

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
 $-\Delta u + cu = f$ НА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ИЗ $W_{2,*}^s$ ($-\infty < s < +\infty$)

Б. С. Иванович, Л. Д. Иванович, Э. Шили

Резюме. Исследуется сходимость разностных схем, аппроксимирующих уравнение $-\Delta u + cu = f$, с условиями периодичности. Показано, что обычная схема “крест” с усредненной правой частью, сходится в дискретной $W_{2,*}^m$ -норме со скоростью $O(h^\alpha)$, если решение исходной задачи принадлежит периодическому пространству Соболева-Слободецкого $W_{2,*}^{m+\alpha}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $0 < \alpha \leq 2$).

В последнее время большое внимание уделяется исследованию сходимости дискретных решений к обобщенным решениям задач математической физики. Так например, в [1] исследована сходимость в сеточных нормах разностной схемы для уравнения Пуассона в квадрате, с кусочно-Гёльдеровой правой частью. В [2—9] исследована сходимость разностных схем для различных уравнений эллиптического типа, чьи решения принадлежат пространствам Соболева. Похожие оценки получены в [10] для метода конечных элементов и в [11] для параболической задачи.

В данной работе исследуется скорость сходимости разностных схем для уравнения $-\Delta u + cu = f$, в случае, когда его решение принадлежит периодическим пространствам Соболева-Слободецкого. Получены согласованные оценки скорости сходимости вида: $\|z\|_{m,h} \leq \text{const } h^{z-m} \|u\|_{s,*}$ ($m < s \leq m + 2$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Введение

Пусть Ω — область в R^2 . Как обычно, через $W_2^s(\Omega)$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) будем обозначать пространства Соболева с нормой

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\sum_{j=0}^s |u|_{j,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad \text{где } |u|_{j,\Omega} = \left(\sum_{|\sigma|=j} \|D^\sigma u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$
$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2), \quad |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2, \quad D^\sigma u = \partial^{|\sigma|} u / \partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2}.$$

Для не целого s , через $W_2^s(\Omega)$ будем обозначать пространства Соболева-Слободецкого [12], с нормой $\|u\|_{s,\Omega} = (\|u\|_{[s],\Omega}^2 + |u|_{s,\Omega}^2)^{1/2}$. где

$$|u|_{s,\Omega} = \left\{ \sum_{|\sigma|=[s]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} [D^{\sigma} u(y) - D^{\sigma} u(x)]^2 |y-x|^{-2-2\{s\}} dx dy \right\}^{1/2},$$

$$\{s\} = s - [s], \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \text{ и } |y-x| = [(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2]^{1/2}.$$

Через $W_{2,*}^s$ будем обозначать 2π -периодические пространства Соболева и Соболева-Слободецкого [13, 14], с нормой: $\|u\|_{s,*} \leq \|u\|_{s,(-\pi,\pi)^2}$, для $s \in N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$, то есть $\|u\|_{s,*} = (\|u\|_{[s],*}^2 + |u|_{s,*}^2)^{1/2}$,

$$|u|_{s,*} = \left\{ \sum_{|\sigma|=[s]} \int_{(-\pi,\pi)^2} \int_{(-\pi,\pi)^2} [D^{\sigma} u(x+t) - D^{\sigma} u(x)]^2 |t|^{-2-2\{s\}} dx dt \right\}^{1/2},$$

для не целого $s > 0$. Для $s < 0$ через $W_{2,*}^s$ будем обозначать пространства распределений $W_{2,*}^s = (W_{2,*}^{-s})'$, с нормой

$$\|u\|_{s,*} = \sup_{v \in W_{2,*}^{-s}} |\langle u, v \rangle| / \|v\|_{-s,*}.$$

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad -\Delta u + cu = f$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ и $c = \text{const} > 0$. Если $f \in W_{2,*}^{s-2}$, тогда уравнение (1) имеет единственное решение $u \in W_{2,*}^s$, и выполнена оценка

$$(2) \quad \|u\|_{s,*} \leq M \|f\|_{s-2,*}, \quad M = \text{const} > 0.$$

Для $s < 2$ уравнение (1) понимается с смысле распределений.

Все оценки скорости сходимости базируются на следующей лемме, которая является обобщением леммы Брэмбла-Гильберта [15].

Лемма 1. Пусть Ω — связная область в R^2 , которая удовлетворяет условию конуса. Пусть $s \geq 0$ — целое число, $0 < \sigma \leq 1$, $s = s + \sigma$ и $\eta = \eta(u)$ линейный ограниченный функционал на $W_2^s(\Omega)$, который обращается в нуль на многочленах степени $\leq s$. Тогда для каждого $u \in W_2^s(\Omega)$ выполнено неравенство $|\eta(u)| \leq M |u|_{s,\Omega}$, $M = \text{const} > 0$.

Доказательство. Так как η — линейный ограниченный функционал на $W_2^s(\Omega)$, который обращается в нуль на многочленах степени $\leq s$, то

$$|\eta(u)| \leq M_1 \inf_p \|u - p\|_{s,\Omega},$$

где инфимум берётся по всем многочленам p степени $\leq s$. На основании аппроксимационной теоремы Дюпон-Скотта [16], существует постоянная $M_2 = M_2(\Omega, s)$, не зависящая от u такая что выполнено неравенство:

$$\inf_p \|u - p\|_{s,\Omega} \leq M_2 |u|_{s,\Omega}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Построение разностной схемы

Пусть $n > 2$ — натуральное число, и $h = 2\pi/n$. Плоскость (x_1, x_2) покроем сеткой $R_h^2 = \{x = (x_1, x_2) | x_j = i_j h; i_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; j = 1, 2\}$. Для функций, определенных на сетке R_h^2 , будем использовать следующие обозначения: $v = v(x) = v(x_1, x_2)$,

$$\Delta_j v = (v(x + he_j) - v(x))/h, \quad \nabla_j v = (v(x) - v(x - he_j))/h,$$

где $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Через H_h обозначим пространство 2π -периодических сеточных функций

$$H_h = \{v | v(x_1 + 2\pi, x_2) = v(x_1, x_2 + 2\pi) = v(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in R_h^2\}.$$

В H_h введем скалярное произведение $(v, w)_h = h^2 \sum_{x \in \omega} v(x)w(x)$,

где $\omega = \{x \in R_h^2 | -[(n-1)/2]h \leq x_1, x_2 \leq [n/2]h\}$. Введем также нормы (см. [17]):

$$\|v\|_h = \|v\|_{0,h} = |v|_{0,h} = (v, v)_h^{1/2}, \quad \|v\|_{s,h} = \left(\sum_{j=0}^s |v|_{j,h}^2 \right)^{1/2}, \quad s \in N,$$

$$\text{где } |v|_{j,h} = \left(\sum_{k=0}^j \|\Delta_1^{j-k} \Delta_2^k v\|_h^2 \right)^{1/2}, \quad \text{и } \|v\|_{-s,h} = \sup_{w \in H_h} |(v, w)_h| \cdot \|w\|_{s,h}^{-1}, \quad e \in N,$$

являющиеся дискретными аналогами норм Соболева.

Обозначим также

$$\begin{aligned} \Lambda_j v &= -\Delta_j \nabla_j v, \quad j = 1, 2, \\ \Delta_h v &= \Delta_1 \nabla_1 v + \Delta_2 \nabla_2 v = -\Lambda_1 v - \Lambda_2 v, \\ \Lambda v &= \Lambda_1 v + \Lambda_2 v + cv. \end{aligned}$$

Оператор Λ отображает H_h в H_h . Непосредственно проверяется, что Λ — симметричный, положительно-определенный линейный оператор, и выполняется неравенство $(\Lambda v, v)_h \geq c \|v\|_h^2$. Поэтому можем определить нормы

$$\|v\|_{\Lambda^m} = (\Lambda^m v, v)_h^{1/2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Непосредственно проверяется, что для $m \geq 0$

$$\|v\|_{\Lambda^m}^2 = \sum_{k=0}^m c^{m-k} C_{m,k} \sum_{j=0}^k C_{k,j} \|\Delta_1^{k-j} \Delta_2^j v\|_h^2.$$

Оттуда следует, что нормы $\|\cdot\|_{m,h}$ и $\|\cdot\|_{\Lambda^m}$ (а значит и $\|\cdot\|_{-m,h}$ и $\|\cdot\|_{\Lambda^{-1m}}$) — эквивалентны.

Уравнение

$$(3) \quad \Lambda z = \varphi, \quad \varphi \in H_h$$

имеет единственное решение $z = \Lambda^{-1}\varphi \in H_h$. Из (3) следует

$$\begin{aligned} \|z\|_{\Lambda^m}^2 &= (\Lambda^m z, z)_h = (\Lambda^m z, \Lambda^{-1}\varphi)_h \leq \\ &\leq \|z\|_{\Lambda^m} \|\Lambda^{-1}\varphi\|_{\Lambda^m} = \|z\|_{\Lambda^m} \|\varphi\|_{\Lambda^{m-2}}, \end{aligned}$$

откуда непосредственно получаем априорную оценку

$$(4) \quad \|z\|_{\Lambda^m} \leq \|\varphi\|_{\Lambda^{m-2}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Основной идеей при построении разностной схемы является усреднение правой части уравнения (1). Рассмотрим поэтому функцию

$$S_\nu(x) = \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^\nu, \quad x \in R, \quad \nu \in N \cup \{0\}.$$

S_ν можно продолжить на множество C комплексных чисел, так что продолжение будет целой функцией экспоненциального типа. По теореме Пэли-Винер-Шварца [18] существует распределение θ_ν на R с компактным носителем, преобразованием Фурье которого является S_ν .

Непосредственно проверяется, что θ_0 — мера Дирака, концентрированная в нуле. Для $\nu \geq 1$, θ_ν является регулярным распределением. Например

$$\theta_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & x \in R \setminus [-1/2, 1/2], \end{cases} \quad \theta_2(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \in R \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Пусть $\nu(\nu_1, \nu_2)$, $x = (x_1, x_2)$, θ_ν — тензорное произведение распределений θ_{ν_1} и θ_{ν_2} , $G_\nu(x) = h^{-2}\theta_\nu(x/h)$ и u — какое-нибудь распределение на R^2 . Оператор T_ν , определенный следующим способом: $T_\nu u = u * G_\nu$ будем называть оператором усреднения. Вместо $T_\nu = T_{(\nu_1, \nu_2)}$ будем писать и T_{ν_1, ν_2} .

Легко проверяется, что если $u \in W_{2,*}^s$, тогда $T_{11}u \in W_{2,*}^{s+1}$. Если $u \in W_{2,*}^s$, $s > 1$, тогда на основании теоремы вложения [13] u является непрерывной функцией, и непосредственно проверяется что в узлах сетки R_h^2

$$T_{20}\partial^2 u / \partial x_1^2 = \Delta_1 \nabla_1 u, \quad T_{02}\partial^2 u / \partial x_2^2 = \Delta_2 \nabla_2 u.$$

Предположим, что правая часть f уравнения (1) принадлежит пространству $W_{2,*}^{s-2}$. Для $s > 3$, f является непрерывной, а сужение f на R_h^2 принадлежит пространству H_h . Тогда уравнение (1) можем аппроксимировать разностным уравнением

$$(5) \quad \Lambda v \equiv -\Delta_h v + cv = f, \quad x \in R_h^2, \quad v \in H_h.$$

Для $s > 2$, $T_{11}f$ является непрерывной функцией, и уравнение (1) можем аппроксимировать с

$$(6) \quad \Delta v = T_{11}f, \quad x \in R_h^2, \quad v \in H_h.$$

Для $s > -m$, $m \in N \cup \{0, -1\}$, f является умеренным распределением. Тогда $T_{m+3, m+3}f$ является непрерывной функцией, и сужение $T_{m+3, m+3}f$ на R_h^2 принадлежит H_h . Тогда уравнение (1) можем аппроксимировать разностным уравнением

$$(7) \quad \Delta v = T_{m+3, m+3}f, \quad x \in R_h^2, \quad v \in H_h.$$

Сходимость разностной схемы (6)

Пусть $u \in W_{2,s}^s$ ($s > 2$) — решение уравнения (1), и v — решение уравнения (6). Функция $z = u - v$ определена в узлах сетки R_h^2 , принадлежит пространству H_h , и удовлетворяет уравнению (3), где:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Delta_1 \eta_1 + \Delta_2 \eta_2 + c\zeta, \\ \eta_1(x_1, x_2) &= (T_{01} \partial u / \partial x_1)|_{(x_1-h/2, x_2)} - \nabla_1 u(x_1, x_2), \\ \eta_2(x_1, x_2) &= (T_{10} \partial u / \partial x_2)|_{(x_1, x_2-h/2)} - \nabla_2 u(x_1, x_2), \\ \zeta &= u - T_{11}u. \end{aligned}$$

Из (4) следует

$$(8) \quad \|z\|_{\Lambda^2} \leq \|\Delta_1 \eta_1\|_h + \|\Delta_2 \eta_2\|_h + c\|\zeta\|_h.$$

Оценим сначала $\|\Delta_1 \eta_1\|_h$. Предварительно отображим область

$$e(i_1, i_2) = \{x | (i_1 - 1)h \leq x_1 \leq (i_1 + 1)h, (i_2 - 1/2)h \leq x_2 \leq (i_2 + 1/2)h\}$$

на прямоугольник $E = \{t | -1 \leq t_1 \leq 1, -1/2 \leq t_2 \leq 1/2\}$, полагая $x_j = i_j h + t_j h$, $j = 1, 2$, $u(x) = u^*(t)$. Следует

$$\begin{aligned} \Delta_1 \eta_1(i_1 h, i_2 h) &= h^{-2} \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\partial u^*(1/2, t_2)}{\partial t_1} - \frac{\partial u^*(-1/2, t_2)}{\partial t_1} \right] dt_2 - \right. \\ &\quad \left. - [u^*(1, 0) - 2u^*(0, 0) + u^*(-1, 0)] \right\}. \end{aligned}$$

Из теорем вложения (13) следует, что $\Delta_1 \eta_1$ является линейным ограниченным функционалом на $W_2^s(E)$, $s > 2$

$$|\Delta_1 \eta_1| \leq 2h^{-2} \max_{t \in E} |\partial u^* / \partial t_1| + 4h^{-2} \max_{t \in E} |u^*(t)| \leq Mh^{-2} \|u^*\|_{s, E}$$

Кроме того, $\Delta_1 \eta_1 = 0$ — если $u^*(t)$ многочлен степени ≤ 3 . Из леммы 1 следует

$$|\Delta_1 \eta_1| \leq M_1 h^{-2} |u^*|_{s, E}, \quad 2 < s \leq 4.$$

Возвращаясь на старые переменные получаем:

$$|\Delta_1 \eta_1(i_1 h, i_2 h)| \leq M_2 h^{s-3} |u|_{s, e(i_1, i_2)}, \quad 2 < s \leq 4.$$

Отсюда дальше получаем оценку

$$(9) \quad \|\Delta_1 \eta_1\| \leq \text{const} \cdot h^{s-2} |u|_{s, *}, \quad 2 < s \leq 4.$$

Аналогичная оценка выполнена и для $\|\Delta_2 \eta_2\|_h$.

Выражение ζ является ограниченным линейным функционалом на W_2^s , $s > 1$, который обращается в нуль на многочленах степени ≤ 1 . Используя изложенную методику, получаем оценку

$$(10) \quad \|\zeta\|_h \leq \text{const} \cdot h^s |u|_{s, *}, \quad 1 < s \leq 2.$$

Из (8–10) получаем следующую оценку скорости сходимости разностной схемы (6)

$$(11) \quad \|z\|_{\Lambda^2} \leq \text{const} \cdot h^{s-2} \|u\|_{s, *}, \quad 2 < s \leq 4.$$

Сходимость разностной схемы (5)

Пусть $u \in W_{z, *}^s$ ($s > 3$) — решение уравнения (1), v — решение разностного уравнения (5) и $z = u - v$. Функция z определена в узлах сетки R_h^2 , принадлежит пространству H_h и удовлетворяет уравнению (3), где

$$\varphi = \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_j = \partial^2 u / \partial x_j^2 - \Delta_j \nabla_j u, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $m \geq 3$ — целое число, и $s > m$. Из (4) следует

$$(12) \quad \|z\|_{\Lambda^m} \leq \|\eta_1\|_{\Lambda^{m-2}} + \|\eta_2\|_{\Lambda^{m-2}}$$

Дальше получаем

$$\|\eta_j\|_{\Lambda^{m-2}}^2 = \sum_{k=0}^{m-2} c^{m-2-k} C_{m-2, k} \sum_{i=0}^n C_{k, i} \|\Delta_1^{k-i} \Delta_2^i \eta_j\|_h^2.$$

Выражение $\Delta_1^{k-i} \Delta_2^i \eta_j$ является линейным ограниченным функционалом на W_2^s , $s > 3$, который обращается в нуль на многочленах степени $\leq k + 3$. С помощью леммы 1, как в предыдущих случаях, получаем оценку

$$\|\Delta_1^{k-i} \Delta_2^i \eta_j\|_h \leq \text{const} \cdot h^{s-k-2} |u|_{s, *},$$

где $\max\{k + 2, 3\} < s \leq k + 4$. Отсюда получаем

$$(13) \quad \|\eta_j\|_{\Lambda^{m-2}} \leq \text{const} \cdot h^{s-m} \|u\|_{s, *}, \quad 3 \leq m < s \leq m + 2.$$

Из (12) и (13) получаем следующую оценку скорости сходимости разностной схемы (5)

$$(14) \quad \|z\|_{\Lambda^m} \leq \text{const} \cdot h^{s-m} \|u\|_{s, *}, \quad 3 \leq m < s \leq m + 2.$$

Сходимость разностной схемы (7)

Пусть решение u уравнения (1) принадлежит пространству $W_{2,*}^s$, где $s > -m$ и $m \in N \cup \{0, -1\}$. Тогда $T_{m+1,m+1}u$ — непрерывная, 2π -периодическая функция. Пусть v — решение уравнения (7), и $z = T_{m+1,m+1}u - v$. Функция z определена в узлах сетки R_h^2 , принадлежит пространству H_h , и удовлетворяет уравнению (3), где

$$\begin{aligned} \varphi &= -\Delta_1 \nabla_1 \eta_1 - \Delta_2 \nabla_2 \eta_2 + c\zeta = \Lambda_1 \eta_1 + \Lambda_2 \eta_2 + c\zeta, \\ \eta_1 &= T_{m+1,m+1}u - T_{m+1,m+3}u, \\ \eta_2 &= T_{m+1,m+1}u - T_{m+3,m+1}u, \\ \zeta &= T_{m+1,m+1}u - T_{m+3,m+3}u. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $p = [(m + 1)/2]$ и $U_0 = u \in W_{2,*}^2$,

$$\begin{aligned} -\Delta U_1 + cU_1 &= U_0, & U_1 &\in W_{2,*}^{s+2} \\ -\Delta U_2 + cU_2 &= U_1, & U_2 &\in W_{2,*}^{s+4} \\ &\dots \dots \dots & & \\ -\Delta U_p + cU_p &= U_{p-1}, & U &= U_p \in W_{2,*}^{s+2p} \end{aligned}$$

Следует

$$\begin{aligned} T_{m+1,m+1}u &= T_{m+1,m+1}(-\Delta + cI)^p U = \\ &= T_{m+1,m+1} \sum_{q=0}^p C_{p,q} (-1)^{p-q} c^q \Delta^{p-q} U = \\ T_{m+1,m+1} \sum_{q=0}^p C_{p,q} (-1)^{p-q} c^q \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} \partial^{2p-2q} U / \partial x_1^{2p-2q-2r} \partial x_2^{2r} &= \\ \sum_{q=0}^p C_{p,q} (-1)^{p-q} c^q \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} \Delta_1^{p-q-r} \nabla_1^{p-q-r} \Delta_2^r \nabla_2^r (T_{m+1-2p+2q+2r,m+1-2r} U). \end{aligned}$$

Похоже представляются и $T_{m+1,m+3}u$, $T_{m+3,m+1}u$ и $T_{m+3,m+3}u$, так что, подставляя соответствующие выражения в (15), получаем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{q=0}^p C_{p,q} c^q \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} (\Lambda_1^{p-q-r+1} \Lambda_2^r \alpha_{qr} + \\ &+ \Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^{r+1} \beta_{qr} + c \Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^r \gamma_{qr}) \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{qr} &= T_{m+1-2p+2q+2r,m+1-2r}U - T_{m+1-2p+2q+2r,m+3-2r}U, \\ \beta_{qr} &= T_{m+1-2p+2q+2r,m+1-2r}U - T_{m+3-2p+2q+2r,m+1-2r}U, \\ \gamma_{qr} &= T_{m+1-2p+2q+2r,m+1-2r}U - T_{m+3-2p+2q+2r,m+3-2r}U. \end{aligned}$$

Легко видеть что α_{qr}, β_{qr} и γ_{qr} — непрерывные функции.

Из (4) и (6) следует

$$(17) \quad \begin{aligned} \|z\|_{\Lambda^{-m}} &\leq \sum_{q=0}^p C_{p,q} c^q \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} (\|\Lambda_1^{p+1-q-r} \Lambda_2^r \alpha_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} + \\ &\|\Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^{r+1} \beta_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} + c \|\Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^r \gamma_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}}). \end{aligned}$$

Дальше

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1^{p+1-q-r} \Lambda_2^r \alpha_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} &\leq \|\Lambda^{p+1-q} \alpha_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} \leq \\ &\leq c^{-q} \|\Lambda^{p+1} \alpha_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} = c^{-q} \|\alpha_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}}, \end{aligned}$$

и похоже

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^{r+1} \beta_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} &\leq c^{-q} \|\beta_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}}, \\ c \|\Lambda_1^{p-q-r} \Lambda_2^r \gamma_{qr}\|_{\Lambda^{-m-2}} &\leq c^{-q} \|\gamma_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}}. \end{aligned}$$

Из этих оценок и (17) получаем априорную оценку

$$(18) \quad \|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \sum_{q=0}^p C_{p,q} \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} (\|\alpha_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}} + \|\beta_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}} + \|\gamma_{qr}\|_{\Lambda^{2p-m}}).$$

Если m — нечетное число, тогда $p = (m+1)/2$, так что из (18) получаем

$$(19) \quad \|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \sum_{q=0}^p C_{p,q} \sum_{r=0}^{p-q} C_{p-q,r} (\|\alpha_{qr}\|_{\Lambda} + \|\beta_{qr}\|_{\Lambda} + \|\gamma_{qr}\|_{\Lambda}).$$

Функция U принадлежит пространству $W_{2,*}^{s+m+1}$, где $s+m+1 > 1$, и из теоремы вложения следует что U непрерывна.

Выражения $\Delta_j \alpha_{qr}$ являются линейными ограниченными функционалами на $W_{2,*}^{s+m+1}$, $s > -m$, которые обращаются в нуль на многочленах степени ≤ 2 . Из леммы 1, используя изложенную методику, получаем

$$(20) \quad \|\Delta_j \alpha_{qr}\|_h \leq \text{const} \cdot h^{s+m} |U|_{s+m+1,*}, \quad -m < s \leq -m+2.$$

Выражения α_{qr} являются линейными ограниченными функционалами на $W_{2,*}^{s+m+1}$, $s > -m$, которые обращаются в нуль на многочленах степени ≤ 1 . Из леммы 1 следует

$$(21) \quad \|\alpha_{qr}\|_h \leq \text{const} \cdot h^{s+m+1} |U|_{s+m+1,*}, \quad -m < s \leq -m+1$$

Из (20) и (21) следует:

$$(22) \quad \|\alpha\|_{\Lambda} \leq \text{const} \cdot h^{s+m} |U|_{s+m+1,*}, \quad -m < s \leq -m+2$$

Аналогичные оценки выполнены и для $\|\beta_{qr}\|_\Lambda$ и $\|\gamma_{qr}\|_\Lambda$, так что заменой в (19) получаем

$$(23) \quad \|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \text{const} \cdot h^{s+m} \|U\|_{s+m+1,*}, \quad -m < s \leq -m + 2.$$

Далее, на основании (2), имеем

$$\begin{aligned} \|U\|_{s+m+1,*} &\leq \text{const} \|U_{p-1}\|_{s+m+1,*} \leq \dots \\ \dots &\leq \text{const} \|u\|_{s+m+1-2p,*} = \text{const} \|u\|_{s,*}, \end{aligned}$$

что вместе с (23) дает априорную оценку

$$(24) \quad \|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \text{const} \cdot h^{s+m} \|u\|_{s,*}, \quad -m < s \leq -m + 2$$

Если m — четное число, тогда $p = m/2$, и из (18) получаем:

$$(25) \quad \|z\|_{\Lambda^{-m}} \leq \sum_{q=0}^p C_{p,q} \sum_{r=0}^{p-q} (\|\alpha_{qr}\|_h + \|\beta_{qr}\|_h + \|\gamma_{qr}\|_h).$$

Функция U принадлежит пространству $W_{2,*}^{s+m}$, $s+m > 0$, так что $T_{11}U$ — непрерывная функция.

Выражения α_{qr} , β_{qr} и γ_{qr} являются линейными ограниченными функционалами на $W_{2,*}^{s+m}$, $s > -m$, которые обращаются в нуль на многочленах степени ≤ 1 . Как в предыдущих случаях, из леммы 1 получаем оценки

$$(26) \quad \|\alpha_{qr}\|_h, \|\beta_{qr}\|_h, \|\gamma_{qr}\|_h \leq \text{const} \cdot h^{s+m} \|U\|_{s+m,*}$$

(где $-m < s \leq -m + 2$). Далее имеем

$$(27) \quad \|U\|_{s+m,*} \leq \text{const} \|U_{p-1}\|_{s+m-2,*} \leq \dots \leq \text{const} \|u\|_{s+m-2p,*} = \text{const} \|u\|_{s,*}$$

Из (25–27), как и в предыдущем случае, получаем оценку (24).

Заключение

Полученные оценки скорости сходимости (11), (14) и (24) можно объединить следующим способом.

Пусть решение u уравнения (1) принадлежит пространству $W_{2,*}^s$, и пусть $s > m$, где m — целое число. Рассмотрим разностную схему

$$\Lambda v = \varphi, \quad \varphi, v \in H_h$$

где

$$\varphi = \begin{cases} f, & \text{для } m \geq 3, \\ T_{3-m,3-m} f, & \text{для } m \leq 2. \end{cases}$$

Обозначим также

$$z = \begin{cases} u - v & \text{для } m \geq 1, \\ T_{1-m,1-m} u - v, & \text{для } m \leq 0. \end{cases}$$

Тогда выполнена оценка скорости сходимости

$$(28) \quad \|z\|_{\Lambda^m} \leq \text{const} \cdot h^{s-m} \|u\|_{s,*}, \quad m < s \leq m+2.$$

Из (28) и (2) дальше получаем оценку

$$(29) \quad \|z\|_{\Lambda^m} \leq \text{const} \cdot h^{s-m} \|f\|_{s-2,*}, \quad m < s \leq m+2.$$

Принимая во внимание эквивалентность норм $\|\cdot\|_{\Lambda^m}$ и $\|\cdot\|_{m,h}$ из (28) и (29) получаем оценки

$$\|z\|_{m,h} \leq \text{const} \cdot h^{s-m} \|u\|_{s,*}, \quad \|z\|_{m,h} \leq \text{const} \cdot h^{s-m} \|f\|_{s-2,*}, \\ (m < s \leq m+2; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. И. Березин, *Оценка скорости сходимости разностной схемы для уравнения Пуассона с кусочно-непрерывной правой частью* Вестник Москов. Унив. Сер. XV Вычисл. Мат. Кибернет. **2** (1979), 26–31.
- [2] В. Л. Макаров, И. П. Гаврилюк, С. П. Пирназаров, *О сходимости разностных решений к решениям бигармонического уравнения из классов W_2^k* , Вестник Каракалпак. Фил. Акад. Наук Уз ССР **1** (79) (1980), 3–10.
- [3] Р. Д. Лазаров, *К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона*, Дифференциальные Уравнения **17** (1981), 1285–1294.
- [4] Р. Д. Лазаров, *О сходимости разностных решений к обобщенным решениям бигармонического уравнения в прямоугольнике*, Дифференциальные Уравнения **17** (1981), 1295–1303.
- [5] Р. Д. Лазаров, *О сходимости разностных схем для некоторых осесимметричных задач математической физики в классах обобщенных решений*, Докл. Акад. Наук СССР, **258** (1981), 1301–1304.
- [6] Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений*, Докл. Акад. Наук СССР **259** (1981), 282–286.
- [7] Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы второго порядка точности для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях из W_2^2* , Ж. Вычисл. Мат. Мат. Физ. **21** (1981), 1168–1179.
- [8] Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, А. А. Самарский, *Применение точных разностных схем для построения и исследования разностных схем на обобщенных решениях*, Мат. Сб. **117** (159) (1982), 469–480.
- [9] И. П. Гаврилюк, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, С. П. Пирназаров, *Оценки скорости сходимости разностных схем для уравнений четвертого порядка эллиптического типа*, Ж. Вычисл. Мат. Мат. Физ. **23** (1983), 355–365.
- [10] Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец, *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений*, Акад. Наук Арм. ССР, Ереван, 1979.
- [11] W. Hackbusch, *Optimal $H^{p,p/2}$ error estimates for a parabolic Galerkin method*, SIAM J. Numer. Anal. **18** (1981), 681–692.
- [12] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [13] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, Москва, 1969.
- [14] О. В. Бесов, *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*, Труды Мат. Инст. Стеклова **60** (1961), 42–81.

- [15] J. H. Bramble, S. R. Hilbert, *Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation*, Numer. Math. **16**(1971), 362–369.
- [16] T. Dupont, R. Scott, *Polynomial approximation in Sobolev spaces*, Math. Comput. **34** (1980), 441–464.
- [17] Ю. И. Мокин, *Сеточный аналог теоремы вложения для классов типа W* , Ж. Вычисл. Мат. Мат. Физ. **11** (1971), 1361–1373.
- [18] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1973.

Одсек за математику
Природно-математички факултет
11000 Београд

(Поступила 25 06 1983)