PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 53 Fasc. 4 – 1996

EQUATIONS ELLIPTIQUES SEMI LINEAIRES DANS DES DOMAINES NON BORNES DE $\mathbb{R}^N$

B. Khodja

Résumé: Soit f une fonction numérique continue, localement lipschitzienne vérifiant $f(0) = 0$. On considère le problème

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \ , \end{cases}$$

avec $Bu = u$ (condition de Dirichlet) ou $Bu = u_n$ (condition de Neumann). On montre que si

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times G \quad \text{où } G \text{ est un ouvert quelconque de } \mathbb{R}^N$$

ou bien

$$\Omega \quad \text{un ouvert de } \mathbb{R}^N \quad (N \geq 2) \ ,$$

vérifiant $\exists\, \chi \in \mathbb{R}^N$, χ constant tel que $\langle n, \chi \rangle > 0$ sur Γ et $F(u) \geq 0$ (*).

Le problème (P) n'admet que la solution nulle.

On a le même résultat si:

$$\Omega = \Big\{ (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 > \Phi(x_2, ..., x_N) \Big\}$$

où

$$\Phi(x_2, ..., x_N) = \sigma_2 |x_2|^\alpha + ... + \sigma_N |x_N|^\alpha \ , \qquad \alpha > 1 \ \text{ et } \ \sigma_i \in \mathbb{R}$$

et

$$F(u) \leq c(\alpha)\, u\, f(u) \ (^{**}).$$

Received: January 10, 1996.

(*) $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)\, ds$.

(**) $c(\alpha) = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\alpha - 3 + N}{\alpha - 1 + N}$.

Abstract: Let f be a locally lipschitz continuous function verifying $f(0) = 0$. We consider the problem

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ Bu = 0 & \text{on } \Gamma \,, \end{cases}$$

with $Bu = u$ (Dirichlet's condition) or $Bu = u_n$ (Neumann's condition). We show that if

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times G \quad \text{where } G \text{ is an open set of } \mathbb{R}^N$$

or

$$\Omega \quad \text{is an open set of } \mathbb{R}^N \quad (N \geq 2) \,,$$

verifying $\exists\, \chi \in \mathbb{R}^N$, χ constant $\langle n, \chi \rangle > 0$ on Γ and $F(u) \geq 0$ (*).

The (P) problem admits only the zero solution.

We have the same result if

$$\Omega = \Big\{ (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 > \Phi(x_2, ..., x_N) \Big\}$$

with

$$\Phi(x_2, ..., x_N) = \sigma_2 |x_2|^\alpha + ... + \sigma_N |x_N|^\alpha \,, \qquad \alpha > 1 \quad \text{and} \quad \sigma_i \in \mathbb{R}$$

and

$$F(u) \leq c(\alpha)\, u\, f(u) \ (^{**}).$$

Introduction

Dans ce travail on étudie le caréctère trivial de la solution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires dans des ouverts non bornés de $\mathbb{R}^N$.

On considère une fonction numérique f continue, localement lipschitzienne vérifiant

$$f(0) = 0$$

de sorte que $u = 0$, soit une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \,, \end{cases}$$

avec

$$\text{soit} \quad Bu = u \quad \text{(condition de Dirichlet)},$$

$$\text{soit} \quad Bu = u_n \quad \text{(condition de Neumann)}.$$

(*) $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)\, ds.$

(**) $c(\alpha) = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\alpha - 3 + N}{\alpha - 1 + N}.$

Ce travail est partagé en 3 paragraphes:

Dans le paragraphe I, on établit par une méthode à la Pohozaèv deux formules, l'une concernant le problème de Dirichlet, l'autre le problème de Neumann.

Dans le paragraphe II, on montre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un ouvert étoilé borné ou non et f est une non linéarité qui vérifie

$$F(u) \geq 0 \quad \text{où} \;\; F(u) = \int_0^u f(s)\,ds \;,$$

le problème de Dirichlet n'admet que la solution nulle.

Dans le paragraphe III, on étudie le problème de Neumann et on montre que si:

- f est comme dans le paragraphe II et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, vérifiant

$$\exists\, \chi \in \mathbb{R}^N \,, \qquad \chi \text{ constant tel que } \langle n, \chi\rangle > 0 \text{ sur } \Gamma \;,$$

ou

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times G \quad \text{où} \;\; G \text{ est un ouvert quelconque de } \mathbb{R}^N \;.$$

- $f(u) = c\,|u|^{\gamma-1}\,u + \mu\,u$, $c \geq 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ et

$$\Omega = \Big\{ (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 > \Phi(x_2, ..., x_N) \Big\} \;,$$

où

$$\Phi(x_2, ..., x_N) = \sigma_2 |x_2|^\alpha + ... + \sigma_N |x_N|^\alpha \,, \qquad \alpha > 1 \;\; \text{et} \;\; \sigma_i \in \mathbb{R} \;.$$

Le problème de Neumann n'admet que la solution nulle.

0 – Notations et rappel sur la formule de Green

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ un ouvert à frontière régulière Γ.

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ le point générique de Ω et par:

$n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ la normale extèrieure à Γ ,

$u_{xi}(x) = D_i(x)$ les dérivées partielles de u par rapport à xi au point x ,

$u_{xixj}(x) = D_{ij}(x)$ les dérivées partielles secondes de u par rapport à $x_i\, x_j$,

$\nabla u(x) = (u_{x1}, u_{x2}, ..., u_{xN})$ le gradient de u au point x ,

$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u(x))$ le laplacien de u au point x .

Formule d'integration par partie. Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de $H^1(\Omega)$ (espace de Sobolèv). Pour tout $1 \le i \le N$, on a

$$\int_\Omega u_{xi}\, v\, dx = -\int_\Omega u\, v_{xi}\, dx + \int_\Gamma n_i\, u\, v\, ds \ , \tag{0.1}$$

où $n_i(x) = \cos(n, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle de la normale extérieure à Γ au point x avec l'axe x_i.

Formule de Green. Pour v, u dans $H^1(\Omega), H^2(\Omega)$ respectivement on a

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = -\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, dx + \int_\Gamma \langle \nabla u, n\rangle\, v\, ds \ . \tag{0.2}$$

I – Resultats generaux

Dans cette partie, on établit certains résultats qui vont nous servir dans toute la suite.

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ à frontière Γ de classe C^1.

Soit f une fonction numérique localement lipschitzienne, on pose pour tout s réel:

$$F(s) = \int_0^s f(\tau)\, d\tau \ .$$

Pour u appartenant à $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on considère l'équation:

$$-\Delta u + f(u) = 0 \ . \tag{1.1}$$

Remarquons tout de suite que $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $f(0) = 0$ impliquent que:

$$F(u) \in L^1(\Omega) \ .$$

On a:

Proposition 1.1. *Soit $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution de (1.1) et (a_i), $1 \le i \le N$, des constantes réelles, alors on a:*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum a_i\, u_{xi}^2 - \frac{1}{2}\sum a_i |\nabla u|^2 - \sum a_i\, F(u) = \\ = -\frac{1}{2}\int_\Gamma \sum a_i\, n_i\, x_i \Big\{|\nabla u|^2 + 2F(u)\Big\} + \int_\Gamma u_n \sum a_i\, x_i\, u_{xi} \ .\end{aligned} \tag{1.2}$$

Donnons deux lemmes, l'un concernant le problème de Dirichlet, l'autre le problème Neumann.

Lemme A. *Dans le cas du problème de Dirichlet ($u = 0$ sur Γ), on a:*

$$\int_\Omega \sum a_i\, u_{xi}^2 - \frac{1}{2}\sum a_i |\nabla u|^2 - \sum a_i |\nabla u|^2 - \sum a_i\, F(u) = \tag{1.2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma \sum a_i\, n_i\, x_i |\nabla u|^2 \ .$$

Lemme B. *Pour le problème de Neumann ($u_n = 0$ sur Γ), on a:*

$$\int_\Omega \sum a_i\, u_{xi}^2 - \frac{1}{2}\sum a_i |\nabla u|^2 - \sum a_i\, F(u) = \tag{1.4}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_\Gamma \sum a_i\, n_i\, x_i \left\{|\nabla u|^2 + 2F(u)\right\} \ .$$

La formule (1.2) signifie qu'il existe une suite $R_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ telle que

$$\int_\Omega \sum a_i\, u_{xi}^2 - \frac{1}{2}\sum a_i |\nabla u|^2 - \sum a_i\, F(u) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}\int_{\Gamma\cap BR_n} \sum a_i\, n_i\, x_i \left\{|\nabla u|^2 + 2F(u)\right\} + u_n \sum a_i\, x_i\, u_{xi} \ .$$

Nous allons donner la démonstration de la proposition dans le cas où Ω n'est pas borné, le cas Ω borné est simple.

Démonstration: Désignons par $B_R(0)$ la boule dans $\mathbb{R}^N$ de centre 0 et de rayon $R > 0$ et soit $\Omega_R = \Omega \cap B_R(0)$.

Multiplions l'équation (1.1) par $a_i\, x_i\, u_{xi}$, puis intégrons sur Ω_R, on obtient:

$$\int_{\Omega_R} (-\Delta u + f(u))\,(a_i\, x_i\, u_{xi})\, dx = 0 \ .$$

Grace aux formules (0.1) et (0.2), le premier terme devient:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} -\Delta u(a_i\, x_i\, u_{xi}) &= \int_{\Omega_R} \nabla u\, \nabla(a_i\, x_i\, u_{xi}) - \int_{\Gamma_R} u_n\, a_i\, x_i\, u_{xi} \\
&= \int_{\Omega_R} a_i\, u_{xi}^2 + \frac{1}{2}\, a_i\, x_i\, D_i |\nabla u|^2 - \int_{\Gamma_R} u_n\, a_i\, x_i\, u_{xi} \\
&= \int_{\Omega_R} a_i\, u_{xi}^2 - \frac{1}{2}\, a_i |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} a_i\, n_i\, x_i |\nabla u|^2 - \int_{\Gamma_R} u_n a_i\, x_i\, u_{xi} \ .
\end{aligned}$$

De même pour le second terme, on obtient:

$$\int_{\Omega_R} f(u)\, a_i\, x_i\, u_{xi} = \int_{\Omega_R} a_i\, x_i\, D_i\, F(u) = -\int_{\Omega_R} a_i\, F(u) + \int_{\Gamma_R} a_i\, n_i\, x_i\, F(u) \ .$$

D'où:

$$(1.5) \qquad \int_{\Omega_R} a_i\, u_{xi}^2 - \frac{1}{2}\, a_i |\nabla u|^2 - a_i\, F(u) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma\cap B_R} a_i\, n_i\, x_i \Big\{ |\nabla u|^2 + 2F(u) \Big\} -$$
$$- \int_{\Gamma\cap B_R} u_n\, a_i\, x_i\, u_{xi} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega\cap DB_R} a_i\, n_i\, x_i \Big\{ |\nabla u|^2 + 2F(u) \Big\} + \int_{\Omega\cap DB_R} u_n\, a_i\, x_i\, u_{xi} \ .$$

Sur $\Omega \cap DB_R$ on a:

$$n_i = \frac{x_i}{|x|} \qquad (DB_R \text{ désigne le bord de } B_R) \ .$$

Ainsi le second terme de (1.2) est majoré par:

$$A(R) = R|a_i| \int_{\Omega\cap DB_R} \frac{3}{2} |\nabla u|^2 + |F(u)| \ .$$

Notons que si Ω est borné, alors pour R assez grand, on a

$$\Omega \cap DB_R = \emptyset \quad \text{ et } \ A(R) = 0 \ .$$

Si Ω est non borné, comme $\nabla u \in L^2(\Omega)$ et $F(u) \in L^1(\Omega)$, on doit avoir:

$$\int_0^{+\infty} dR \int_{\Omega\cap DB_R} \frac{3}{2} |\nabla u|^2 + |F(u)| < +\infty \ .$$

Par conséquent on peut toujours trouver une suite (R_n) telle que

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
$$\text{et} \ \ A(R_n)_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

On obtient (1.2) par combinaison linéaire.

Démonstration du Lemme A: $u = 0$ sur Γ entraine

$$\int_\Gamma F(u) = 0$$

et

$$\nabla u = u_n\, n \quad \text{ sur } \ \Gamma$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum a_i\, u_{xi}^2 - \frac{1}{2}\sum a_i |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\sum a_i\, F(u) = \\ = -\frac{1}{2}\int_\Gamma \sum a_i\, n_i\, x_i |\nabla u|^2 + u_n \sum a_i\, x_i\, u_{xi} \\ = \int_\Gamma -\frac{1}{2}\langle ax, n\rangle\, |\nabla u|^2 + u_n\, \langle ax, \nabla u\rangle \\ = \int_\Gamma -\frac{1}{2}\langle ax, n\rangle\, |\nabla u|^2 + |u_n|^2\, \langle ax, n\rangle \\ = \int_\Gamma \frac{1}{2}\langle ax, n\rangle\, |\nabla u|^2 \;. \blacksquare\end{aligned}$$

Démonstration du Lemme B: Si $u_n = 0$ sur Γ, la formule (1.1) donne immédiatement (1.3). ∎

II – Problème de Dirichlet

On suppose Ω étoilé par rapport à l'origine avec une frontière Γ de classe C^1.

La fonction numérique f vérifie

(i) $$f(0) = 0 \;.$$

On considèrele problème de Dirichlet

(2.1) $$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \;. \end{cases}$$

Notons, alors que

$$\langle x, n(x)\rangle \geq 0 \quad \text{sur} \;\; \Gamma \;.$$

D'autre part

$$u \in C(\Omega) \quad \text{car} \;\; u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega) \;\; \text{pour tout } p \in [2, +\infty[\;.$$

On a le

Théorème 2.1. *On suppose que f est telle que*

(ii) $$F(u) \geq 0 \;.$$

Soit $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solution du problème (2.0), alors $u = 0$.

Avant de donner la démonstration, notons que M.J. Estéban et P.L. Lions ont établi que si u est solution de

$$(2.1)' \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & u \in C^2(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \ , \end{cases}$$

satisfaisant $\nabla u \in L^2(\Omega)$, $F(u) \in L^1(\Omega)$, lorsque Ω est un domaine connexe non borné, tel que

$$\exists\, \chi \in \mathbb{R}^N, \quad |\chi| = 1\,, \qquad \langle n(x), \chi(x)\rangle \geq 0 \quad \text{sur } \ \Gamma\,, \qquad \langle n(x), \chi(x)\rangle \not\equiv 0\ ,$$

necéssairement $u = 0$ voir [3].

Pour des domaines bornés, les équations du type (2.1) peuvent en général posséder des solutions non triviales obtenues par bifurcation. Le Théorème 2.1 non seulement ne rentre pas dans le cadre du résultat de [3], mais en plus il donne un résultat de trivialité pour des domaines bornés.

Démonstration: Appliquons la formule (1.3) avec $a_i = 1$, on obtient

$$\int_\Omega (N-2)\,|\nabla u|^2 + 2N\,F(u) + \int_\Gamma \langle x, n\rangle\,|\nabla u|^2 = 0$$

$N \geq 2$, $F(u) \geq 0$ et Ω étoilé impliquent que

$$(N-2)\,|\nabla u|^2 + 2N\,F(u) = 0 \quad \text{ p.p. sur } \ \Omega\ .$$

D'ou:

$$F(u) = 0 \quad \text{ sur } \ \Omega\ .$$

Deux cas peuvent se présenter:

1) Soit $u = \text{cte} = \alpha_0$;

La condition au bord ($u = 0$ sur Γ) nous donne $\alpha_0 = 0$.

2) Soit $u \neq \text{cte}$.

Comme $u \in C(\Omega)$, $\text{Im}(u)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, posons

$$K = \text{int}\{\text{Im}(u)\}\ .$$

Alors, pour tout $v \in K$,

$$F(v) = 0 \quad \text{ et } \quad \frac{d}{dv}F(v) = 0\ .$$

Comme $\mathrm{Im}(u) \subset \overline{K}$, alors pour tout $v \in \overline{K}$, $f(v) = 0$. Autrement dit:

$$\text{Pour tout } x \in \Omega,\ \ f(v(x)) = 0 \ .$$

Le problème (2.1) se réduit à:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \ . \end{cases}$$

Ce nouveau problème, n'admet que la solution nulle. ∎

Remarque 2.2. On obtiendrait un résultat simulaire, si on remplace (ii) par:

(**ii**) Il exite μ, $\mu > \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$, tel que $F(u) \geq \mu\, u f(u)$.

Exemple 2.3: Comme fonction rentrant dans le cadre du Théorème 2.1, on peut prendre

$$f(u) = u(u + A)\,(u + B) \qquad \text{avec} \ \ A\,B \geq \frac{2}{5}\,(A^2 + B^2) \ .$$

III – Problème de Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ un domaine connexe non borné vérifiant

(3.0) $$\exists\, \chi \in \mathbb{R}^N, \ \ \chi \text{ constant tel que } \ \langle \chi, n(x) \rangle > 0 \ \text{ sur } \Gamma \ .$$

On considère alors le problème semi-linéaire

(3.1) $$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u_n = 0 & \text{sur } \Gamma \ . \end{cases}$$

Remarquons que l'analogue du résultat d'Esteban–Lions pour les problèmes de Neumann n'est pas vrai.

Berestycki, Gallouet et Kavian ont établi que le problème

$$-\Delta u - u^3 + u = 0\,, \qquad u \in H^2(\mathbb{R}^2)$$

admet une solution radiale, voir [4].

Cette même solution vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u - u^3 + u = 0 & u \in H^2(]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}), \\ u_n = 0 & \text{sur } \{0\} \times \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

On a en tout cas le résultat suivant:

Théorème 3.1. *On suppose que f est comme dans le Théorème 2.1. Soit $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solution du problème (3.1), alors $u = 0$.*

Démonstration: Comme dans la Proposition 1.1 multiplions l'équation (3.1) par u_{xi} et intégrons sur Ω_R, on obtient

$$\int_{\Gamma\cap B_R} \frac{1}{2}\, n_i \Big\{|\nabla u|^2 + 2F(u)\Big\} + \int_{\Omega\cap DB_R} \frac{x_i}{2|x|} \Big\{|\nabla u|^2 + F(u)\Big\} + \int_{\Omega\cap DB_R} u_n\, u_{xi} = 0 \ .$$

Le second et le troisième terme sont majorés par

$$B(R) = \int_{\Omega\cap DB_R} \frac{R+2}{2}\, |\nabla u|^2 + 2|F(u)| \ .$$

Par conséquent

$$\int_\Gamma \frac{1}{2}\, n_i \Big\{|\nabla u|^2 + 2F(u)\Big\} = 0$$

qui entraine

$$\int_\Gamma \langle \chi, n\rangle \Big\{|\nabla u|^2 + 2F(u)\Big\} = 0 \ .$$

On déduit alors

$$\langle \chi, n\rangle \Big\{|\nabla u|^2 + 2F(u)\Big\} = 0 \qquad \text{p.p. sur} \ \ \Gamma \ .$$

La formule (1.4) devient

$$\int_\Omega \sum a_i\, u_{xi}^2 - \frac{1}{2} \sum a_i |\nabla u|^2 - \sum a_i\, F(u) = 0 \ .$$

On obtient finalement

$$\int_\Omega (2-N)\, |\nabla u|^2 - 2N\, F(u) = 0 \ .$$

Comme dans le Théorème 2.1, le problème (3.1) devient

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u_n = 0 & \text{sur } \Gamma \ . \end{cases}$$

La multiplication par u donne

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = 0 \ ,$$

u est donc constante, mais comme $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on doit avoir

$$\lim_{x \in \Omega,\, |x| \to +\infty} u(x) = 0 \ .$$

La constante est nulle et par conséquent $u = 0$. ∎

Exemple 3.2: Soit

$$\Omega = \Big\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 > \Phi(x_2, ..., x_n) \Big\} \ ,$$

où

$$\Phi \colon \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R} \quad \text{ est de classe } C^1 \ .$$

Le problème (3.1) n'admet que la solution nulle (prendre $\chi = e_1 = (1, 0, ..., 0)$).

Cas de $\Omega = \mathbb{R}^2 \times G$. Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \times G$ ou G est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ à frontière de classe C^1.

Pour le problème

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \ , \end{cases}$$

avec Bu défini comme précédemment.

On a:

Théorème 3.3. *Si on suppose que f est comme dans le Théorème 2.1, alors si $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est solution de (3.3), $u = 0$.*

Démonstration: Le problème de Dirichlet même dans le cas $\Omega = R \times G$ est traité dans le Théorème 2.1.

Notons $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+2})$ le point générique de $\mathbb{R}^2 \times G$ et appliquons la formule (1.3) avec $a_i = 0$ pour $i \geq 3$, on obtient

$$\int_\Omega \sum a_i \, u_{xi}^2 - \frac{1}{2} \sum a_i \, |\nabla u|^2 - \sum a_i \, F(u) = 0 \, , \qquad 1 \leq i \leq 2 \ .$$

Prenons ensuite $a_1 = a_2 = 1$, on obtient

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \sum_{j \geq 3} u_{xj}^2 + 2F(u) = 0 \ .$$

On déduit alors

$$\int_\Omega F(u) = 0 \ .$$

Donc

$$F(u) = 0 \quad \text{p.p. sur } \ \Omega \ .$$

On conclut, alors comme dans le Théorème 2.1. ∎

Remarque 3.4. Si $\Omega = \mathbb{R} \times G$, le problème de Neumann (3.1) est résolu, lorsque $G =]0, \pi[$. Pour G quelconque le problème est encore ouvert.

Cas de $\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 > \sigma_2 |x_2|^\alpha + ... + \sigma_N |x_N|^\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$ **et** σ_i **des nombres réels.**

Pour le problème de Neumann (3.1), on a

Théorème 3.4. *Soit f une fonction telle que*

$$F(u) \leq \frac{1}{2} \frac{\alpha - 3 + N}{\alpha - 1 + N} \, u \, f(u) \ .$$

Si $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est solution du problème (3.1), alors $u = 0$.

Démonstration: Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \Gamma$ on a

$$\sum a_i \, n_i \, x_i = \frac{1}{\sigma^*} (a_1 - \alpha \, a_2) \, \sigma_2 \, |x_2|^\alpha + ... + \frac{1}{\sigma^*} (a_1 - \alpha \, a_N) \, \sigma_N \, |x_N|^\alpha \ ,$$

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{1 + (\alpha \, \sigma_2)^2 \, |x_2|^{2(\alpha-1)} + ... + (\alpha \, \sigma_N)^2 \, |x_N|^{2(\alpha-1)}} \ .$$

Choisissons alors

$$a_1 = \alpha \, a_2 = ... = \alpha \, a_N \ .$$

La somme est nulle sur le bord et la formule (1.4) devient

$$(1.4)' \quad \int_\Omega \frac{\alpha + 1 - N}{2} \, u_{x1}^2 - \frac{\alpha - 3 + N}{2} \, (u_{x2}^2 + ... + u_{xN}^2) - (\alpha - 1 + N) \, F(u) = 0 \ .$$

Multiplions l'équation (3.1) par $\frac{3-\alpha+N}{2} \, u$, puis intégrons sur Ω on obtient

$$(1.4)'' \qquad \int_\Omega \frac{\alpha - 3 + N}{2} \, |\nabla u|^2 + \frac{\alpha - 3 + N}{2} \, u \, f(u) = 0 \ .$$

Des formules $(1.4)'$ et $(1.4)''$ on déduit

$$(3.5) \qquad \int_\Omega (\alpha - 1) \, u_{x1}^2 + \frac{(\alpha - 3 + N)}{2} \, u \, f(u) - (\alpha - 1 + N) \, F(u) = 0 \ .$$

Comme $\alpha > 1$ et

$$F(u) \leq \frac{1}{2} \frac{\alpha - 3 + N}{\alpha - 1 + N} \, u \, f(u) \ ,$$

on obtient

$$\int_\Omega u_{x1}^2 = 0 \ .$$

D'ou

$$u_{x1} = 0 \quad \text{et} \quad u = u(x_2, x_3, ..., x_N) \ .$$

Comme $u \in H^2(\Omega)$, on doit avoir

$$\int_\Omega |u|^2 = \int_\Omega u^2(x_2, x_3, ..., x_N)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_N < +\infty \ .$$

Donc $u = 0$. ∎

Exemple 3.6: Soit $c \geq 0$, $\gamma > 1$ et μ un paramètre réel. Le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + c\,|u|^{\gamma-1}\, u = \mu\, u & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u_n = 0 & \text{sur } \Gamma \ , \end{cases}$$

n'admet que la solution nulle.

Démonstration:

$$f(u) = c\,|u|^{\gamma-1}\, u - \mu\, u \,, \qquad F(u) = \frac{c}{\gamma+1}\,|u|^{\gamma+1} - \mu\,\frac{u^2}{2} \ .$$

D'ou

$$\begin{aligned} &2(\alpha - 1 + N)\, F(u) - (\alpha - 3 + N)\, u\, f(u) = \\ &\qquad = u^2\, \frac{\alpha - 1 + N - \gamma(\alpha - 3 + N)}{\gamma + 1}\, c\,|u|^{\gamma-1} - 2\mu\, u^2 \ . \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 1$ et $\alpha - 3 + N = \alpha - 1 + N - 2 > 0$, si

$$\gamma \geq 1 + \frac{4}{\alpha - 3 + N}$$

le résultat est immédiat.

Si

$$\gamma \leq 1 + \frac{4}{\alpha - 3 + N}$$

le principe de maximum nous assure que

$$|u|^{\gamma-1} \leq \frac{\mu}{c} \,, \qquad c \neq 0 \ .$$

Par conséquent,

$$u^2\, \frac{\alpha - 1 + N - \gamma(\alpha - 3 + N)}{\gamma + 1}\, c\,|u|^{\gamma-1} - 2\mu\, \mu^2 \leq u^2\, \frac{(\alpha - 1 + N)\,(1 - \gamma)}{\gamma + 1}\, \gamma \leq 0 \ . \ ∎$$

Exemple 3.7: Soit γ tel que

$$1 \le \gamma \le \frac{\alpha+1+N}{\alpha-3+N} = 1 + \frac{4}{\alpha-3+N}$$

et $c \le 0$.

Le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + c\,|u|^{\gamma-1}\,u = 0 & u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma\ , \end{cases}$$

ne peut avoir de solutions dans l'espace $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ autre que zéro.

REFERENCES

[1] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. – Dual variational method in critical points theory and applications, *J. Funct. Anal.,* 14 (1973), 349–381.

[2] Esteban, M.J. et Lions, P. – *Comptes rendus*, 290 série A, p. 1083.

[3] Esteban, M.J. et Lions, P. – *Existence and non existence results for semi linear elliptics problems in unbounded domains*, Thése de 3$^{\text{ème}}$ cycle, Paris, 1983.

[4] Gallouet, T. – Thse d'État, Paris, VI, 1984.

[5] Haraux, A. et Khodja, B. – Caractère trivial de la solution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires dans des ouverts cylindriques de $\mathbb{R}^N$, *Portugaliae Math.,* 42(2) (1982–1984).

[6] Pohozaev, S.L. – Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda\, f(u) = 0$, *Sov. Math. Dokl.,* 5 (1965), 1408–1411.

Khodja Brahim,
Université D'Annaba, Institut de Mathématiques,
B.P. 12 Annaba – ALGERIE