PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 59 Fasc. 3 – 2002
Nova Série

POINTS D'ÉQUILIBRE POUR UNE ÉQUATION DES ONDES AVEC CONTRÔLE FRONTIÈRE CONTENANT UN TERME INTÉGRAL

Mohammad Cherkaoui, Francis Conrad and Naji Yebari

Presented by E. Zuazua

Résumé: On étudie la stabilisation des vibrations d'une poutre en torsion, de longueur unité, contrôlée en boucle fermée à l'une des extrémités. La poutre est modélisée par une e.d.p. de type ondes. La loi de contrôle est une fonction de la vitesse du système étudié. L'énergie naturelle du système qui est une semi-norme dans l'espace de travail n'est a priori pas une fonction de Lyapounov. On construit une nouvelle fonctionnelle, qui est la somme de deux fonctions de Lyapounov. Une première équivalente à l'énergie du système et une seconde qui reste constante sur toutes les trajectoires. On montre l'existence et l'unicité d'une solution, ainsi que la convergence forte et exponentielle de la solution vers un point d'équilibre qui dépend de la condition initiale. On montre aussi que la stabilité forte et exponentielle a lieu pour des données initiales dans un sous espace fermé de l'espace d'énergie.

1 – Introduction et formulation du problème

Dans un travail précédent [8], S. Icart, J. Leblond et C. Samson avaient étudié une approximation d'une poutre déformable en torsion par un système constitué d'une succession de masses et de ressorts.

Received: May 15, 2001; *Revised*: September 3, 2001.
AMS Subject Classification: 35L20, 35L05, 93D05, 47D60.
Mots clés: Contrôle frontière; équation des ondes; stabilité par Lyapounov; semi-groupes continus.

Quand le contrôle τ est appliqué à la première masse et que la gravité est négligée, le principe fondamental de la dynamique conduit aux équations suivantes:

$$M_{n+1}\begin{pmatrix}\ddot{\alpha}\\ \ddot{q}_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & K_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau\\ 0\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

où

- K_n est une matrice $n\times n$ diagonale composée des raideurs des ressorts k_i $(i=1,...,n)$,
- α est le déplacement de la première masse,
- q_n est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, représentant les déformations de chaque ressort,
- M_{n+1} est une matrice d'ordre $n+1$, composée des masses m_i $(i=1,...,n+1)$ et dont l'expression est

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n+1} m_i & M_n(1)^\top\\ M_n(1) & M_n\end{pmatrix}$$

où chaque élément de la matrice M_n est défini par

$$M_n(i,\,j) = \sum_{l=1}^{\min(n+1-i,\,n+1-j)} m_l\ ,$$

avec $M_n(1)$ la première colonne de M_n et $M_n(1,1)$ le premier élément de $M_n(1)$.

Alors (1.1) implique

$$\left(M_n-\frac{M_n(1)M_n(1)^\top}{M_{n+1}(1,1)}\right)\ddot{q}_n+K_nq_n\ =\ -\frac{M_n(1)}{M_{n+1}(1,1)}\,\tau(t)\ . \tag{1.2}$$

Lorsque $\tau=0$, l'équation (1.2) caractérise les vibrations libres de (1.1):

$$\left(M_n-\frac{M_n(1)M_n(1)^\top}{M_{n+1}(1,1)}\right)\ddot{q}_n+K_nq_n\ =\ 0\ . \tag{1.3}$$

Soient $(\phi_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{R}^n$ les vecteurs propres du système (1.3).
Soient $k_p,k_v>0$ et $G_n\in\mathbb{R}^n$ vérifiant $\left(G_n^\top\cdot\phi_i\right)\phi_i(1)\ge 0,\ \forall\, 1\le i\le n$.
Alors la loi de contrôle

$$\tau(t)\ =\ -k_p\Big(\alpha\,(t)+G_n^\top\cdot q_n(t)\Big)-k_v\Big(\dot{\alpha}\ (t)+G_n^\top\cdot\dot{q}_n\ (t)\Big) \tag{1.4}$$

stabilise exponentiellement le système (1.1) (cf. [8]).

Des simulations numériques faites sur ce modèle [8] montrent que l'introduction des termes faisant intervenir G_n dans la loi de contrôle améliore la vitesse de stabilisation.

Dans le cas continu, considéré comme limite du cas ci-dessus, une poutre déformable en torsion, de longueur unité, de masse et raideur constantes, contrôlée à l'une des extrémités, est modélisée comme suit

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) \;=\; 0, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ y_x(0,t) \;=\; 0 \\ -y_x(1,t) \;=\; \tau(t) \end{cases} \tag{1.5}$$

avec $(y(x,0), y_t(x,0)) = (y_0(x), y_1(x)) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1)$.

La fonction $y(x,t)$ représente l'angle de torsion par rapport à l'origine au point d'abscisse x de la poutre et à l'instant t.

La loi de contrôle $\tau(t)$ est de la forme

$$\tau(t) \;=\; k_p\Big[y(1,t) + \int_0^1 G(x) y(x,t)\,dx\Big] + \; k_v\Big[y_t(1,t) + \int_0^1 G(x) y_t(x,t)\,dx\Big] \tag{1.6}$$

avec $k_p, k_v > 0$ et $G \in L^2(0,1)$, contrôle qui étend (1.4) au cas continu.

Pour (1.5), un certain nombre de résultats ou de conjectures avaient été énoncés dans [8]. Une étude mathématique assez exhaustive de (1.5)–(1.6) du point de vue existence et stabilité (forte et uniforme) a été faite par M. Cherkaoui [3].

Le but de ce papier est d'étudier (1.5) avec une loi de contrôle sans terme en position, i.e. $k_p = 0$. Donc (1.5)–(1.6) s'écrit

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) \;=\; 0, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ y_x(0,t) \;=\; 0 \\ -y_x(1,t) \;=\; k\, y_t(1,t) + \displaystyle\int_0^1 G(x)\, y_t(x,t)\,dx \end{cases} \tag{1.7}$$

avec $y(x,0) = y_0 \in H^1(0,1)$ et $y_t(x,0) = y_1 \in L^2(0,1)$.

La constante k est strictement positive et G est une fonction de $L^2(0,1)$.

L'espace d'énergie est $X = H^1(0,1) \times L^2(0,1)$ qu'on munit du produit scalaire:

$$\langle [u,v]\,, [w,z] \rangle \;=\; u(1)\,\overline{w}(1) + \int_0^1 (u'\overline{w'} + v\,\overline{z})\,dx\ . \tag{1.8}$$

L'énergie naturelle du bras à l'instant t est:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t)\Big)\,dx \tag{1.9}$$

qui n'est qu'une semi-norme sur l'espace d'énergie, et n'est a priori pas une fonction de Lyapounov à cause de la présence du terme en G. Le cas où G est nulle a été étudié dans [5] du point de vue convergence exponentielle des solutions et détermination du taux optimal de convergence.

Plusieurs auteurs ont étudié la stabilisation de l'équation des ondes, en une ou plusieurs dimensions d'espace, avec un contrôle frontière dissipatif contenant un terme integral en temps et non en espace comme dans notre cas (cf. [1], [2], [12], [13] et [14]), ou encore un terme integral en espace, mais dans l'équation elle même (cf. [10]). Ces auteurs donnent des résultats d'existence et d'unicité, et surtout des estimations de décroissance de l'énergie, exponentielle ou rationnelle, suivant les hypothèses.

Dans tous ces travaux, l'énergie naturelle du système est une norme de l'espace de travail, en raison de la présence d'une condition de type Dirichlet sur une partie de la frontière. La convergence a lieu vers 0, contrairement à notre cas, où la solution converge vers un point d'équilibre qui dépend de la condition initiale.

Enfin, le type de condition aux limites dissipative qui est choisi dans notre problème est specifique, car issu de l'approximation du problème par un système de masses et de ressorts.

La suite du papier est organisée de la façon suivante:

Dans la section 2, sous des conditions sur G, on établit l'existence et l'unicité d'une solution au système bouclé (1.7). Ceci au sens des semi-groupes de contractions. Pour cela, on introduit une nouvelle norme sur l'espace d'énergie, équivalente à la norme usuelle. Sous des conditions moins fortes sur G, un autre résultat d'existence et d'unicité est donné, mais seulement au sens des semi-groupes fortement continus.

Dans la section 3, on montre que pour toute condition initiale dans X, la solution de notre problème converge fortement dans X vers un point d'équilibre qui dépend de cette condition initiale. Sous une autre hypothèse supplémentaire sur la norme de G, on montre que notre solution converge exponentiellement vers le point d'équilibre correspondant.

On montrera aussi que pour toute donnée initiale dans un sous-espace fermé de X, la solution converge fortement et exponentiellement vers $(0,0)$.

2 – Résultat d'existence et d'unicité

Le système bouclé (1.7) peut s'écrire sous la forme abstraite suivante

$$Y_t + AY = 0 \tag{2.1}$$

avec $Y = (y, y_t)$ et A: $D(A) \to X$ est donné par

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\dfrac{d^2}{dx^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$D(A) = \Big\{(y,z)\in H^2(0,1)\times H^1(0,1))\ /\ y_x(0) = y_x(1)+kz(1)+(G,z)_{L^2} = 0\Big\}\,. \tag{2.3}$$

Pour avoir la monotonie de A, on va d'abord définir sur X une norme équivalente à la norme usuelle sur X.

Soient $\varphi_p(x) = \sqrt{2}\cos(\omega_p x)$ pour $p > 0$ et $\varphi_0(x) = 1$ les solutions normalisées du système

$$\begin{cases} -\varphi_{pxx} \;=\; \lambda_p\,\varphi_p \\ \varphi_{p_x}(0) \;=\; \varphi_{p_x}(1) = 0 \end{cases}$$

avec $\lambda_p = \omega_p^2$ et $\omega_p = \pi p$.

Les $(\varphi_p)_{p\geq 0}$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$.

Pour simplifier l'écriture, on note le produit scalaire sur $L^2(0,1)$ par $(.,.)_{L^2}$.

On suppose que k est une constante et G une fonction de $L^2(0,1)$ telles que

$$k + \frac{(G,\varphi_0)_{L^2}}{\varphi_0(1)} \neq 0\,. \tag{2.4}$$

On définit sur $X\times X$ la forme bilinéaire: $\forall\, U_1 = (u_1,v_1)$, $U_2 = (u_2,v_2)$ dans X

$$B(U_1,U_2) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{p\geq 0}\left(k + \frac{(G,\varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)}\right) B_p(U_1,U_2) + \frac{1}{2}\, f(U_1)f(U_2)\ ,$$

avec

$$B_p(U_1,U_2) = \begin{cases} (\varphi_p,v_1)_{L^2}\,(\varphi_p,v_2)_{L^2} + \dfrac{1}{\omega_p^2}(\varphi_{p_x},u_{1x})_{L^2}\,(\varphi_{p_x},u_{2x})_{L^2} & \text{pour}\quad p\geq 1 \\ (\varphi_0,v_1)_{L^2}\,(\varphi_0,v_2)_{L^2} & \text{pour}\quad p=0 \end{cases}$$

et

$$f(U) = \frac{k\,u(1) + (G,u)_{L^2} + (v,1)_{L^2}}{k + (G,1)_{L^2}}$$

où $U = (u,v) \in X$.

Lemme 2.1. *Il existe $C > 0$ tel que $\forall (u,v) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1)$, on a*

$$u^2(1) + \int_0^1 \left(u_x^2 + v^2\right) dx \;\le\; C \left(\left[k\, u(1) + (G,u)_{L^2} + (v,1)_{L^2}\right]^2 + \int_0^1 \left(u_x^2 + v^2\right) dx \right) .$$

Preuve: On raisonne par l'absurde, en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $(u_n, v_n) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1)$ tels que

$$u_n^2(1) + \int_0^1 \left(u_{nx}^2 + v_n^2\right) dx \;\ge$$
$$\ge\; n \left(\left[k\, u_n(1) + (G,u_n)_{L^2} + (v_n,1)_{L^2}\right]^2 + \int_0^1 \left(u_{nx}^2 + v_n^2\right) dx \right) .$$

On peut évidement supposer $(u_n, v_n) \neq (0,0)$ et normalisée dans X.
Donc

$$u_n^2(1) + \int_0^1 \left(u_{nx}^2 + v_n^2\right) dx \;=\; \|(u_n, v_n)\|_X^2 = 1$$

$$\left[k\, u_n(1) + (G,u_n)_{L^2} + (v_n,1)_{L^2}\right]^2 + \int_0^1 \left(u_{nx}^2 + v_n^2\right) dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \;.$$

On aura par conséquent

$$\|(u_n, v_n)\|_X^2 = 1 \;, \tag{2.5}$$

$$\int_0^1 u_{nx}^2\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \;, \tag{2.6}$$

$$\int_0^1 v_n^2\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.7}$$

et

$$k\, u_n(1) + (G,u_n)_{L^2} + (v_n,1)_{L^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \;. \tag{2.8}$$

(2.5) implique que u_n converge vers un u dans $H^1(0,1)$-faible et dans $L^2(0,1)$-fort et que v_n converge vers un v dans $L^2(0,1)$-faible. L'injection de $H^1(0,1)$ dans $C^0([0,1])$ étant compacte, on a $u_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(1)$.

(2.7) implique que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^2(0,1)$-fort, et comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ au sens des distributions, on en déduit que $v = 0$.

(2.6) implique que $u_{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^2(0,1)$-fort, et comme $u_{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_x$ au sens des distributions, on en déduit $u_x = 0$, et par suite u est constante.

(2.8) donne alors

$$k\,u(1) + (G,u)_{L^2} = 0 \tag{2.9}$$

et comme u est constante, (2.9) s'écrit $\left(k + \frac{(G,\varphi_0)_{L^2}}{\varphi_0(1)}\right) u(1) = 0$, et par suite (2.4) implique $u = 0$.

Mais alors

$$1 \;=\; u_n^2(1) + \int_0^1 \left(u_{nx}^2 + v_n^2\right) dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^2(1) + 0 + 0 = 0\ ,$$

ce qui est absurde.

Proposition 2.1. *On suppose que* $\inf\limits_{p\geq 0} \left(k + \frac{(G,\varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)}\right) > 0$.

Alors la forme bilinéaire B est un produit scalaire sur X, et la norme associée notée N est équivalente à la norme usuelle de X.

Preuve: a) Montrons que B est définie positive sur X.

Soit $U = (u,v)$. Alors $B(U,U) = 0$ implique que

i) $B_p(U,U) = 0,\ \forall p \geq 0$ et

ii) $k\,u(1) + (G,u)_{L^2} + (v,1)_{L^2} = 0$.

i) implique $(\varphi_p,v)_{L^2}^2 + \frac{1}{\omega_p^2}(\varphi_{p_x},u_x)_{L^2}^2 = 0\ \forall\ p \geq 1$, et $(\varphi_0,v)_{L^2}^2 = 0$ donc $(\varphi_p,v)_{L^2} = 0\ \forall p \geq 0$. D'où $v = 0$.

On a aussi $(\varphi_{p_x},u_x)_{L^2} = 0\ \forall p \geq 1$. Une intégration par parties donne $(\varphi_p,u)_{L^2} = 0\ \forall p \geq 1$, donc u est constante égale à $(\varphi_0,u)_{L^2}$. En combinant ces résultats avec ii) on obtient

$$k\,u(1) + (G,u)_{L^2} \;=\; (\varphi_0,u)_{L^2}\left[k + \frac{(G,\varphi_0)_{L^2}}{\varphi_0(1)}\right] \;=\; 0\ ,$$

et (2.4) implique que $(\varphi_0,u)_{L^2} = 0$. Donc $u = 0$.

Donc la forme bilinéaire symétrique B est définie positive, par conséquent c'est un produit scalaire sur X.

b) Montrons que N est équivalente à la norme usuelle sur X.

Il est clair qu'il existe $C_1 > 0$ tel que $\forall U = (u,v)$

$$\begin{aligned} N^2(u,v) \;&=\; \frac{1}{2}\sum_{p\geq 0}\left(k + \frac{(G,\varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)}\right) B_p(U,U) \;+\; \frac{1}{2}\,f^2(U) \\ &\leq\; \frac{C_1}{2}\left[u^2(1) + \int_0^1 (u_x^2 + v^2)\,dx\right]. \end{aligned}$$

Pour avoir l'inégalité en sens inverse, on utilise le lemme 2.1.
D'abord avec

$$D \;=\; \min\left(\inf_{p\geq 0}\left(k+\frac{(G,\varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)}\right),\; \frac{1}{(k+(G,1)_{L^2})^2}\right),$$

on a

$$N^2(u,v) \;\geq\; \frac{D}{2}\left[\sum_{p\geq 0} B_p(U,U) + \Big[k\,u(1)+(G,u)_{L^2}+(v,1)_{L^2}\Big]^2\right].$$

et d'après l'inégalité du lemme 2.1, on obtient
$\exists\, C_2>0$ tel que $\forall (u,v)\in X$, on a

$$C_2\left[u^2(1)+\int_0^1 (u_x^2+v^2)\,dx\right] \;\leq\; N^2(u,v)\ .$$

D'où l'équivalence des deux normes. ∎

Théorème 2.1. *L'opérateur linéaire* $A\colon D(A)\subset X\to X$ *défini par (2.2)–(2.3) engendre un* C_0*-semigroupe de contractions* $\mathcal{S}(t)$ *sur l'espace* X*.*

Preuve: D'après un théorème de Lumer-Phillips [11], il suffit de montrer que A est un opérateur maximal monotone.

i) Monotonie de l'opérateur A.
Soit $U=\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\in D(A)$, donc $AU=\begin{pmatrix} -v\\ -u_{xx}\end{pmatrix}$.

$$B\,(AU,U) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{p\geq 0}\left(k+\frac{(G,\varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)}\right)B_p(AU,U)+\frac{1}{2}\,f(AU)\,f(U)\ .$$

En raison des conditions aux limites, pour tout U dans $D(A)$, on a $f(AU)=0$.
Pour tout $p\geq 0$, on a

$$B_p(AU,U)=\begin{cases} -(\varphi_p,u_{xx})_{L^2}\,(\varphi_p,v)_{L^2}-\dfrac{1}{\omega_p^2}(\varphi_{p_x},v_x)_{L^2}\,(\varphi_{p_x},u_x)_{L^2} & \text{pour}\quad p\geq 1\\[2ex] -(\varphi_0,u_{xx})_{L^2}\,(\varphi_0,v)_{L^2} & \text{pour}\quad p=0\ .\end{cases}$$

Tous calculs faits, on obtient

$$B_p(AU,U) \;=\; -(\varphi_p,v)_{L^2}\,\varphi_p(1)\,u_x(1)\ .$$

Par suite

$$B\,(AU, U) = \frac{u_x^2(1)}{2}\ .$$

D'où A est monotone dans X.

ii) Surjection de l'opérateur $I +\ \lambda_0 A$, $\lambda_0 > 0$.

Montrons que $\forall (f, g) \in X$, $\exists!\,(u,\,v)\ \in D(A)$ tel que $(I + \lambda_0 A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, où λ_0 est une constante strictement positive qui sera fixée ultérieurement.

Soit donc le système:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \lambda_0 \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad \text{i.e.}$$

$$\begin{cases} u - \lambda_0 v \;=\; f \\ v - \lambda_0 u_{xx} \;=\; g \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u - \lambda_0 v \;=\; f \\ u - \lambda_0^2 u_{xx} \;=\; f + \lambda_0 g = F\ . \end{cases}$$

On a donc à résoudre:

$$\text{(2.10)} \qquad \begin{cases} u - \lambda_0^2 u_{xx} \;=\; F \in L^2(0,1) \\ u_x(0) \;=\; 0 \\ -u_x(1) \;=\; \dfrac{1}{\lambda_0}\Big[k\,u(1) + (G,u)_{L^2}\Big] - \dfrac{1}{\lambda_0}\,[kf(1) + (G,f)_{L^2}]\ . \end{cases}$$

Soit $\psi \in H^1(0,1)$, alors (2.10) implique:

$$(u - \lambda_0^2 u_{xx},\, \psi)_{L^2} \;=\; (F,\, \psi)_{L^2}\ ,$$

et par intégration par parties, on a:

$$(u,\psi)_{L^2} + \lambda_0^2 (u_x, \psi_x)_{L^2} + \lambda_0\Big[ku(1) + (G,u)_{L^2}\Big]\psi(1) \;=$$

$$=\; (F,\psi)_{L^2} + \lambda_0\Big[kf(1) + (G,f)_{L^2}\Big]\,\psi(1)\ .$$

On pose

$$\begin{aligned} a(u,\psi) \;&=\; (u,\psi)_{L^2} + \lambda_0^2 (u_x, \psi_x)_{L^2} + \lambda_0\Big[k\,u(1) + (G,u)_{L^2}\Big]\psi(1) \\ b(\psi) \;&=\; (F,\psi)_{L^2} + \lambda_0\Big[kf(1) + (G,f)_{L^2}\Big]\,\psi(1)\ . \end{aligned}$$

La forme a est bilinéaire continue sur $H^1(0,1)\times H^1(0,1)$ et coercive pour $\lambda_0 > 0$ assez petit. La forme b est linéaire continue sur $H^1(0,1)$. Par le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que:

$$\text{(2.11)} \qquad a(u,\,\psi) = b(\psi) \qquad \forall \psi \in H^1(0,1)\ .$$

Montrons qu'on a bien une solution pour (2.10). En prenant $\psi \in D(0,1)$, on déduit d'abord que

$$u - \lambda_0^2 u_{xx} = F \quad \text{p.p. dans } L^2(0,1) \;.$$

D'où la régularité $H^2(0,1)$.

Ensuite pour $\psi \in H^1(0,1)$, l'équation (2.11) s'écrit:

$$(u - \lambda_0^2 u_{xx}, \psi)_{L^2} + \lambda_0^2 \Big[u_x(1) + \tfrac{1}{\lambda_0} \left(k u(1) + (G,u)_{L^2} - k f(1) - (G,f)_{L^2} \right) \Big] \psi(1) =$$
$$= (F,\psi)_{L^2} + \lambda_0^2 u_x(0) \psi(0) \;.$$

Comme $\psi(0)$ et $\psi(1)$ sont arbitraires, on déduit les conditions aux limites de (2.10). Donc il existe une unique solution $u \in H^2(0,1)$ de (2.10) vérifiant les conditions aux bords.

D'où la surjection de $I + \lambda_0 A$, pour $\lambda_0 > 0$, et par conséquent A est maximal monotone sur X. La densité de $D(A)$ dans X est évidente car X est un Hilbert et A est maximal monotone.

D'après le théorème de Lumer-Phillips, pour toute condition initiale $(u_0, u_1) \in D(A)$, le problème (2.1)–(2.3) admet une solution unique:

$$(u,v) \in C(\mathbb{R}^+;\, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+;\, X) \qquad \text{avec } v = u_t \;.$$

L'application $(u_0,\, u_1) \longmapsto (u,v)$ s'étend en une contraction $S(t)$ sur X telle que $(S(t))_{t\geq 0}$ soit fortement continue, et on peut définir pour toute condition initiale (u_0,u_1) dans X, la solution faible de (2.1)–(2.3) par la formule:

$$(u(t),\, v(t)) = S(t)(u_0,u_1), \qquad t \geq 0$$

avec $(u(t),\, v(t)) \in C(\mathbb{R}^+;\, X)$. ∎

Remarques 2.1.

1. Grâce au théorème 2.1 et à un résultat de régularité dû à Haraux [7], on déduit que pour toute donnée initiale dans $D(A)$, (1.7) admet une unique solution $y(.,t)$ telle que

$$y(.,t) \in C(\mathbb{R}^+;\, H^2(0,1)) \cap C^1(\mathbb{R}^+;\, H^1(0,1)) \cap C^2(\mathbb{R}^+; L^2(0,1)) \;.$$

Si la donnée initiale est dans X, on a

$$y(.,t) \in C(\mathbb{R}^+;\, H^1(0,1)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2\,(0,1)) \;.$$

2. On remarque que pour toute donnée initiale dans $D(A)$, $f(Y)$, avec Y la solution de (2.1)–(2.3), reste constante le long de la trajectoire. En effet

$$f_t(Y) = f(Y_t) = -f(AY) = 0 \;. \square$$

On énonce maintenant un résultat d'existence et d'unicité différent, ne nécessitant pas l'hypothèse faite dans le proposition 2.1. sur $(G, \varphi_p)_{L^2}$. Donnons d'abord un lemme.

Lemme 2.2. *Soient $k \in \mathbb{R}^*$ et $G \in L^2(0,1)$ tels que $k + (G,1)_{L^2} \neq 0$.*
Alors l'opérateur linéaire C qui à u associe $u + \frac{1}{k}(G,u)_{L^2}$ est bijectif continu et d'inverse continu de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ et de $H^1(0,1)$ dans $H^1(0,1)$.

Preuve: Soit l'équation

$$u + \frac{1}{k}(G,u)_{L^2} \;=\; z \;. \tag{2.12}$$

On multiplie scalairement dans $L^2(0,1)$ les deux membres de (2.12) par G, on obtient

$$(G,u)_{L^2} \;=\; \frac{k}{k + (G,1)_{L^2}}\,(G,z)_{L^2} \;. \tag{2.13}$$

Donc

$$u \;=\; z - \frac{(G,z)_{L^2}}{k + (G,1)_{L^2}} \;.$$

D'où C est bijectif continu et d'inverse continu de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ et de $H^1(0,1)$ dans $H^1(0,1)$. ∎

Théorème 2.2. *On fait les hypothèses $k > 0, G \in H^1(0,1)$ telle que $G(1) = 0$ et $k + (G,1)_{L^2} \neq 0$.*
Alors le système (2.1)–(2.3) est régi par un semi-groupe fortement continu.

Preuve: Le changement de fonction $z = y + \frac{1}{k}(G,y)_{L^2}$ et les hypothèses faites sur G transforment le système (2.1)–(2.3) en

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} z \\ z_t \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} -z_t \\ -z_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k}(G_x, z_x)_{L^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad z_x(0) \;=\; 0 \\ \qquad\qquad -z_x(1) \;=\; k\, z_t(1) \;. \end{cases} \tag{2.14}$$

Le système

$$\tag{2.15} \begin{cases} \begin{pmatrix} z \\ z_t \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} -z_t \\ -z_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z_x(0) = 0 \\ -z_x(1) = k\, z_t(1) \end{cases}$$

est régi par un C_0-semi-groupe de contractions sur X (cf. [5]).

L'opérateur $B\colon\ X \to X$ défini par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k}(G_x, z_x)_{L^2} \end{pmatrix}$$

est linéaire, continu et compact.

Donc d'après un résultat de Pazy [11], (2.14) est régi par un semi-groupe $(S_1(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X, c'est à dire que pour toute donnée initiale (z_0, z_1) dans X, la solution de (2.14) s'écrit

$$\Big(z(.,t), z_t(.,t)\Big) = S_1(t)(z_0, z_1) \qquad \forall t \geq 0\ .$$

Or l'opérateur $\mathcal{C}\colon\ X \to X$ défini par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Cu \\ Cv \end{pmatrix}$$

est linéaire, bijectif, continu et d'inverse continu (cf. lemme 2.2).

Donc pour toute donnée initiale (y_0, y_1) dans X, la solution de (2.1)–(2.3) s'écrit

$$\Big(y(.,t), y_t(.,t)\Big) = \mathcal{C}^{-1} S_1(t)\ \mathcal{C}(y_0, y_1) \qquad \forall t \geq 0\ . \ \blacksquare$$

3 – Convergence forte et exponentielle des solutions

On suppose pour toute la suite que G vérifie $\inf\limits_{p\geq 0} \Big(k + \frac{(G,\varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)}\Big) > 0$.

3.1. Convergence forte

Il s'agit d'étudier la convergence forte dans X, lorsque t tend vers l'infini, de la solution $Y = (y, y_t)$ de

$$\tag{3.1} \begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0, \qquad 0<x<1 \quad t>0 \\ y_x(0,t) = 0 \\ -y_x(1,t) = k\, y_t(1,t) + \displaystyle\int_0^1 G(x)\, y_t(x,t)\, dx \end{cases}$$

avec $(y_0, y_1) \in X$.

Pour tout $t \geq 0$, on considère la fonctionnelle

$$E_G(t) = B(Y, Y) = N^2(Y) \ . \tag{3.2}$$

Théorème 3.1. *Pour toute donnée initiale* (y_0, y_1) *dans* X, (y, y_t) *converge vers* $f(y_0, y_1), 0)$ *dans* X *quand* $t \to +\infty$, *avec*

$$f(y_0, y_1) \ = \ \frac{k\, y_0(1) + (G, y_0)_{L^2} + (y_1, 1)_{L^2}}{k + (G, 1)_{L^2}} \ . \tag{3.3}$$

Preuve: En raison de la densité de $D(A)$ dans X, de la contractivité du semi-groupe $S(t)$ et de la continuité de la fonction f, il suffit de faire la preuve pour des données initiales dans $D(A)$.

Soient (y_0, y_1) dans $D(A)$, il est clair que $E_G(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, et pour $Y = (y, y_t)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{dE_G(t)}{dt} \ &= \ 2\, B\left(\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}, \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}\right) = -2\, B\left(\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}\right) \\ &= \ -\, y_x^2(1, t) \ \leq \ 0 \ , \end{aligned} \tag{3.4}$$

donc $E_G(t)$ est une fonction de Lyapounov.

La résolvante de A est compacte, et d'après [6], il en résulte que la trajectoire $O^+(y_0, y_1) = \{(y(t),\, y_t(t))\,,\ t \geq 0\}$ est relativement compacte dans X pour des données initiales dans $D(A)$. On applique le principe d'invariance de Lasalle [9] à l'ensemble ω-limite

$$\omega(y_0, y_1) = \left\{(z_0, z_1) \in X;\ (z_0, z_1) = \lim_{n \to +\infty} S(t_n)(y_0, y_1) \ \text{ où } t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty\right\}$$

de la trajectoire $O^+(y_0, y_1)$. Notons que

$$S(t)(y_0, y_1) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \omega(y_0, y_1) \ .$$

Pour montrer le théorème, il suffit de prouver que pour tout $(y_0, y_1) \in D(A)$, on a $\omega(y_0, y_1) = \{(f(y_0, y_1), 0)\}$.

Pour $(y_0, y_1) \ \in D(A)$, (3.4) implique

$$E_G(t) - E_G(s) + \int_s^t y_x^2(1, \sigma)\, d\sigma \ = \ 0 \ . \tag{3.5}$$

Soit $(z_0, z_1) \in \omega(y_0, y_1) \subset D(A)$. Si $(z(t),\, z_t(t))$ est la trajectoire associée à (z_0, z_1), alors d'après (3.1) et (3.5)

$$\int_s^t \Big[k\, z_t(1,\sigma) + (G, z_t)_{L^2}\Big]^2 d\sigma \;=\; 0 \;,$$

d'où

$$k\, z_t(1,t) + (G, z_t)_{L^2} = 0 \qquad \forall t \geq 0 \;. \tag{3.6}$$

Ainsi $\omega(y_0, y_1)$ est inclus dans l'ensemble des conditions initiales dont la solution associée vérifie

$$\left\{\begin{aligned} z_{tt}(x,t) - z_{xx}(x,t) &= 0, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ z_x(0,t) &= 0 \qquad\qquad\qquad\; t > 0 \\ -z_x\,(1,t) &= 0 \qquad\qquad\qquad\; t > 0 \end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

avec

$$k\, z(1,t) + (G, z)_{L^2} = const = c_1 \qquad \forall t \geq 0 \;. \tag{3.8}$$

D'après la remarque 2.1.2, on a

$$k\, z(1,t) + (G, z)_{L^2} + \int_0^1 z_t\, dx = const = c_2 \qquad \forall t \geq 0 \;. \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9) on déduit que

$$\int_0^1 z_t\, dx = c_2 - c_1 \qquad \forall t \geq 0 \;,$$

alors

$$\int_0^1 z\, dx = (c_2 - c_1)\, t + c \qquad \forall t \geq 0 \;. \tag{3.10}$$

Le terme de gauche dans (3.10) est borné par rapport à t car $E_G(t)$ l'est. En divisant par t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^1 z_t\, dx \;=\; 0 \qquad \forall t \geq 0 \;.$$

De ceci, on déduit d'abord que la quantité $\int_0^1 z_1\, dx$ égale à $(z_1, \varphi_0)_{L^2}$ est nulle, et que pour tout $t \geq 0$, la quantité $\int_0^1 z\, dx$ égale à $(z_0, \varphi_0)_{L^2}$ est constante.

La solution du système (3.7) peut s'écrire sous la forme:

$$z(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} (a_p \cos \omega_p t + b_p \sin \omega_p t)\, \varphi_p(x) + a_0\, \varphi_0(x) \;, \tag{3.11}$$

où $a_p = (z_0, \varphi_p)_{L^2}$ $\forall p \geq 0$ et $b_p = \frac{(z_1, \varphi_p)_{L^2}}{\omega_p}$ $\forall p \geq 1$.

On peut facilement montrer que les séries de termes généraux $\left(\omega_p^2 a_p\right)_{p\geq 0}$ et $\left(\omega_p^2 b_p\right)_{p\geq 1}$ sont de carrés sommables, d'où la convergence dans $H^1(0,1)$ de la série:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left(a_p \cos\omega_p t + b_p \sin\omega_p t\right) \varphi_p(x) + a_0\varphi_0(x)\ .$$

La dérivée de (3.11) par rapport à t nous donne

$$z_t(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(-\omega_p a_p \sin\omega_p t + \omega_p b_p \cos\omega_p t\right) \varphi_p(x)$$

série convergente dans $L^2(0,1)$.

Dans ce cas, on a d'après (3.6)

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \Big[k\,\varphi_p(1) + (G,\varphi_p)_{L^2}\Big] \Big[-\omega_p a_p \sin\omega_p t + \omega_p b_p \cos\omega_p t\Big] \ = \ 0\ .$$

En utilisant un argument classique de fonctions presque périodiques [4] et la condition $k\,\varphi_p(1) + (G,\varphi_p)_{L^2} \neq 0 \ \ \forall\, p\geq 0$, on en déduit $\omega_p a_p = \omega_p (z_0,\varphi_p)_{L^2} = 0$ $\forall p \geq 1$ et $\omega_p b_p = (z_1,\varphi_p)_{L^2} = 0 \ \ \forall\, p\geq 1$. Donc $z_0 = (z_0,\varphi_0)_{L^2} = const = c$ et $z_1 = 0$ car $(z_1,\varphi_0)_{L^2} = 0$.

Par conséquent

$$\omega(y_0,y_1) = \Big\{(c,0)\ /\ (c,0) = \lim_{n\to+\infty} S(t_n)(y_0,y_1)\ \text{ où } t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\Big\}\,.$$

En écrivant que

$$S(t_n)(y_0,y_1) = Y(t_n) = (y(t_n), y_t(t_n)) \underset{t_n\to+\infty}{\longrightarrow} (c,0) \quad \text{ dans } \ X$$

et que

$$N(Y(t_n)) \underset{t_n\to+\infty}{\longrightarrow} N((c,0))\ ,$$

on en déduit que

$$c = \frac{k\,y_0(1) + (G,y_0)_{L^2} + (y_1,1)_{L^2}}{k + (G,1)_{L^2}} = f(y_0,y_1)\ .\ \blacksquare$$

Remarque 3.1. On considère l'ensemble

$$\mathcal{V} = \Big\{(u,v) \in X\ /\ f(u,v) = 0\Big\}\ .$$

En raison de la remarque 2.1.2, on déduit que $\mathcal{V}$ est invariant pour le système (2.1)–(2.3), i.e. toute solution de condition initiale dans $\mathcal{V}$ reste dans $\mathcal{V}$ pour tout $t \geq 0$ et tend vers 0 fortement quand $t \uparrow +\infty$. $\mathcal{V}$ est aussi un sous-espace fermé de X. □

3.2. Convergence exponentielle

Il s'agit maintenant d'étudier la convergence exponentielle dans X de la solution $Y = (y, y_t)$ de (2.1)–(2.3) vers le point d'équilibre $(f(y_0,y_1), 0)$.

Théorème 3.2. *On fait de plus l'hypothèse $\|G\|_{L^2} < k$. Alors pour toute condition initiale dans X, la solution $Y = (y, y_t)$ de (2.1)–(2.3) converge exponentiellement dans X vers le point d'équilibre $(f(y_0, y_1), 0)$.*

Preuve: Il suffit de faire la preuve pour des données initiales dans $D(A)$. On peut grâce à un changement de fonction:

$$\widetilde{Y} = (\widetilde{y}, \widetilde{y}_t) = \Big(y - f(y_0, y_1),\ y_t\Big)$$

se ramener à étudier la convergence exponentielle de la solution de

$$\left\{\begin{aligned} \widetilde{Y}_t + A\widetilde{Y} &= 0 \\ \widetilde{Y}(0) = (\widetilde{y}_0, \widetilde{y}_1) &= \Big(y_0 - f(y_0, y_1),\ y_1\Big) \end{aligned}\right. \tag{3.12}$$

vers (0, 0) dans X.

On remarque que $(\widetilde{y}_0, \widetilde{y}_1) \in \mathcal{V}$ et en raison de l'invariance de $\mathcal{V}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_G(t) &= N^2(\widetilde{Y}(t)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \geq 0} \left(k + \frac{(G, \varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)} \right) B_p(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}) \end{aligned}$$

quantité équivalente à

$$\widetilde{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(\widetilde{y}_x^2(x,t) + \widetilde{y}_t^2(x,t)\Big)\, dx\ .$$

Montrons donc que $\widetilde{E}_G(t)$ décroit exponentiellement vers 0.

On pose

$$P(t) = 2\,k \int_0^1 \widetilde{y}_t\, x\, \widetilde{y}_x\, dx + \int_0^1 (\widetilde{y}_x^2 + \widetilde{y}_t^2)\, dx\ .$$

On peut facilement montrer que

$$\exists\, D, D_1 > 0 \qquad |P(t)| \leq D\widetilde{E}(t) \leq D_1 \widetilde{E}_G(t) \qquad \forall t \geq 0\ . \tag{3.13}$$

La dérivée de $P(t)$ nous donne

$$\begin{aligned} P^{'}(t) &= k\,\widetilde{y}_x^2(1,t) - \frac{1}{k}\,\widetilde{y}_x^2(1,t) + \frac{1}{k}(G,\widetilde{y}_t)_{L^2}^2 - k\int_0^1 (\widetilde{y}_x^2 + \widetilde{y}_t^2)\,dx \\ &\leq k\,\widetilde{y}_x^2(1,t) + \left(\frac{1}{k}\,\|G\|_{L^2}^2 - k\right)\int_0^1 \widetilde{y}_t^2 dx \;-\; k\int_0^1 \widetilde{y}_x^2\,dx\ . \end{aligned}$$

La condition $\|G\|_{L^2} < k$ implique alors

$$P^{'}(t) \;\leq\; k\,\widetilde{y}_x^2(1,t) - C_1 \int_0^1 (\widetilde{y}_x^2 + \widetilde{y}_t^2)\,dx\ ,$$

avec $C_1 = \inf(k,\, k - \frac{1}{k}\,\|G\|_{L^2}^2)$.

Comme $\widetilde{E}(t)$ est équivalente à $\widetilde{E}_G(t)$, on a

$$\exists\, C_2 > 0 \quad \text{tel que} \;\; P^{'}(t) \leq -k\,\frac{d\widetilde{E}_G(t)}{dt} - C_2\,\widetilde{E}_G(t)\ . \tag{3.14}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on introduit l'énergie perturbée

$$\widetilde{E}_{G,\varepsilon}(t) = \widetilde{E}_G(t) + \varepsilon\, P(t)\ .$$

Pour tout $C > 1$, on a

$$C^{-1/2}\,\widetilde{E}_{G,\varepsilon}(t) \leq \widetilde{E}_G(t) \leq C^{1/2}\,\widetilde{E}_{G,\varepsilon}(t) \tag{3.15}$$

à condition de choisir ε tel que $0 < \varepsilon < D_1^{-1}(1 - C^{-1/2})$.

$$\widetilde{E}'_{G,\varepsilon}(t) = \widetilde{E}'_G(t) + \varepsilon\, P^{'}(t)\ . \tag{3.16}$$

Utilisant (3.13), (3.14) et (3.15) dans (3.16), on obtient

$$\widetilde{E}'_{G,\varepsilon}(t) \leq -\varepsilon\, C_2\,\widetilde{E}_G(t) + (1 - k\varepsilon)\,\frac{d\widetilde{E}_G(t)}{dt}\ .$$

Choisissant ε tel que

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = k^{-1} \quad \text{ et } \quad 0 < \varepsilon < D_1^{-1}(1 - C^{-1/2})\ ,$$

on obtient

$$\widetilde{E}_G(t) \;\leq\; C\,\widetilde{E}_G(0)\,\exp(-\delta t)\ ,$$

avec $\delta = \varepsilon C_2 C^{-1/2}$.

D'où la convergence exponentielle de $Y = (y, y_t)$ dans X vers le point d'équilibre $(f(y_0, y_1), 0)$. ∎

Remarque 3.2. La condition $k + \frac{(G,\varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)} \neq 0 \ \forall p \geq 0$ est nécessaire pour avoir les convergences forte et exponentielle de la solution du système (2.1)–(2.3) vers le point d'équilibre correspondant. En effet s'il existe un $p \geq 0$ tel que $k + \frac{(G,\varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)} = 0$, le problème aux valeurs propres associé à (2.1)–(2.3) admet une valeur propre imaginaire pure $\lambda_p = i\pi p$, de multiplicité algébrique 1 pour $p > 0$, et de multiplicité algébrique 2 pour $p = 0$ (voir Appendice ci-après). On obtient ainsi, pour une classe de conditions initiales, une solution périodique pour $p > 0$; et pour une autre classe de données initiales une solution affine en temps pour $p = 0$. □

APPENDICE

On considère le problème aux valeurs propres associé au système (2.1)–(2.3)

$$-AU = \lambda U \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A) \,. \tag{A.1}$$

Il est équivalent d'écrire (A.1) sous la forme:

$$\begin{cases} u_{xx} &= \lambda^2 u \\ u_x(0) &= 0 \\ -u_x(1) &= \lambda\Big(k\, u(1) + (G,u)_{L^2}\Big) \end{cases} \tag{A.2}$$

avec $v = \lambda u$.

On a $u(x) = A\cosh(\lambda x) + B\sinh(\lambda x)$ avec A et B dans $\mathbb{C}$. La condition aux bords en 0 implique que B est nulle, donc $u(x) = A\cosh(\lambda x)$. L'autre condition aux bords implique que λ est valeur propre si et seulement si λ vérifie

$$g(\lambda) = \lambda\Big[k\cosh\lambda + \sinh\lambda + (G(x), \cosh(\lambda x))_{L^2}\Big] \ = \ 0 \,. \tag{A.3}$$

Cherchons maintenant les valeurs propres imaginaires pures de (A.1). On vérifie d'abord facilement que $\lambda = 0$ est valeur propre de (A.1). Pour les autres valeurs propres imaginaires pures non nulles, on pose $\lambda = i\nu, \ \nu \in \mathbb{R}$. Alors (A.3) devient

$$k\cos\nu + (G(x), \cos(\nu x))_{L^2} + i\sin\nu \ = \ 0 \,. \tag{A.4}$$

Résoudre (A.4) équivaut à résoudre le système

$$\begin{cases} \sin\nu &= 0 \\ k\cos\nu + (G(x), \cos(\nu x))_{L^2} &= 0 \,. \end{cases} \tag{A.5}$$

Le système (A.5) admet des solutions non nulles $\nu_p = p\pi$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$k + \frac{(G, \varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(1)} = 0 \tag{A.6}$$

où φ_p est solution du système

$$\begin{cases} -\varphi_{pxx} &= \lambda_p \, \varphi_p \\ \varphi_{p_x}(0) &= \varphi_{p_x}(1) = 0 \; . \end{cases}$$

On pourra aisément vérifier à partir de la fonction g et ses dérivées, que la valeur propre $\lambda = 0$ est de multiplicité algébrique 1 si et seulement si

$$k + \frac{(G, \varphi_0)_{L^2}}{\varphi_0(1)} \neq 0 \; .$$

On vérifie aussi que la multiplicité algébrique de 0 est exactement 2 lorsque

$$k + \frac{(G, \varphi_0)_{L^2}}{\varphi_0(1)} = 0 \; .$$

Enfin, lorsque pour $p > 0$, $\lambda = i\,\nu_p$ est valeur propre i.e. G vérifie (6), la multiplicité algébrique de λ est exactement 1. ∎

REMERCIEMENTS – Les auteurs remercient le referee anonyme pour ses précieuses remarques et suggestions.

RÉFÉRENCES

[1] Aassila, M.; Cavalcanti, M.M. et Soriano, J.A. – Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, *SIAM J. Control Optim.,* 38(5) (2000), 1581–1602.

[2] Cavalcanti, M.M.; Domingos Cavalcanti, V.N.; Prates Filho, J.S. et Soriano, J.A. – Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping, *Differential Integral Equations,* 14(1) (2001), 85–116.

[3] Cherkaoui, M. – *Sur la stabilisation d'une poutre déformable en torsion ou en flexion par une classe de contrôles frontière*, Thèse de l'Université de Nancy I, France, 1994.

[4] Conrad, F. et Pierre, M. – Stabilization of second order evolution equation by unbounded nonlinear feedback, *Ann. Inst. Poincaré, Analyse Nonlinéaire,* 11(5) (1994), 485–515.

[5] Cox, S. et Zuazua, E. – The rate at which energy decays in a string damped at one end, *Indiana University Mathematics Journal,* 44(2) (1995), 545–573.

[6] Dafermos, C.M. et Slemrod, M. – Asymptotic behaviour of nonlinear contraction semi-groups, *J. Funct. Anal.,* 13 (1973), 97–106.

[7] Haraux, A. – *Semilinear hyperbolic problems in bounded domains*, Mathematical Reports, Vol. 3, J. Dieudonné, ed. Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, New York, 1987.

[8] Icart, S.; Leblond, J. et Samson, C. – *Some results on feedback stabilization of a one link flexible arm*, Rapport de Recherche INRIA-Sophia Antipolis no. 1682, 1992.

[9] Lasalle, A. et Lefchetz, S. – *Stability by Direct Lyapounov's Method*, Academic Press, 1961.

[10] Milla Miranda, M. et San Gil Jutuca, L.P. – Existence and boundary stabilization of solutions for the Kirchoff equation, *Comm. Partial Differential Equations,* 24(9-10) (1999), 1759–1800.

[11] Pazy, A. – *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1983.

[12] Muñoz Rivera, J.E. et Reinhard Racke – Magneto-thermo-elasticity – Large time behaviour for linear systems, *Advances in Differential Equations,* 6(3) (2001), 359–384.

[13] Muñoz Rivera, J.E. et Andrade, D. – Exponential decay of nonlinear wave equation with a viscoelastic boundary condition, *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 23(1) (2000), 41–61.

[14] Muñoz Rivera, J.E. et Andrade, D. – A boundary condition with memory in elasticity, *Applied Mathematical Lettres,* 13(1) (2000), 115–121.

Mohammad Cherkaoui,
Group of Mathematical Physics, Dept. of Mathematics, F.S.T. Errachidia,
University Moulay Ismail, Box 509, Errachidia – MOROCCO
E-mail: `cherkaoui66@hotmail.com`

and

Francis Conrad,
Université Henri Poincaré Nancy I, Institut Elie Cartan, Laboratoire de Mathématiques,
B.P. 239, 54506 Vandoeuvre lès Nancy Cedex – FRANCE
E-mail: `Francis.Conrad@iecn.u-nancy.fr`

and

Naji Yebari,
Dept. of Mathematics, F.S. Tetouan,
University Abdelmalek Essaadi, Box 2121, Tetouan – MOROCCO
E-mail: `nyebari@hotmail.com`