)$ y $u_1,\ldots,u_m$ en $\mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}u_j\langle M_{t_j}^T,\phi\rangle\right\}\right)\\
&\quad= E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}u_jT^{-1/2}\langle N_{t_j}^T-EN_{t_j}^T,\phi_j\rangle\right\}\right)\\
&\quad= E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}u_jT^{-1/2}\langle N_{t_j}^T,\phi_j\rangle - i\sum_{j=1}^{m}u_jT^{-1/2}E\langle N_{t_j}^T,\phi_j\rangle\right\}\right)\\
&\quad= \exp\left\{-iT^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}u_jE\langle N_{t_j}^T,\phi_j\rangle\right\}\cdot E\left(\exp\left\{iT^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}u_j\langle N_{t_j}^T,\phi_j\rangle\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left\{iT^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}u_j\langle N_{t_j}^T,\phi_j\rangle\right\}\right)\\
&\quad= \exp\left\{\gamma T\int_{\mathbb{R}^d}E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}T^{-1/2}u_j\langle N_{t_j}^T,\phi_j\rangle\right\}-1\right)dx\right.\\
&\qquad\left. +\ \beta T\int_0^{t_m}\int_{\mathbb{R}^d}E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}T^{-1/2}u_j\langle N_{t_j}^x,\phi\rangle\right\}-1\right)dxds\right\},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left\{iT^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}u_j\langle N_{t_j}^T,\phi_j\rangle\right\}\right)\\
&= \exp\left\{T\int_{\mathbb{R}^d}\gamma E\left(e^{i\sum_{j=1}^{m}T^{-\frac{1}{2}}u_j\langle N_{t_j}^T,\phi_j\rangle}-1-iT^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{m}u_j\langle N_{t_j}^x,\phi_j\rangle\right)dx\right.\\
&\left.+T\int_0^{t_m}\int_{\mathbb{R}^d}\beta E\left(e^{i\sum_{j=1}^{m}T^{-\frac{1}{2}}u_j\langle N_{t_j-s}^x,\phi_j\rangle}-1-iT^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{m}u_j\langle N_{t_j}^x,\phi_j\rangle\right)dxds\right\},
\end{aligned}$$

sumando y restando

$$\frac{1}{2}\gamma T^{-1}\sum_{j,k} u_j u_k E(\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k},\phi_k\rangle$$

y

$$\frac{1}{2}\beta T^{-1}\sum_{j,k} u_j u_k E(\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k-s},\phi_k\rangle,$$

en la primera y en la segunda integral respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left\{iT^{-1/2}\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^T_{t_j},\phi_j\rangle\right\}\right)\\
&=\exp\left\{T\int_{\mathbb{R}^d}\left[\gamma E\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{m}T^{-\frac{1}{2}}u_j\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle}-1-iT^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{m}u_j\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.+\ \frac{1}{2}\gamma T^{-1}\sum_{j,k}u_j u_k E(\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k},\phi_k\rangle)\right]dx\\
&\quad+T\int_0^{t_m}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\beta E\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{m}T^{-\frac{1}{2}}u_j\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle}-1-iT^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{m}u_j\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle\right)\right.\\
&\qquad\left.\left.+\ \frac{1}{2}\beta T^{-1}\sum_{j,k}u_j u_k E(\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k-s},\phi_j\rangle\right]dxds\right\}\times\\
&\quad\times\ \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}\gamma\sum_{j,k}u_j u_k E(\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k},\phi_j\rangle)dx\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\int_{\mathbb{R}^d}\beta\sum_{j,k}u_j u_k E(\langle N^x_{t_j-s},\phi_j\rangle\langle N^x_{t_k-s},\phi_j\rangle)dxds\right\}.
\end{aligned}$$

Haciendo

$$u = T^{-1/2},$$
$$X = \sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle$$

y

$$X_2 = \sum_{j=1}^{m} u_j \langle N^x_{t_j - s}, \phi_j \rangle,$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left\{iT^{-1/2}\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^T_{t_j},\phi_j\rangle\right\}\right)\\
&= E(\exp\{iuX\})\\
&= \sum_{k=0}^{1}\frac{(iu)^k}{k!}EX^k + \frac{(iu)^2}{2!}E(X^2)+\delta(u)\\
&= 1 + iT^{-\frac{1}{2}}E\left(\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle\right) - \frac{1}{2}T^{-\frac{1}{2}}E\left(\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N^x_{t_j},\phi_j\rangle\right)^2 + \delta^{(1)}(T^{-\frac{1}{2}}),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m} T^{-1/2}u_j\langle N^x_{t_j - s},\phi\rangle\right\}\right) = E(\exp\{iuX\})\\
&= \sum_{k=0}^{1}\frac{(iT^{-1/2})^k}{k!}EX^k + \frac{(iT^{-1/2})^2}{2!}E(X^2)+\delta^{(2)}(T^{-1/2}),
\end{aligned}$$

reemplazando obtenemos:

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left\{i\sum_{j01}^{m} u_j\langle M^T_{t_j},\phi_j\rangle\right\}\right)\\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u_j u_k C(t_j,\phi_j;t_k,\phi_k)\right\}\times\\
&\qquad \times\ \exp\left\{T\int_{\mathbb{R}^d} T^{-1}\delta^{(1)}_x(T^{-1/2})dx + T\int_0^{t_m}\int_{\mathbb{R}^d} T^{-1}\delta^{(2)}_x(T^{-1/2})dxds\right\},
\end{aligned}$$

donde

$$|\delta_x^{(1)}(T^{-1/2}| \leq 2E\left(\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N_{t_j}^x, \phi_j\rangle\right)^2 \leq KE\sum_{j=1}^{m} u_j^2\langle N_{t_j}^x, \phi_j\rangle^2,$$

$$|\delta_x^{(2)}(T^{-1/2}| \leq 2E\left(\sum_{j=1}^{m} u_j\langle N_{t_j-s}^x, \phi_j\rangle\right)^2 \leq KE\sum_{j=1}^{m} u_j^2\langle N_{t_j}^x, \phi_j\rangle^2$$

y como

$$\int_{\mathbb{R}^d} E\langle N_{t_j}^x, \phi_j\rangle^2 dx < \infty$$

y

$$\int_0^{t_m}\int_{\mathbb{R}^d} E\langle N_{t_j-s}^x, \phi_j\rangle^2 dxds < \infty,$$

entonces se obtiene del teorema de la convergencia dominada que

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} E\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m} u_j\langle M_{t_j}^T, \phi_j\rangle\right\}\right)\\
&\quad= \lim_{T\to\infty}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k}^{m} u_j u_k C(t_j, \phi_j; t_k, \phi_k)\right\}\cdot\right.\\
&\qquad\qquad\left.\cdot\exp\left\{\int_{\mathbb{R}^d}\delta_x^{(1)}(T^{-1/2})dx\int_0^{t_m}\int_{\mathbb{R}^d}\delta_x^{(2)}(T^{-1/2})dxds\right\}\right]\\
&\quad= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k}^{m} u_j u_k C(t_j, \phi_j; t_k, \phi_k)\right\},
\end{aligned}$$

pero esta última es la función característica de un vector aleatorio de dimensión m, gaussiano centrado, con covarianzas $C(t_j, \phi_j; t_k, \phi_k)$. Por el teorema de continuidad de Levy se sigue que el vector aleatorio

$$\big(\langle M_{t_1}^T, \phi_1\rangle, \ldots, \langle M_{t_m}^T, \phi_m\rangle\big)$$

converge en distribución a dicho vector aleatorio gaussiano cuando $T \to \infty$. □

(b) Para demostrar la compacidad relativa, basta demostrar la convergencia débil, por ello nuestro objetivo es demostrar que el proceso de fluctuación converge débilmente. Ya hemos probado que las distribuciones finito dimensionales del proceso convergen en distribución a las de un proceso Gaussiano centrado.

Para poder concluir que el proceso de fluctuación converge en distribución a un proceso Gaussiano centrado, debemos verificar que $\{M_t^T, t \geq 0\}$ es relativamente compacto. Para hacerlo debemos usar los siguientes resultados.

Sea $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con valores en un espacio polaco $(E, \mathfrak{E})$ (es decir, un espacio métrico separable y completo), donde $\mathfrak{E}$ es la σ-álgebra de Borel de E y sea $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ una filtración tal que X es adaptado a ella.

Definición 2.6. Un proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con valores en un espacio polaco $(E, \mathfrak{E}))$ es un proceso de Markov respecto de la filtración $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ si para toda función $f \in \mathcal{B}(E)$ (el espacio de funciones medibles definidas en E a valor real) se cumple que

$$E(f(X_{t+s})|\mathfrak{F}_t) = E(f(X_{t+s})|X_t), \quad s, t \geq 0. \tag{6}$$

(6) nos permite definir un operador en $\mathcal{B}(E)$ tal que

$$T_s f(X_t) = E(f(X_{t+s})|\mathfrak{F}_t), \tag{7}$$

podemos ver que

$$\begin{aligned} T_{s+u} f(X_t) &= E(f_{t+s+u})|\mathfrak{F}_t) = E(E(f(X_{t+s+u})|\mathfrak{F}_{t+s})|\mathfrak{F}_t) \\ &= E(T_u f(X_{t+s})|\mathfrak{F}_t) = T_s T_u f(X_t), \end{aligned}$$

es decir, $(T_t)_{t \geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, ya que efectivamente se cumple que $\|T_t\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}(E)$ un subespacio de Banach, y sea $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigrupo de contracciones definido sobre $\mathcal{L}$, decimos que un proceso de Markov X corresponde al semigrupo $(T_t)_{t \geq 0}$ si

$$E(f(X_{t+s})|\mathfrak{F}_t) = T_s f(X_t), \quad f \in \mathcal{L}.$$

Consideremos el semigrupo $(T_t)_{t \geq 0}$ tal que $T_t f(x)$ sea $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{E}$-medible para toda $f \in \mathcal{L}$.

Teorema 2.7. *Sea $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con valores en un espacio polaco $(E, \mathfrak{E})$. Si X es proceso de Markov respecto de la filtración $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ que corresponde al semigrupo $(T_t)_{t \geq 0}$ de contracciones sobre $\mathcal{L}$ con generador infinitesimal L, entonces para cada $f \in D(L)$ el proceso $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ definido por*

$$Y_t = f(X_t) - \int_0^t Lf(X_u)du, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

es una martingala respecto a la filtración $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$.

Si además Y es cuadrado integrable y $f^2 \in D(L)$, entonces existe un proceso creciente único $A = \{A_t, t \geq 0\}$ tal que $Y^2 - A$ es una martingala y A está definido por

$$A_t = \int_0^t [Lf^2 - 2fLf](X_s)ds, \quad t \geq 0$$

(ver [7]).

Demostración. Sea $0 \leq s < t$,

$$\begin{aligned}
E(Y_t|\mathfrak{F}_s) &= Y_s + E(f(X_t)|\mathfrak{F}_s) - f(X_s) - E\left(\int_s^t Lf(X_u)du\Big|\mathfrak{F}_s\right) \\
&= Y_s + T_{t-s}f(X_s) - f(X_s) - \int_s^t T_{u-s}Lf(X_s)du \\
&= Y_t + T_{t-s}f(X_s) - f(X_s) - \int_0^{t-s} T_uLf(X_s)du = Y_t,
\end{aligned}$$

por las propiedades del operador infinitesimal. $\square$

Como se mencionó en el modelo, el movimiento de las partículas se rige por el movimiento Browniano y el tiempo de vida es exponencial, el proceso $N^T = \{N_t^T, t \geq 0\}$ es un proceso de Markov. Se demostró también que N^T toma valores en $\mathcal{M}_p^+(\mathbb{R}^d)$, siendo éste un espacio polaco, entonces se puede aplicar lo demostrado en el artículo "Sistemas de Ramificación I". Sea $\mathcal{B}(\mathcal{M}_p^+(\mathbb{R}^d))$ el espacio de todas las funciones continuas y acotadas de $\mathcal{M}_p^+(\mathbb{R}^d)$ en $\mathbb{R}$ y sea $F \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_p^+(\mathbb{R}^d))$ de la forma

$$F(\mu) = f(\langle \mu, \phi \rangle), \quad f \in C_b^2(\mathbb{R}), \quad \phi \in S(\mathbb{R}^d), \quad \mu \in \mathcal{M}_p^+(\mathbb{R}^d),$$

donde $C_b^2(\mathbb{R})$ es el espacio de las funciones reales definidas en $\mathbb{R}$, con derivadas continuas y acotadas hasta de segundo orden. Sea

$$\begin{aligned}
L_2(\langle \mu, \phi \rangle) =& f'(\langle \mu, \phi \rangle)\langle \mu, (1/2)\Delta\phi \rangle + \frac{1}{2}f''(\langle \mu, \phi \rangle)\langle \mu, \Delta\phi|^2 \rangle) \\
&+ V \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=0}^{\infty} p_n[f(\langle \mu, \phi \rangle + (n-1)\phi(x)) - f(\langle \mu, \phi \rangle)]\mu(dx) \\
&+ \beta T \int_{\mathbb{R}^d} [f(\langle \mu, \phi \rangle + \phi(x)) - f(\langle \mu, \phi \rangle)]dx. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Teorema 2.8. *El operador L_2 es el generador infinitesimal del proceso N^T y para cada $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ y $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, se tiene que*

$$f(\langle N_t^T, \phi\rangle) - \int_0^t Tf(\langle N_s^T, \phi\rangle)ds, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

es una martingala respecto a la filtración $\mathfrak{F}_t = \sigma\left(\langle N_s^T, \psi\rangle, s \leq t, \psi \in S(\mathbb{R}^d)\right)$ para $t \geq 0$.

Observemos que los términos del primer renglón de (9) corresponden al generador infinitesimal del movimiento Browniano, el segundo de la ramificación y el tercero de la inmigración. para $f(x) = x$ la ecuación (9) queda como sigue

$$\begin{aligned} Tf(\langle \mu, \phi\rangle) =& \frac{1}{2}\langle \mu, (1/2)\Delta\phi\rangle \\ &+ V\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{n=0}^{\infty} p_n[\langle \mu, \phi\rangle + (n-1)\phi(x) - \langle \mu, \phi\rangle]\mu(dx) \\ &+ \beta\int_{\mathbb{R}^d}[\langle \mu, \phi\rangle + \phi(x) - \langle \mu, \phi\rangle]dx \\ =& \langle \mu, (1/2)\Delta\phi\rangle) + V(m_1 - 1)\langle \mu, \phi\rangle + \beta T(\langle \lambda, \phi\rangle) \\ =& \langle \mu, (1/2)\Delta\phi\rangle) + \alpha\langle \mu, \phi\rangle + \beta T(\langle \lambda, \phi\rangle), \end{aligned}$$

donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, así por el teorema 2.8

$$\langle N_t^T, \phi\rangle - \int_0^t \left[\left\langle N_s^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle + \beta T\langle \lambda, \phi\rangle\right] ds, \quad t \geq 0,$$

también es una martingala.

Corolario 2.9. *Si se comienza con una sola partícula en el punto x y no hay inmigración, entonces*

$$\langle N_t^T, \phi\rangle - \int_0^t \left\langle N_s^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle ds, \quad t \geq 0$$

es una martingala.

Teorema 2.10. *Sea $\{X^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de procesos estocásticos en $D_{S'}[\infty]$, $\mathfrak{F}_{t,\phi}^{(n)} = \sigma(\langle X_s^n, \phi\rangle, s \leq t)$, $\Phi = \{\phi_i, i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso en $S(\mathbb{R}^d)$ y $T \subseteq [0, \infty)$ denso. Entonces, si para cualquier escogencia $\phi_1, \ldots, \phi_m \in \Phi$, $t_1, \ldots, t_m \in T$ y $m \in \mathbb{N}$ se tiene que el vector aleatorio*

$$(\langle X_{t_1}^{(n)}, \phi_1\rangle, \ldots, \langle X_{t_m}^{(n)}, \phi_m\rangle)$$

converge en distribución a alguna distribución de probabilidad en $\mathbb{R}^m$, y si existe $\beta > 0$ tal que para todo $\tau, \delta > 0$ existen v.a. $\gamma^{\tau}_{n,\phi}(\delta) \geq 0$ tales que

$$E\left(| \left\langle X^{(n)}_{t+\delta}, \phi \right\rangle - \left\langle X^{(n)}_t, \phi \right\rangle |^{\beta} \middle| \mathfrak{F}^{(n)}_{t,\phi} \right) \leq E\left(\gamma^{\tau}_{n,\phi}(\delta \middle| \mathfrak{F}^{(n)}_{t,\phi} \right)$$

para $0 \leq t \leq \tau$ y

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} E\left(\gamma^{\tau}_{n,\phi}(\delta) \right) = 0,$$

entonces existe un único proceso X en $D_{S'}[\infty]$ tal que $X^{(n)} \xrightarrow{d} X$.

Teorema 2.11. *Sea $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso en $D_{\mathbb{R}}[\infty]$ y $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ una filtración tal que X es $\mathfrak{F}_t$-adaptado. Si existen procesos adaptados $\{\theta^{(1)}_t, t \geq 0\}$ y $\{\theta^{(2)}_t, t \geq 0\}$ tal que*

$$M_t = X_t - \int_0^t \theta^{(1)}_s ds, \quad t > 0$$

es una martingala cuadrado integrable con proceso creciente (en la descomposición de Doob-Meyer): $\int_0^t \theta^{(2)}_s ds$, $t \geq 0$, entonces para cada $\tau > 0$ existe una v.a. $\gamma_\tau(\delta) \geq 0$ con

$$E((X_{t+\delta} - X_t)^2 | \mathfrak{F}_t) \leq E(\gamma_\tau(\delta) | \mathfrak{F}_t), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

$\gamma_\tau(\delta)$ puede ser tomada como:

$$\gamma_\tau(\delta) = 2\left[\delta \sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \theta^{(2)}_t + \delta^2 \sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} (\theta^{(1)}_t)^2 \right].$$

Para el proceso de fluctuaciones $\{M^T_t, t \geq 0\}$ se tienen los siguientes resultados:

Teorema 2.12. *Para cada $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ se tiene que*

$$\langle M^T_t, \phi \rangle - \int_0^t \left\langle M^T_s, ((1/2)\Delta\phi + \alpha)\, \phi \right\rangle ds, \quad t \geq 0$$

es una martingala cuadrado integrable respecto a la filtración $\mathfrak{F}^T_t$, con $\mathfrak{F}^T_t = \sigma(M^T_s, s \leq t)$, $t \geq 0$.

Teorema 2.13. *El proceso $M^T = \{M^T_t, t \geq 0\}$ tiene una versión en $D_{S'}[\infty]$.*

Observación. Del teorema 2.12 se sigue entonces que existe un único proceso creciente $A = \{A_t, t \geq 0\}$ tal que

$$\left(\langle M_t^T, \phi \rangle - \int_0^t \theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds \right)^2 - A_t$$

es una martingala, donde

$$\theta_{T,\phi}^{(1)}(s) := \left\langle M_s^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\, \phi \right\rangle .$$

En este caso el proceso creciente A está dado por

$$A_t = \int_0^t \theta_{T,\phi}^{(2)}(s)ds,$$

donde

$$\theta_{T,\phi}^{(2)}(s) := T^{-1} \left\langle N_s^T, |\Delta\phi|^2 + V(m_2 - m_1 + 1)\phi^2 \right\rangle + \beta\langle \lambda, \phi^2 \rangle.$$

Aplicando el teorema (2.11) se tiene que para cada $\tau > 0$ y $\delta > 0$ existe una v.a. $\gamma_T^\tau(\delta) \geq 0$ con

$$E\left(\left(\left\langle M_{t+\delta}^T, \phi \right\rangle - \langle M_t^T, \phi \rangle \right)^2 \middle| \mathfrak{F}_t^T \right) \leq E\left(\gamma_T^\tau(\delta) | \mathfrak{F}_t^T \right) \tag{11}$$

para $0 \leq t \leq \tau$.

$\gamma_T^\tau(\delta)$ puede ser tomado como

$$\gamma_T^\tau(\delta) = 2\left[\delta \sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \theta_{T,\phi}^{(2)}(t) + \delta^2 \sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \left[\theta_{T,\phi}^{(1)}(t) \right]^2 \right].$$

Como $\mathfrak{F}_{T,\phi}^T \subseteq \mathfrak{F}_t^T$ entonces la relación (11) sigue siendo válida si tomamos $\mathfrak{F}_{t,\phi}^T$ en lugar de $\mathfrak{F}_t^T$. Por el teorema (2.10) se tiene que para verificar la convergencia en distribución de nuestro proceso de fluctuaciones basta con probar que

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{T \to \infty} E(\gamma_T^\tau(\delta)) = 0.$$

Como

$$E(\gamma_T^\tau(\delta)) = 2\delta E\left(\sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \theta_{T,\phi}^{(2)}(t) \right) + 2\delta^2 E\left(\sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \left[\theta_{T,\phi}^{(1)}(t) \right]^2 \right),$$

entonces debemos verificar que

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{T \to \infty} \delta^2 E\left(\sup_{0 \leq t \leq \tau+\delta} \left[\theta_{T,\phi}^{(1)}(t) \right]^2 \right) = 0$$

y que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{T\to\infty}\delta E\left(\sup_{0\le t\le \tau+\delta}\theta^{(2)}_{T,\phi}(t)\right)=0.$$

Para hacerlo vamos a buscar una cota superior para $E\left(\sup_{0\le t\le\tau+\delta}\left[\theta^{(1)}_{T,\phi}(t)\right]^2\right)$, lo cual equivale a encontrar una cota superior para $E\left(\sup_{0\le t\le\tau+\delta}\left(\langle M^T_t,\phi\rangle\right)^2\right)$ y una cota superior para $\delta E\left(\sup_{0\le t\le\tau+\delta}\theta^{(2)}_{T,\phi}(t)\right)$, lo cual equivale a encontrar una cota superior para $E\left(\sup_{0\le t\le\tau+\delta}\left(\langle M^T_t,\phi\rangle\right)\right)$.

Usando la desigualdad $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ tenemos

$$\begin{aligned}
&E\left(\sup_{0\le t\le\tau+\delta}\langle M^T_t,\phi\rangle^2\right)\\
=&E\left(\sup_{0\le t\le\tau+\delta}\left[\left(\langle M^T_t,\phi\rangle-\int_0^t\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)ds\right)+\int_0^t\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)ds\right]^2\right)\\
\le&2E\left(\sup_{0\le t\le\tau}\left(\langle M^T_t,\phi\rangle-\int_0^t\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)ds\right)^2\right)\\
&+2E\left(\sup_{0\le t\le\tau}\left(\int_0^t\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)ds\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que:

$$\left(\int_0^t 1\cdot\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)ds\right)^2\le\int_0^t 1^2ds\cdot\int_0^t\left(\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)\right)^2ds=t\int_0^t\left(\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)\right)^2ds,$$

entonces

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{0\le t\le\tau}\langle M^T_t,\phi\rangle^2\right)\le&2E\left(\sup_{0\le t\le\tau}\left(\langle M^T_t,\phi\rangle-\int_0^t\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)ds\right)^2\right)\\
&+2E\left(\sup_{0\le t\le\tau}t(\int_0^t\left(\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)\right)^2ds\right)\\
\le&2E\left(\sup_{0\le t\le\tau}\left(\langle M^T_t,\phi\rangle-\int_0^t\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)ds\right)^2\right)\\
&+2E\left(\tau(\int_0^\tau\left(\theta^{(1)}_{T,\phi}(s)\right)^2ds\right).
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Doob para martingalas se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\left[E \sup_{0\leq t\leq \tau}\left(\langle M_t^T,\phi\rangle - \int_0^t \theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds\right)^2\right]^{1/2}\\
&\leq 2\left[E\left(\langle M_\tau^T,\phi\rangle - \int_0^\tau \theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds\right)^2\right]^{1/2}\\
&\leq 2\left[E\left(\langle M_\tau^T,\phi\rangle^2\right)\right]^{1/2} + 2E\left[\left(\int_0^\tau \theta_{T,\phi}^{(1)}(s)ds\right)^2\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
E\left(\langle M_t^T,\phi\rangle\right)^2 =& T^{-1}\mathrm{Var}\ \langle N_t^T,\phi\rangle = T^{-1}\cdot T\cdot C(t,\phi;t,\phi)\\
=& e^{\alpha t}\left[\gamma+\beta\left(1-e^{-\alpha t}\right)/\alpha\right]\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_0\phi(x)dx\\
&+ e^{\alpha t}\gamma m_2 V\int_0^t e^{\alpha(t-r)}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{2(t-r)}\phi(x)dxdr\\
&+ e^{\alpha t}\beta m_2 V\int_0^t e^{\alpha(t-r)}\left(1-e^{-\alpha r}\right)/\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)T_{2(t-r)}\phi(x)dxdr.
\end{aligned}
$$

Además se sabe que:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\left|\phi(x)T_{2(t-r)}\phi(x)\right|dx = \int_{\mathbb{R}^d}|\phi(x)||T_{2(t-r)}\phi(x)|dx\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d\frac{(1+|x_j|)^2}{(1+|x_j|)^2}|\phi(x)||T_{2(t-r)}\phi(x)|dx\\
&\quad\leq \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d\frac{1}{(1+|x_j|)^2}\sup_x\prod_{j=1}^d(1+|x_j|)^2|\phi(x)|\sup_x|T_{2(t-r)}\phi(x)|dx\\
&\quad\leq \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d\frac{1}{(1+|x_j|)^2}\|\phi\|_2^2dx = \|\phi\|_2^2\left(\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d\frac{1}{(1+|x_j|)^2}dx\right) =: K<\infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
E\left(\langle M_t^T,\phi\rangle\right)^2 \leq &\left[e^{\alpha t}\left(\gamma+\beta\left(1-e^{-\alpha t}\right)/\alpha\right) + e^{\alpha t}\gamma m_2 V\int_0^t e^{\alpha(t-r)}dr\right.\\
&\left.+ e^{\alpha t}\beta m_2 V\int_0^t e^{\alpha(t-r)}\cdot\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}dr\right]\cdot K\cdot\|\phi\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Si $\alpha > 0$ se obtiene que:

$$E\langle M_t^T, \phi\rangle^2 \leq M\|\phi\|_2^2 e^{2\alpha t},$$

donde $M < +\infty$ es una constante. Luego

$$\begin{aligned} E\left(\theta_{T,\phi}^{(1)}(s)\right)^2 &= E\left(\left\langle M_s^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle^2\right) \\ &\leq M \cdot \|((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\|_2^2\, e^{2\alpha s} \end{aligned}$$

y por ende

$$\int_0^\tau E\left(\theta_{T,\phi}^{(1)}(s)\right)^2 ds \leq M \cdot \|((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\|_2^2\, \frac{e^{2\alpha\tau} - 1}{2\alpha},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} &E\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}\left(\theta_{T,\phi}^{(1)}\right)^2\right) = E\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}\left\langle M_s^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle^2\right) \\ &\leq 2E\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}\left(\left\langle M_t^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle - \int_0^t \theta_{T,((1/2)\Delta+\alpha)\phi}^{(1)}(s)ds\right)^2\right) \\ &+ 2\tau E\left(\int_0^t \left(\theta_{T,((1/2)\Delta+\alpha)\phi}^{(1)}(s)\right)^2 ds\right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &\left[E\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}\left\langle M_t^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle - \int_0^t \theta_{T,((1/2)\Delta+\alpha)\phi}^{(1)}(s)ds\right)^2\right]^{1/2} \\ &\leq 2\left[E\left\langle M_s^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle^2\right]^{1/2} \\ &\quad + 2\tau^{1/2}\left[\int_0^t E\left(\theta_{T,((1/2)\Delta+\alpha)\phi}^{(1)}(s)\right)^2 ds\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} &\left[E\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}\left\langle M_t^T, ((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\right\rangle - \int_0^t \theta_{T,((1/2)\Delta+\alpha)\phi}^{(1)}(s)ds\right)^2\right]^{1/2} \\ &\qquad \leq 2\left(M \cdot \|((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\|_2^2\, e^{2\alpha t}\right)^{1/2} \\ &\qquad\qquad + 2\left[M \cdot \|((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\|_2^2\, \frac{e^{2\alpha\tau} - 1}{2\alpha}\right]^{1/2} \\ &\qquad = 2M_1\|\phi\|_2 e^{\alpha t} + 2\tau^{1/2} M_1\,\|((1/2)\Delta + \alpha)\,\phi\|_2 \left(\frac{e^{2\alpha\tau} - 1}{2\alpha}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{T\to\infty}\delta^2 E\sup_{0\leq s\leq\tau+\delta}\left(\theta^{(1)}_{T,\phi}\right)^2=0.$$

Análogamente se verifica que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{T\to\infty}E\sup_{0\leq s\leq\tau+\delta}\left(\theta^{(2)}_{T,\phi}\right)^2=0$$

y así

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{T\to\infty}E\left(\gamma^{\tau}_{T}(\delta)\right)=0.$$

3. Conclusiones

Se ha visto que en la demostración de la convergencia del proceso de fluctuación juega un papel importante el proceso creciente de la martingala asociada. Sin embargo, obtener explícitamente el proceso creciente requiere en muchos caso de cómputos bastante complejos, es por ello, que varios investigadores han dedicado sus esfuerzos en obtener nuevos criterios de convergencia sin hacer uso del proceso creciente [1], [4], [16].

Estos nuevos criterios han sido probados en la descripción del comportamiento asintótico de ciertos sistemas de partículas ramificadas, por ejemplo en [10] y [14], sería interesante ver si estos criterios son aplicables al modelo aquí presentado.

Bibliografía

[1] Aldous, D. Stopping times and tightness, II, *Ann. Probab.* 17. (1989) pp. 586-595.

[2] Billingsley, P *Convergence in Probability Measures*, Wiley, New York, (1968).

[3] Blanco, Liliana y Muñoz, Myriam. Sistemas aleatorios ramificados, primera parte. *Revista Colombiana de Estadística* Vol. 25 No.1 (2002). pp 15-30.

[4] Cremers, H., Kadelka, D. On weak convergence of integral functions of stochastic process with applications to processes taking paths in L_p^E. *Stoch. Pro. Appl.* 21. (1986). pp 305-317.

[5] Dawson D.A. y Gorostiza, L.G. Limit theorems for supercritical branching random fields. *Math. Nach. Vol. 118* (1984).

[6] Doob, J.L. *Stochastic Processes*, Wiley, New York, (1962).

[7] Fernández, B. *Teoremas Límites de Alta Densidad Para Campos Aleatorios Ramificados*, Sociedad Matemática Mexicana, Ciudad de México, (1986).

[8] Gelfand, I.M. & Vilenkin, N,V. *Generalized Funktions*, Vol 4, Academic Press. New York. (1966).

[9] Gorostiza, L.G. Limit theorems for supercritical branching random fields with inmigration *Adv. Appl. Math.* 9 (1988).

[10] Gorostiza, L.G., Fernández, Begoña., A Criterion of convergence of generalized processes and an application to a supercritical branching particle system. *Can. J. Math.* Vol 43 (5) (1991). pp 985-997.

[11] Gorostiza, L.G, Kaplan, N. Invariance principle for branching random motions. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 25 (1980).

[12] Gorostiza, L.G., Porter, M., Rodrigues, E. A simulation of a stochastic model for air pollution by particulate matter. *Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados, IPN Departamento de Matemáticas (México).* Reporte interno No. 316. (Noviembre 2001).

[13] Gorostiza, L.G., Rodrigues, E. A stochastic model for transport of particulate matter in air. An asymptotic analysis. *Acta Applicandae Mathematicae.* Vol 59 (1999). pp 21-43.

[14] López Mimbela, J.A. Límites de un sistema de partículas con ramificación crítica bajo cambios de escala espacial-temporal. Actas del Cuarto Congreso Latinoamricano de Probabilidad y Estadística Matemática. Sección de Probabilidad No. 3. Septiembre 1990. pp 261-274.

[15] Martin-Löf, Limit theorems for the motion of a Poisson system of independent Markovian particles with high density, *Z. Wahrs. Ver. Geb*, Vol 34, (1976).

[16] Mitoma, I. Tighness of probabilities in $C([0,1],S')$ and $D([0,1],S')$. *Ann. Probab.* 11 (1983). pp 989-999.