PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 34 (48), 1983, pp. 61–64

ОБ ОТКРЫТЫХ МОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

В. В. Федорчук

Р. Д. Андерсон доказал [**2**], что гильбертов кирпич Q является монотонным открытым образом менгеровской кривой M. Отсюда переходом к полным прообразам подмножеств вытекает

Теорема A. *Всякий компакт является монотонным открытым образом одномерного компакта.*

В данной заметке мы переносим это утверждение на неметризуемый случай. Имеет место

Теорема 1. *Для всякого бикомпакта X существуем бикомпакт Z размерности* $\dim Z \leq 1$ *и монотонное открытое отображение f бикомпактна Z на бикомпакт X.*

Прежде, чем доказывать теорему 1, мы укажем одно её приложение.

Для бикомпакта X через $\exp X$ обозначается пространство всех непустых подмножеств X, снабженное топологией Вьеториса. Через $\exp^c X$ обозначается подпространство пространства $\exp X$, точками которого являются все подконтинуумы X.

Бикомпакт X называется многозначным (соответственно континуумзначным) абсолютным ретрактом, если при всяком его вложении $X \hookrightarrow I^\tau$ в тихоновский куб существует многозначная (соответственно континуумзначная ретракция $r : I^\tau \to \exp X$ (соответственно $r : I^\tau \to \exp^c X$), т.е. такое непрерывное отображение, что $r(x) = \{x\}$ для всякой точки $x \in X$.

Непрерывнор отображение $f : X \to Y$ называется n-мягким, если для всякого бикомпакта Z размерности $\dim Z \leq n$ и всякого его замкнутого подмножества A всякую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

можно дополнить до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "k"] & Y \end{tikzcd}$$

Наконец, бикомпакт X называется *абсолютным экстензором в размерности* n (пишем $X \in AE(n)$) если постоянное его отображение являестя n-мягким.

Г. М. Непомнящий доказал [**4**], что всякий многозначный абсолютный ретракт (MAR) адекватен классу 1-мягких отображений (определение адекватности смотри в работе Е. В. Щепина [**8**]) и, следовательно, является абсолютным экстензором в размерности 1. Имеет место

Теорема 2. *Для бикомпакта X эквивалентны следующие условия*

а) $X \in$CAR* б) $X \in$MAR в) $X \in$AE (1)

Доказательство. В силу бышесказанного надо лишь проверить импликацию в)$\Rightarrow$ а). Пусть $X \in$AE (1) и $X \hookrightarrow I^\tau$–вложение. Существует одномерный бикомпакт Z и монотонное открытое отображение $f : Z \to I^\tau$ на I^τ (см. Теорему 1). Положим $A = f^{-1}X$ и $g = f \mid A$. Поскольку $X \in$AE(1), существует такое отображение $h : Z \to X$, что $h \mid A = g$. Тогда отображение $\exp^c h \circ f^{-1} : I^\tau \to \exp^c X$ и будет искомой континуумзначной ретракцией.

Следствие. *Класс* AE (1)*-бикомпактов адекватен классу* 1*-мягких отображений.*

Отметим, что по-прежнему не решен следующий вопрос.

Вопрос. Адекватен ли класс AE(n)-бикомпактов классу n-мягких отображений при любом n?

Пока ответ на этот вопрос положителен лишь для $n = 0$ (Хейдон [**6**]), $n = \infty$ (Е. В. Щепин [**8**]) и $n = 1$.

Доказательство теоремы 1 использует метод Б. А. Пасынкова [**5**], с помощью которого он из примера Л. В. Келдыш [**3**] нульмерного открытого отображения одномерного компакта на квадрат получил отрытое нульмерное отображение одномерного бикомпакта на произвольный ненульмерный бикомпакт.

Все отображения ниже будут отображениями "на". Скажем, что коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "p"'] & Y_2 \arrow[d, "q"] \\ X_1 \arrow[r, "f_1"'] & Y_1 \end{tikzcd} \tag{1}$$

*т.е. X является континуумзначным абсолютным ретрактом.

заполнена, если для всякой точки $x \in X_1$ имеем $f_2 p^{-1}(x) = q^{-1} f_1(x)$.

Лемма 1. [**5**]. *Пусть* $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha < \tau\}$ *и* $T = \{Y_\alpha, \varrho^\alpha_\beta : \alpha < \tau\}$– *два обратных вполне упорядоченных спектра одной и той же длины. Пусть* $F : S \to T$–*такой морфизм спектра* S *в спектр* T *(т. е.* $F = \{f_\alpha : \alpha < \tau\}$, *где* $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ *отображения с коммутативными диаграммами*

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi^\alpha_\beta"'] & Y_\alpha \arrow[d, "\varrho^\alpha_\beta"] \\ X_\beta \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_\beta \end{tikzcd} \tag{2}$$

для всех ($\beta \le \alpha < \tau$), что все диаграммы (2) *заполнены, все отображения* f_α *открыты. Тогда предельное отображение* $\lim\limits_{\leftarrow} F : \lim\limits_{\leftarrow} S \to \lim\limits_{\leftarrow} T$ *также открыто.*

Из определения пределов обратных спектров непосредственно вытекает

Лемма 2. *Если морфизм* $F : S \to T$ *состоит из монотонных отображений, то пределеьное отображение* $\lim\limits_{\leftarrow} F : \lim\limits_{\leftarrow} S \to \lim\limits_{\leftarrow} T$ *также монотонно.*

Теорема 1 доказывается индукцией по весу бикомпакта X. При $wX = \omega_0$-это теорема A. Предположим, что теорема 1 доказана для всех бикомпактов веса $< \tau$. Докажем её для бикомпактов веса τ. Для этого, как и в случае теоремы A, достаточно доказать её для куба I^τ. Представим I^τ в виде предела непрерывного (см. [**7**]) спектра $T = \{Y_\alpha,\ \varrho^\alpha_\beta : \alpha < \tau\}$, где $Y_\alpha < \tau$ и все соседние проекци $\varrho^{\alpha+1}_\alpha$ гомеоморфны проектированиям $Y_\alpha \times I \to Y_\alpha$.

Теперь простроим спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha < \tau\}$ из бикомпактов X_α размерности $\dim X_\alpha \le 1$ и веса $wX_\alpha < \tau$ и открытых монотонных отображений, а также такой морфизм $F = \{f_\alpha : \alpha < \tau\} : S \to T$, что все отображения f_α являются монотонными открытими отображениями "на", а все диаграммы вида (2) заполнены. Тогда предельное отображение $f = \lim\limits_{\leftarrow} F$ и будет искомым монотонным открытым отображением бикомпакта $Z = \lim\limits_{\leftarrow} S$ на I^τ, в силу лемм 1 и 2.

Спектр S и морфизм F строятся посредством трансфинитной рекурсии. Начальный шаг тривиален, поскольку мы можем предложить что Y_0 состоит из одной точки. Спектр S будет непрерывным, поэтому проекция π^α_β для предельного α является пределом проекций π^γ_β при $\beta \le \gamma < \alpha$. Отображение f_α для предельного α также определяется как предел отображений f_γ, $\gamma < \alpha$. В силу лемм 1 и 2 отображение f_α будет монотонным, открытым и, очевидно, "на". Заполненность диаграмм вида (2) для предельного α вытекает из легко проверяемого утверждения: предел заполненных диаграмм заполнен.

Итак, осталось совершить рекурсивный переход от α к $\alpha+1$. Мы можем включить в формулировку теоремы 1 требование $wZ \leq wX$, выполненное при $wX=\omega_0$. Поэтому мы можем считать, что $wX_\beta \leq wY_\beta$, $\beta \leq \alpha$, для бикомпактов из спектра S. Пусть диаграмма (3) является верным произведеннем отображений f_α и $\varrho_\alpha^{\alpha+1}$ (см. [**1**], Приложение к гл. 1, § 2).

$$
\begin{tikzcd}
Z_{\alpha+1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y_{\alpha+1} \arrow[d, "\varrho_\alpha^{\alpha+1}"] \\
X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"'] & Y_\alpha
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

Тогда бикомпакт $Z_{\alpha+1}$, будучи подмножеством произведения $X_\alpha \times Y_{\alpha+1}$, имеет вес $wZ_{\alpha+1} \leq wY_{\alpha+1} < \tau$. По индуктивному предложению существует бикомпакт $X_{\alpha+1}$ с $wX_{\alpha+1} \leq wz_{\alpha+1}$ и $\dim X_{\alpha+1} \leq 1$ монотонное открытое отображение $g_{\alpha+1} : X_{\alpha+1} \to Z_{\alpha+1}$ на $Z_{\alpha+1}$. С другой стороны по лемме о параллельных (см. [**1**], Приложение к гл. 1, §2) отображение p монотонно открыто и "на", поскольку таковым же является и f_α. Тогда, положив $f_{\alpha+1} = p \circ g_{\alpha+1}$ и $\pi_\alpha^{\alpha+1} = q \circ g_{\alpha+1}$, мы и совершим переход от α к $\alpha+1$. Заполненность новых возникаючих диаграмм бытекает из очевидной заполненности диаграммы (3) и заполненности старых диаграмм. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, Наука, Москва, 1973.

[2] R. D. Anderson, *Monotone interior dimension-raising mappings*, Duke Math. J. **19** (1952), 359–366.

[3] Л. В. Келдыш, *Нульмерные открытые отображения*, Изв. АНСССР, сер. мат. **23** (1959), 165–184.

[4] Г. М. Непомнящий, *О спектральном разложении многозначных абсолютных ретрактов*, УМН, **36**:3 (1981), 221–222.

[5] Б. А. Пасынков, *Нульмерные открытые отображения повышающие размерность*, УМН, **18**:5 (1963), 183–190.

[6] R. Haydon, *On problem of Pelczynski: Milutin spaces and AE* (dim 0) , Studia Math. **52**:1 (1974), 23–31.

[7] В. В. Федорчук, *Бикомпакт все бесконечные замкнутые подмножества которого n-мерны*, Матем. сб. **96**:1 (1975), 41–62.

[8] Е. В. Щепин, *Топология предельных пространств несчетных обратных спектров*, УМН, **31**:5 (1976), 191–226.

Механико-Математический
Факултьет МГУ
Москва, СССР

(Поступила 25 12 1981)