Revista Colombiana de Estadística
Junio 2009, volumen 32, no. 1, pp. 145 a 156

Una reparametrización de la distribución triangular basada en las distribuciones skew-simétricas

A reparametrization of Triangular Distribution based on the Skew-Symmetric Distributions

Juan F. Olivares-Pacheco[1,a], David Elal-Olivero[1,b], Héctor W. Gómez[2,c], Heleno Bolfarine[3,d]

[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Atacama, Copiapó, Chile

[2]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad de Antofagasta, Antofagasta, Chile

[3]Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidad de São Paulo, São Paulo, Brasil

Resumen

En este trabajo se considera un nuevo enfoque para el estudio de la distribución triangular usando el desarrollo teórico detrás de las distribuciones Skew. La distribución triangular aquí entregada se obtiene por reparametrización de la distribución triangular usual. Se estudian las principales propiedades probabilísticas, incluidos los momentos, coeficientes de asimetría y kurtosis; además, se muestra una representación estocástica para el modelo estudiado, que proporciona un método sencillo y eficiente para la generación de variables aleatorias. Así mismo, se implementa la estimación por el método de los momentos y, a través de un estudio de simulación, se ilustra el comportamiento de las estimaciones de los parámetros.

***Palabras clave*:** distribuciones skew, distribución triangular, asimetría, kurtosis.

Abstract

In this paper a new approach is considered for studying the triangular distribution using the theoretical development behind Skew distributions. Triangular distribution are obtained by a reparametrization of usual triangular distribution. Main probabilistic properties of the distribution are studied,

[a]Instructor y estudiante de doctorado en estadística. E-mail: jolivares@mat.uda.cl
[b]Profesor asociado. E-mail: delal@mat.uda.cl
[c]Profesor asociado. E-mail: hgomez@uantof.cl
[d]Profesor titular. E-mail: hbolfar@ime.usp.br

including moments, asymmetry and kurtosis coefficients, and an stochastic representation, which provides a simple and efficient method for generating random variables. Moments estimation is also implemented. Finally, a simulation study is conducted to illustrate the behavior of the estimation approach proposed.

***Key words*:** Skew distribution, Triangular distribution, Skewness, Kurtosis.

1. Introducción

La distribución triangular con función de densidad de probabilidad (fdp) igual a

$$f_X(x \mid a, m, b) = \frac{2}{b-a} \times \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & a \leq x < m; \\ \frac{b-x}{b-m}, & m \leq x \leq b. \end{cases} \tag{1}$$

es útil como una aproximación inicial en situaciones en que no es posible obtener datos confiables o en situaciones en que se disponen de pocos de ellos. Esta distribución se emplea en economía, donde el interés de estudio se refiere al análisis de la duración de proyectos económicos usando las siguientes estimaciones: optimista, pesimista y más probable. La distribución de la forma descrita en (1) ha sido estudiada ampliamente por muchos autores. Tempranamente lo hizo Ayyangar (1941); también existes un amplio estudio de esta distribución entre 1962 y 1999, donde el enfoque está centrado en el análisis de la metodología PERT (Project Evaluation and Review Technique) (ver Clark (1962), Grubbs (1962), MacCrimmon & Ryavec (1964), Moder & Rodgers (1968), Vãduva (1971), Williams (1992), Keefer & Bodily (1983), y Johnson (1997) por mencionar algunos). Más aún, una reciente monografía dada por Kozt & Van Drop (2004) muestra con detalles los trabajos realizados con la distribución de la forma de (1).

El principal objetivo de las distribuciones Skew es estudiar modelos estadísticos paramétricos que permitan modelar datos provenientes de distribuciones asimétricas unimodales y bimodales (Elal-Olivero et al. (2009)). Usualmente, el problema de datos asimétricos ha sido tratado mediante transformaciones de los mismos, de modo que las observaciones transformadas puedan estudiarse mediante el modelo normal. Este procedimiento presenta al menos dos inconvenientes: el primero se relaciona con la determinación de la transformación requerida para obtener normalidad; el segundo, con la interpretación de los resultados obtenidos a partir de los datos transformados. Estos aspectos muestran con claridad la conveniencia de disponer modelos que incorporen parámetros en su estructura paramétrica para modelar lo simétrico de los datos.

Una de las primeras distribuciones asimétricas, denominadas Skew, fue estudiada por Azzalini (1985), que presenta una forma de generar distribuciones asimétricas a través de la incorporación de un parámetro de asimetría a distribuciones simétricas. Particularmente, Azzalini estudia la distribución Skew-Normal, algunas de sus propiedades son abordadas formalmente en el caso univariado. Mudholkar & Hutson (2000) presenta otro enfoque para generar distribuciones Skew, denominado familia Epsilon-Skew-Normal. Una familia más general, denominada Epsilon-

Skew-Exponencial-Potencia, fue estudiada por Arellano-Valle et al. (2005). Estos y los subsecuentes trabajos en distribuciones Skew se basan en distribuciones con soporte infinito. Una importante y reciente referencia en tales modelos aparecen en el libro editado por Genton (2004). Una de las características que presenta este tipo de distribuciones, considerada en este trabajo, está que la asimetría es representada por un parámetro.

Por tanto, en este trabajo, se presenta una reparametrización de la distribución dada en (1), con el fin de obtener una estructura paramétrica, tal que la asimetría propia de esta distribución sea caracterizada por un parámetro, y así explicar este modelo a través de un parámetro de localización, escala y asimetría. Estudiar desde este enfoque la distribución triangular permite mostrar algunas propiedades básicas; por ejemplo, representación estocástica, momentos y coeficientes de asimetría y kurtosis. Además, se llevan a cabo estudios de simulación para investigar el comportamiento de los parámetros.

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2, se muestra la reparametrización de la distribución triangular realizada. En la sección 3, se muestra la representación estocástica para la nueva distribución. En la sección 4, se dan los momentos de la distribución y, en particular se analizan los coeficientes de asimetría y kurtosis. En la sección 5, se obtienen los estimadores de momentos y las varianzas asintóticas para los parámetros de la distribución. También se realiza un estudio de simulación. Los comentarios finales son presentados en la sección 6.

2. Una nueva parametrización de la distribución triangular

Para realizar la reparametrización, consideremos la transformación $a = \mu - \sigma(1+\varepsilon)$, $b = \mu + \sigma(1+\varepsilon)$ y $m = \mu$ en (1), donde los parámetros se definen por, μ localización, σ escala y ε asimetría. Entonces, podemos redefinir (1):

Definición 1. Si la variable aleatoria X se distribuye de acuerdo con la densidad

$$f_X(x \mid \mu, \sigma, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{x-\mu}{\sigma(1+\varepsilon)}\right), & \mu - \sigma\,(1+\varepsilon) \le x \le \mu; \\ \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{x-\mu}{\sigma(1-\varepsilon)}\right), & \mu < x \le \mu + \sigma\,(1-\varepsilon)\,. \end{cases} \tag{2}$$

entonces X se distribuye triangularmente con parámetros μ, σ y ε, denotado como $X \sim T(\mu, \sigma, \varepsilon)$, donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $|\varepsilon| < 1$.

***Observación* 1.** (a) El triángulo generado por la densidad dada en (2) presenta una única moda μ, con base de longitud constante igual a 2σ. (b) Cuando $\varepsilon = 0$, la densidad dada en (2) es simétrica en torno a μ; además, presenta una base fija en $[\mu - \sigma,\ \mu + \sigma]$. (c) Sea $X \sim T(\mu, \sigma, \varepsilon)$. Si $Y = X + \sigma\varepsilon$, entonces

$$f_Y(y \mid \mu, \sigma, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{y-(\mu+\sigma\varepsilon)}{\sigma(1+\varepsilon)}\right), & \mu - \sigma \le y \le \mu + \sigma\varepsilon; \\ \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{y-(\mu+\sigma\varepsilon)}{\sigma(1-\varepsilon)}\right), & \mu + \sigma\varepsilon < y \le \mu + \sigma. \end{cases} \tag{3}$$

Note que el triángulo generado por $f_Y(y \mid \mu, \sigma, \varepsilon)$ presenta una base fija en $[\mu - \sigma,\ \mu + \sigma]$.

3. Representación estocástica

En esta sección se muestra la representación estocástica de la distribución triangular bajo la reparametrización dada en la sección anterior.

Proposición 1. *Sean H e Y variables aleatorias independientes, donde $H = R_1 - R_2$, con R_i variables aleatorias independientes de distribución uniforme* $(0, 1)$ *para $i = 1, 2$ y $P(Y = -(1+\varepsilon)) = \frac{1+\varepsilon}{2}$, $P(Y = (1-\varepsilon)) = \frac{1-\varepsilon}{2}$. Por tanto, si $W = |H|Y$, entonces $W \sim T(0, 1, \varepsilon)$, donde $|\varepsilon| < 1$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
F_W(w) &= P\left(W \leq x\right) \\
&= P\left(|H|Y \leq w\right) \\
&= \frac{1+\varepsilon}{2}\left(1 - P\left(|H| \leq -\frac{w}{1+\varepsilon}\right)\right) + \frac{1-\varepsilon}{2} P\left(|H| \leq \frac{w}{1-\varepsilon}\right) \\
F_W(w) &= \frac{1+\varepsilon}{2} - \frac{1+\varepsilon}{2} F_{|H|}\left(\frac{-w}{1+\varepsilon}\right) + \frac{1-\varepsilon}{2} F_{|H|}\left(\frac{w}{1-\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

Derivando, se tiene que

$$f_W(w) = \frac{1}{2} f_{|H|}\left(\frac{-w}{1+\varepsilon}\right) + \frac{1}{2} f_{|H|}\left(\frac{w}{1-\varepsilon}\right)$$

donde $f_{|H|}(t) = 2(1-t)$, $0 < t < 1$. Por tanto, si $0 \leq \frac{-w}{1+\varepsilon} < 1$, entonces

$$f_W(w) = 1 + \frac{w}{1+\varepsilon}$$

Y si $0 < \frac{w}{1-\varepsilon} < 1$, se tiene

$$f_W(w) = 1 - \frac{w}{1-\varepsilon}$$

Luego,

$$f_W(w) = \begin{cases} 1 + \frac{w}{1+\varepsilon}, & -(1+\varepsilon) \leq w \leq 0; \\ 1 - \frac{w}{1-\varepsilon}, & 0 < w \leq 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Haciendo $X = \mu + \sigma W$, se obtiene obtenemos la densidad de (2). Además, es fácil ver que si $R_i \sim U(0, 1)$ para $i = 1, 2$, se tiene que

$$f_{R_1 - R_2}(u) = \begin{cases} 1 + u, & -1 \leq u \leq 0; \\ 1 - u, & 0 < u \leq 1. \end{cases}$$

considerando que la distribución de la diferencia de dos variables aleatorias es dada por $f_{R_1-R_2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{R_1,R_2}(u+v,v)\,dv$.

Entonces, se tiene que $F_{|H|}(t) = F_{R_1-R_2}(t) - F_{R_1-R_2}(-t)$, lo cual implica que $f_{|H|}(t) = f_{R_1-R_2}(t) + f_{R_1-R_2}(-t)$, $0 < t < 1$; por tanto, $f_{|H|}(t) = 2(1-t)$, $0 < t < 1$. □

Usando los resultados dados en la proposición 1, se puede desarrollar un algoritmo para generar variables aleatorias con distribución de acuerdo con la distribución triangular. Tal algoritmo es presentado a continuación.

Algoritmo 3.1. Generación de variables aleatorias triangulares.

1. Sean $R_i \sim U(0,1)$, $\forall i = 1,2,3$, variables aleatorias independientes.
2. Calcular $|H| = |R_1 - R_2|$.
3. Si $0 \leq R_3 \leq \frac{1+\varepsilon}{2}$, entonces $Y = -(1+\varepsilon)$. En otro caso, $Y = (1-\varepsilon)$.
4. Calcular $W = |H|Y$, con $W \sim T\,(0,1,\varepsilon)$.
5. Hacer $X = \mu + \sigma W$ con $X \sim T(\mu,\sigma,\varepsilon)$, donde μ y σ son parámetros de localización y escala, respectivamente.

4. Momentos

4.1. Momentos

La representación estocástica presentada en la proposición 1 permite calcular de forma simple los momentos de la distribución triangular, considerando la independencia entre las variables aleatorias $|H|$ e Y.

Proposición 2. *Sean $W \sim T(0,1,\varepsilon)$ y $X \sim T(\mu,\sigma,\varepsilon)$, con $X = \mu+\sigma W$. Entonces el n-ésimo momento de la variable X es dado por*

$$\mu_n = E\left[X^n\right] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mu^{n-i}\sigma^i \frac{(-1)^i\,(1+\varepsilon)^{i+1} + (1-\varepsilon)^{i+1}}{(i+1)\,(i+2)} \tag{4}$$

Demostración. Ya que $X \sim T(\mu,\sigma,\varepsilon)$, con $X = \mu+\sigma W$, se tiene que

$$E\left[X^n\right] = E\big[(\mu+\sigma W)^n\big]$$

Considerando el teorema del binomio, $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k$, se tiene

$$E\left[X^n\right] = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mu^{n-i}\sigma^i E\Big[W^i\Big]$$

Por otro lado, si $W = |H|Y$, entonces

$$E\left[W^k\right] = E\Big[(|H|Y)^k\Big] = E\Big[|H|^k\Big]E\Big[Y^k\Big]$$

El k-ésimo momento de la variable aleatoria $|H|$ es dado por

$$E\Big[|H|^k\Big] = \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

Además, el k-ésimo momento de la variable aleatoria Y es dado por

$$\begin{aligned} E\Big[Y^k\Big] &= (-1)^k (1+\varepsilon)^k \frac{(1+\varepsilon)}{2} + (1-\varepsilon)^k \frac{(1-\varepsilon)}{2} \\ &= \frac{(-1)^k (1+\varepsilon)^{k+1} + (1-\varepsilon)^{k+1}}{2} \end{aligned}$$

Entonces, el k-ésimo momento de la variable aleatoria W es

$$E\left[W^k\right] = \frac{(-1)^k (1+\varepsilon)^{k+1} + (1-\varepsilon)^{k+1}}{(k+1)(k+2)}$$

lo cual implica que el k-ésimo momento de la variable aleatoria X es

$$E\left[X^n\right] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mu^{n-i} \sigma^i \frac{(-1)^i (1+\varepsilon)^{i+1} + (1-\varepsilon)^{i+1}}{(i+1)(i+2)}$$

$\square$

Corolario 1. *Sea* $X \sim T(\mu, \sigma, \varepsilon)$*. Entonces*

$$E[X] = \mu - \frac{2\sigma\varepsilon}{3} \tag{5}$$

$$V(X) = \sigma^2 \left(\frac{3+\varepsilon^2}{18}\right) \tag{6}$$

Considerando la biyección existente entre los parámetros (a, b, m) y $(\mu, \sigma, \varepsilon)$, a saber $\mu = m$, $\sigma = (b-a)/2$ y $\varepsilon = (2m - b - a)/2$, usando (4) se obtienen los momentos de la distribución triangular en función de los parámetros (a, b, m).

4.2. Coeficientes de asimetría y kurtosis

Ahora se estudiarán los coeficientes de asimetría y kurtosis de la distribución triangular en esta nueva reparametrización.

Proposición 3. *El coeficiente de asimetría de una variable aleatoria* $X \sim T(0, 1, \varepsilon)$ *es dado por*

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon\left(\varepsilon^2 - 9\right)}{5\left(\varepsilon^2 + 3\right)^{3/2}} \tag{7}$$

Debido que $|\varepsilon| < 1$*, entonces*

$$-\frac{2}{5}\sqrt{2} \leq \sqrt{\beta_1} \leq \frac{2}{5}\sqrt{2} \tag{8}$$

Demostración. Usando el coeficiente estandarizado, se tiene que

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3}{\left(\mu_2 - \mu_1^2\right)^{3/2}}$$

donde μ_1, μ_2 y μ_3 son los tres primeros momentos obtenidos a partir de la ecuación (4). $\square$

Proposición 4. *El coeficiente de kurtosis de una variable aleatoria $X \sim T(\mu, \sigma, \varepsilon)$ es dado por*

$$\beta_2 = \frac{12}{5} \tag{9}$$

Demostración. Usando el coeficiente de kurtosis estandarizado se tiene que

$$\beta_2 = \frac{\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4}{\left(\mu_2 - \mu_1^2\right)^2}$$

donde μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 son los cuatro primeros momentos obtenidos a partir de la ecuación (4). $\square$

5. Inferencia estadística basada en el método de momentos

En esta sección se presentarán los estudios inferenciales basados en los momentos de (2). Para una discusión de los estimadores de máxima verosimilitud se recomienda ver Van Dorp & Kotz (2002).

5.1. Inferencia para el parámetro de asimetría

Proposición 5. *Sea $W_1, \dots, W_n$ una muestra aleatoria de la distribución $W \sim T(0, 1, \varepsilon)$, con función de densidad dada por (2), entonces el estimador de momentos es dado por*

$$\widehat{\varepsilon}_M = -\frac{3}{2}\overline{W} \tag{10}$$

donde

a) $\widehat{\varepsilon}_M$, es insesgado.

b) $ECM(\widehat{\varepsilon}_M) = \frac{3+\varepsilon^2}{8n}$, error cuadrático medio.

Demostración. Usando los resultados dados en las ecuaciones (5) y (6) para $W \sim T(0, 1, \varepsilon)$, se tiene que

a) $E\left[\widehat{\varepsilon}_M\right] = E\left[\frac{-3}{2}\overline{W}\right] = \frac{-3}{2n}\sum_{i=1}^{n} E\left[W_i\right] = \frac{-3}{2}\frac{-2}{3}\varepsilon = \varepsilon$

b) $ECM(\widehat{\varepsilon}_M) = V(\widehat{\varepsilon}_M) = \frac{9}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} V(W_i) = \frac{9}{4n}\left\{\frac{3+\varepsilon^2}{18}\right\} = \frac{3+\varepsilon^2}{8n}$

□

5.1.1. Estudio de simulación para el parámetro de asimetría

Ahora se presentan los resultados del estudio de simulación realizado al parámetro de asimetría ε. El objetivo principal de este estudio es verificar el comportamiento del estimador de momento para este parámetro.

Se generaron variables aleatorias Skew Triangular usando el algoritmo 3.1, para $\varepsilon = -0.9$, -0.7, -0.5, -0.3, 0, 0.3, 0.5, 0.7 y 0.9, con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ fijos. Todas las simulaciones son realizadas para cuatro diferentes tamaños muestrales, $n = 30$, 50, 100 y 200. La tabla 1 presenta la media y las desviaciones estándar para las estimaciones basadas en 1000 iteraciones.

Tabla 1: Media y desviaciones estándar simuladas para la estimación de ε.

	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
ε	$\widehat{\varepsilon}_M(SD)$	$\widehat{\varepsilon}_M(SD)$	$\widehat{\varepsilon}_M(SD)$	$\widehat{\varepsilon}_M(SD)$
−0.9	−0.898(0.129)	−0.903(0.098)	−0.899(0.069)	−0.898(0.048)
−0.7	−0.699(0.121)	−0.699(0.093)	−0.700(0.066)	−0.700(0.046)
−0.5	−0.497(0.110)	−0.501(0.089)	−0.497(0.061)	−0.499(0.044)
−0.3	−0.298(0.116)	−0.301(0.087)	−0.300(0.061)	−0.299(0.044)
0	0.000(0.113)	0.003(0.086)	−0.000(0.061)	−0.001(0.042)
0.3	0.297(0.115)	0.296(0.088)	0.300(0.062)	0.301(0.044)
0.5	0.502(0.117)	0.498(0.090)	0.501(0.065)	0.499(0.044)
0.7	0.696(0.121)	0.700(0.095)	0.702(0.068)	0.700(0.047)
0.9	0.903(0.126)	0.902(0.098)	0.903(0.069)	0.900(0.048)

5.2. Inferencia para los tres parámetros

Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria desde la distribución $X \sim T(\mu, \sigma, \varepsilon)$ con función de densidad dada en (2), entonces, usando (4), se calculan los tres primeros momentos poblacionales y se igualan con los tres primeros momentos muestrales para obtener los estimadores de momentos para los parámetros de localización, escala y asimetría. Los momentos poblacionales vienen dados por

$$E\left[X\right] = \mu - \frac{2\sigma\varepsilon}{3} \tag{11}$$

$$E\left[X^2\right] = \mu^2 - \frac{4\mu\sigma\varepsilon}{3} + \frac{\sigma^2\left(1+3\varepsilon^2\right)}{6} \tag{12}$$

$$E\left[X^3\right] = \mu^3 - 2\mu^2\sigma\varepsilon + \frac{\mu\sigma^2\left(1+3\varepsilon^2\right)}{2} - \frac{2\sigma^3\varepsilon\left(1+\varepsilon^2\right)}{5} \tag{13}$$

mientras que los momentos muestrales son

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i^k \tag{14}$$

De (14), se obtiene obtenemos $\overline{X}$, $\overline{X^2}$, $\overline{X^3}$ y se igualan con (11), (12) y (13), respectivamente. Este sistema de ecuaciones (15), es resuelto en función de $\widehat{\mu}_M$, $\widehat{\sigma}_M$ y $\widehat{\varepsilon}_M$, que representan los estimadores de momentos de μ, σ y ε.

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_M - \frac{2\widehat{\sigma}_M\widehat{\varepsilon}_M}{3} &= \overline{X} \\ \widehat{\mu}_M^2 - \frac{4\widehat{\mu}_M\widehat{\sigma}_M\widehat{\varepsilon}_M}{3} + \frac{\widehat{\sigma}_M^2\left(1+3\widehat{\varepsilon}_M^2\right)}{6} &= \overline{X^2} \\ \widehat{\mu}_M^3 - 2\widehat{\mu}_M^2\widehat{\sigma}_M\widehat{\varepsilon}_M + \frac{\widehat{\mu}_M\widehat{\sigma}_M^2\left(1+3\widehat{\varepsilon}_M^2\right)}{2} - \frac{2\widehat{\sigma}_M^3\widehat{\varepsilon}_M\left(1+\widehat{\varepsilon}_M^2\right)}{5} &= \overline{X^3} \end{aligned} \tag{15}$$

La distribución asintótica de los momentos se presentan a continuación.

Proposición 6. *Sean $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria para la distribución $T(\mu,\sigma,\varepsilon)$. Sean $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\sigma,\varepsilon)$ y $E_k = E\left(X^k\right)$, $k = 1,\ 2,\ 3$. Si $\mu_6(\boldsymbol{\theta}) < \infty$ y $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{M}}(n)$ son los correspondientes estimadores de momentos, entonces se tiene que*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{M}}(n) - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_3(0, \Gamma(\boldsymbol{\theta})) \tag{16}$$

donde $\Gamma(\boldsymbol{\theta}) = H^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \sum \left[H^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right]^T$, $\sum = \left\{\left(E_{i+j} - E_iE_j\right)_{ij}\right\}$ *y*

$$H(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial\mu} & \frac{\partial E_1}{\partial\sigma} & \frac{\partial E_1}{\partial\varepsilon} \\ \frac{\partial E_2}{\partial\mu} & \frac{\partial E_2}{\partial\sigma} & \frac{\partial E_2}{\partial\varepsilon} \\ \frac{\partial E_3}{\partial\mu} & \frac{\partial E_3}{\partial\sigma} & \frac{\partial E_3}{\partial\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{17}$$

con E_1, E_2 y E_3 como los tres primeros momentos poblacionales dados en (11), (12) *y* (13).

Demostración. La demostración utiliza resultados de la teoría asintótica mostradas por Sen & Singer (1993). □

5.2.1. Estudio de simulación para los tres parámetros

Ahora se presentarán varios resultados de simulación para los parámetros de localización, escala y asimetría. Se generan variables aleatorias triangulares a través del algoritmo 3.1; los momentos muestrales se calculan usando (14). Debido a la complejidad del sistema (15), no se puede obtener alguna solución algebraica; entonces se usa una solución numérica para obtener los estimadores de $\widehat{\mu}_M$, $\widehat{\sigma}_M$ y $\widehat{\varepsilon}_M$. El comando `fsolve` en el software MAPLE ha sido empleado para implementar este procedimiento, el cual se muestra a continuación.

Algoritmo 5.1. Simulación para los estimadores muestrales de μ, σ y ε.

1. Fijar valores iniciales para los parámetros μ, σ y ε.
2. Generar una muestra aleatoria de tamaño n desde el algoritmo 3.1.

3. Usando la muestra generada en el paso 2, calcular los momentos muestrales $\overline{X}$, $\overline{X^2}$ y $\overline{X^3}$.
4. Calcular $\widehat{\mu}_M$, $\widehat{\sigma}_M$ y $\widehat{\varepsilon}_M$ usando el sistema de ecuaciones (15).
5. Repetir los pasos 2, 3 y 4, al menos 1000 veces.
6. Las estimaciones se obtienen calculando $\widehat{\mu}_M = \sum_{i=1}^{j} \widehat{\mu}_i/j$, $\widehat{\sigma}_M = \sum_{i=1}^{j} \widehat{\sigma}_i/j$ y $\widehat{\varepsilon}_M = \sum_{i=1}^{j} \widehat{\varepsilon}_i/j$, con $j = 1000$.

La tabla 2 muestra algunos resultados obtenidos de la implementación del algoritmo descrito en 5.1, que ilustran también las desviaciones estándar de los estimadores.

TABLA 2: Media y desviaciones estándar simuladas para estimaciones de μ, σ y ε.

				$n = 100$	
μ	σ	ε	$\widehat{\mu}_M(SD)$	$\widehat{\sigma}_M(SD)$	$\widehat{\varepsilon}_M(SD)$
10	2	0	9.929(0.402)	1.967(0.136)	−0.023(0.169)
15			14.994(0.538)	1.975(0.133)	0.004(0.163)
20			20.974(0.677)	1.983(0.138)	−0.002(0.160)
10	3	0	9.986(0.501)	2.982(0.213)	−0.003(0.162)
	4		9.956(0.626)	3.987(0.269)	−0.009(0.170)
	5		9.948(0.696)	4.949(0.325)	−0.008(0.159)
5	2	0	5.003(0.302)	1.986(0.137)	0.003(0.162)
		0.5	4.929(0.319)	1.987(0.146)	0.467(0.192)
		−0.5	5.106(0.310)	2.008(0.141)	−0.431(0.181)
				$n = 200$	
μ	σ	ε	$\widehat{\mu}_M(SD)$	$\widehat{\sigma}_M(SD)$	$\widehat{\varepsilon}_M(SD)$
10	2	0	9.952(0.359)	1.972(0.102)	−0.015(0.112)
15			14.989(0.506)	1.990(0.103)	0.001(0.112)
20			19.982(0.657)	1.989(0.104)	0.002(0.112)
10	3	0	10.028(0.419)	2.990(0.157)	0.010(0.112)
	4		9.980(0.475)	3.983(0.213)	−0.004(0.110)
	5		9.945(0.536)	4.973(0.257)	−0.010(0.111)
5	2	0	4.995(0.237)	1.982(0.106)	0.000(0.112)
		0.5	4.954(0.271)	1.994(0.118)	0.478(0.157)
		−0.5	5.043(0.266)	1.993(0.113)	−0.475(0.155)

6. Comentarios finales

En este trabajo, se ha considerado un nuevo enfoque para la presentación de la distribución triangular con los conceptos de distribuciones Skew. Tal representación de la distribución triangular permite enriquecer aspectos inferenciales y propiedades de la distribución triangular. El mostrar una representación estocástica para el modelo en cuestión da ciertas ventajas al llevar a cabo algún estudio de simulación, ya que la representación estocástica permite la generación de variables aleatoria y se suma como una nueva opción al desarrollar estos experimentos. De los estudios de simulación, se observa que la inferencia realizada por el método de momentos es muy consistente y sencilla. Además, si $X \sim T(\mu, \sigma, \varepsilon)$, entonces la transformación $Y = X + \sigma\varepsilon$ (ver observación 1.b) permite generar una distribución triangular en que la base del triángulo queda fija y la moda, variable, como se presenta típicamente en la literatura. Esto ofrece grandes dificultades para el análisis y estudio.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros y a la editora por sus valiosos comentarios. La investigación de H.W. Gómez ha sido parcialmente financiada por el Proyecto FONDECYT (Chile), 1060727. J. F. Olivares-Pacheco agradece a la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología-CONICYT por financiar sus estudios de doctorado en la Pontificia Universidad Católica de Chile. El trabajo de H. Bolfarine ha sido parcialmente financiado por CNPq-Brasil.

[Recibido: mayo de 2008 — Aceptado: abril de 2009]

Referencias

Arellano-Valle, R. B., Gómez, H. W. & Quintana, F. A. (2005), 'Statistical Inference for a General Class of Asymmetric Distributions', *Journal of Statistical Planning and Inference* **128**, 427–443.

Ayyangar, A. S. K. (1941), 'The Triangular Distribution', *Mathematics Student* **9**, 85–87.

Azzalini, A. (1985), 'A Class of Distribution which Include the Normal Ones', *Scandinavian Journal of Statistics* **12**, 171–178.

Clark, C. E. (1962), 'The PERT Model for the Distribution of an Activity', *Operations Research* **10**, 405–406.

Elal-Olivero, D., Gómez, H. W. & Quintana, F. A. (2009), 'Bayesian Modeling using a Class of Bimodal Skew-Elliptical Distributions', *Journal of Statistical Planning and Inference* **139**, 1484–1492.

Genton, M. G. (2004), *Skew-Elliptical Distributions and their Applications: A Journey Beyond Normality*, Chapman & Hall/CRC.

Grubbs, F. E. (1962), 'Attempts to Validate Certan PERT Statistics or a 'Picking on PERT'', *Operations Research* **10**, 912–915.

Johnson, D. (1997), 'The Triangular Distribution as a Proxy for the Beta Distribution in Risk Analysis', *The Statistician* **46**, 387–398.

Keefer, D. L. & Bodily, S. E. (1983), 'Three-point Approximations for Continuous Random Variables', *Management Science* **29**(5), 595–609.

Kozt, S. & Van Drop, J. R. (2004), *Beyond Beta, Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Aplications*, World Scientific Press, Republic of Singapore.

MacCrimmon, K. R. & Ryavec, C. A. (1964), 'An Analytic Study of the PERT Assumptions', *Operations Research* **12**, 16–38.

Moder, J. J. & Rodgers, E. G. (1968), 'Judgment Estimate of the Moments of PERT type Distributions', *Management Science* **15**(2), 76–83.

Mudholkar, G. S. & Hutson, A. D. (2000), 'The Epsilon-Skew-Normal Distribution for Analysing Near-Normal Data', *Journal of Statistical Planning and Inference* **83**, 291–309.

Sen, P. K. & Singer, M. J. (1993), *Large Sample Method in Statistics*, Chapman & Hall, New York, United States.

Vãduva, I. (1971), Computer Generation of Random Variables and Vector Related to PERT Problems, *in* B. Bereanu, ed., 'Proceedings of the 4th conference on probability theory', Brasov, Rumania, pp. 381–395.

Van Dorp, J. & Kotz, S. (2002), 'A Novel Extension of the Triangular Distribution and its Parameter Estimation', *The Statistician* **51**, 63–79.

Williams, T. M. (1992), 'Practical use of Distributions in Network Analysis', *Journal of Operations Research Society* **43**, 265–270.