

EINE CHARAKTERISIERUNG DER MENGE $\text{Ass}(\mathfrak{U})$ IN KOMMUTATIVEN NOETHERSCHEN RINGEN

Veselin Perić

Abstract. Let R be a commutative noetherian ring. For any ideal \mathfrak{U} of R the set $\text{Ass}(\mathfrak{U})$ of all associated prime ideals of \mathfrak{U} is a finite set P of prime ideals of R . If a finite set P of prime ideals of R contains no prime ideal of the height 0, i.e. no minimal prime ideal of (0) , then it is well known that there exists an ideal \mathfrak{U} of R such that $P = \text{Ass}(\mathfrak{U})$ ([1], 9.1). It seems to be unknown what the precise necessary and sufficient condition is, on a finite set P of primes, for the existence of such an ideal \mathfrak{U} ([1], p. 68). We answer here this question.

1. Einleitung. Jedes Ideal \mathfrak{U} eines kommutativen Noetherschen Ringes R lässt eine Primärzerlegung

$$(1) \quad \mathfrak{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{D}_i$$

zu. Dabei sind \mathfrak{D}_i die Primär Ideale mit verschiedenen Primradikalen

$$(2) \quad \mathfrak{J}_i = \text{rad}(\mathfrak{D}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und keine der Ideale \mathfrak{D}_i enthält den Durchschnitt der übrigen Ideale \mathfrak{D}_j . Die Primärkomponenten \mathfrak{D}_i der Primärzerlegung (1) von \mathfrak{U} sind i.a. nicht eindeutig bestimmt. Im Gegensatz dazu sind die Primideale (2) eindeutig; das sind die assoziierten Primideale von \mathfrak{U} , und sie bilden die Menge $\text{Ass}(\mathfrak{U})$. Die minimalen Elemente von $\text{Ass}(\mathfrak{U})$ sind die minimalen oder isolierten Primideale von \mathfrak{U} ; sie bilden die Menge $\text{Min}(\mathfrak{U})$. Die Menge $\text{Ass}(\mathfrak{U}) \setminus \text{Min}(\mathfrak{U})$ braucht nicht leer zu sein und besteht aus eingebetteten Primidealen von \mathfrak{U} . Jedes Primideal \mathfrak{J} von R das \mathfrak{U} umfasst, enthält mindestens ein minimales Primideal von \mathfrak{U} . Insbesondere sind

AMS Subject Classification (1980): 13A17, 13E05

Key words and phrases: Noetherian commutative rings, primary decomposition of ideals, associated prime ideals.

Bei der Anfertigung dieser Arbeit wurde der Verf. von dem SIZ nauke SR BiH finanziell unterstützt.

die minimalen Ideale von R , d.h. die Primideale von Rang 0, genau die minimalen Primideale von (0) .

Für ein Ideal \mathfrak{U} von R mit der Primärzerlegung (1) hat man

$$(3) \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{J}} = \bigcup_{\mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i$$

wobei

$$(4) \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{J}} = f_{\mathfrak{J}}^{-1}(f_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{U}) \cdot R_{\mathfrak{J}})$$

und

$$(5) \quad f_{\mathfrak{J}} : R \rightarrow R_{\mathfrak{J}}$$

der kanonische Homomorphismus von R in den Quotientenring $R_{\mathfrak{J}}$ von R ist. Falls $\mathfrak{U} = (0)$, so gilt bekanntlich

$$(6) \quad (0)_{\mathfrak{J}} = \bigcap \mathfrak{D}$$

wobei \mathfrak{D} alle \mathfrak{J} -primäre Ideale von R durchläuft. Ist insbesondere $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_i$ ein minimales Primideal von \mathfrak{U} , so ergibt sich aus (3) und (4)

$$(7) \quad \mathfrak{D} - i = f_{\mathfrak{J}}^{-1}(f_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{U}) \cdot R_{\mathfrak{J}}).$$

Daraus ersieht man, dass die zu einem minimalen Primideal \mathfrak{J} von \mathfrak{U} gehörige Primärkomponente von \mathfrak{U} unabhängig von der Primärzerlegung von \mathfrak{U} ist. Alle diese wohlbekannteten Tatsachen kann man etwa in [1] oder [2] finden. Hier betrachten wir die Frage, unter welchen Bedingungen es zu einer vergebenebenen endlichen Menge

$$(8) \quad P = \{\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_n\}$$

der Primideale eines kommutativen Noetherschen Ringes R ein Ideal \mathfrak{U} von R mit

$$(9) \quad P = \text{Ass}(\mathfrak{U})$$

gibt. Es ist wohlbekannt ([1], 9.1), dass es ein solches Ideal \mathfrak{U} sicherlich gibt, falls keines der Ideale \mathfrak{J}_i ein minimales Primideal von (0) ist. Auch im Falle $P \subset \text{Ass}(0)$ gibt es ein solches Ideal \mathfrak{U} , denn es genügt in diesem Falle, aus der Primärzerlegung von (0) alle den Primidealen aus $\text{Ass}(0) \setminus P$ gehörenden Primärkomponenten von (0) wegzulassen, um so ein Ideal \mathfrak{U} von R zu erhalten. In der Bezeichnung

$$(10) \quad A = P \cap \text{Min}(0), \quad B = P \cap \text{Ass}(0), \quad C = P \setminus B$$

gibt es also ein Ideal \mathfrak{U} von R mit (9), falls

$$(11) \quad A = \emptyset, \quad \text{oder} \quad C = \emptyset.$$

Dass es in den übrigen Fällen, also wenn

$$(11') \quad A \neq \emptyset \quad \text{und} \quad C \neq \emptyset,$$

so ein Ideal \mathfrak{U} nicht immer gibt, ersieht man aus folgendem Beispiel.

Beispiel. Sei R ein kommutativer Noetherscher Ring, dessen Nullideal (0) als Durchschnitt endlich vieler unvergleichbarer Primideale $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_r$ ($r > 1$) darstellbar ist. Dann ist

$$\text{Min}(0) = \text{Ass}(0) = \{\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_r\}$$

Nehmen wir weiter an, dass alle Ideale $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_r$ in einem Primideal \mathfrak{J} von R enthalten sind. Für beliebige \mathfrak{J}_i -primäre Ideale \mathfrak{D}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gilt dann

$$\mathfrak{D}_n \supseteq (0)_{\mathfrak{J}_i} = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{J}_i \supseteq \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{D}_i,$$

wobei $n = r + 1$ und $\mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}$. Deswegen gibt es kein Ideal \mathfrak{U} von R mit der Eigenschaft (9).

Es gibt natürlich Ringe R , die alle Bedingungen aus diesem Beispiel erfüllen. Es reicht zunächst, den Polynomring $K[x_1, \dots, x_r]$ über einem Körper K zu wählen. In diesem Ring sind die Primideale $(x_1), \dots, (x_r)$ untereinander unvergleichbar und sind alle im Primideal (x_1, \dots, x_r) enthalten. Nun gehe man zu dem Ring $R = K[x_1, \dots, x_r]/(x_1) \cap \dots \cap (x_r)$ über. R ist ein kommutativer Noetherscher Ring und sein Nullideal ist als Durchschnitt der untereinander unvergleichbarer Primideale $\mathfrak{J}_i = (x_i)/(x_1) \cap \dots \cap (x_r)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), die alle in dem Primideal $\mathfrak{J} = (x_1, \dots, x_r)/(x_1) \cap \dots \cap (x_r)$ enthalten sind, darstellbar.

2. Hauptergebnis. Hauptergebnis dieses Artikels ist der folgende Satz. In diesem Satz werden auf eine endliche Menge (8) der Primideale von einem kommutativen Noetherschen Ring R die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gestellt, damit es ein Ideal \mathfrak{U} von R mit der Eigenschaft (9) gibt.

SATZ. it Gegeben sei eine endliche Menge (8) der Primideale eines kommutativen Noetherschen Ringes R . Es gibt ein Ideal \mathfrak{U} von R mit der Eigenschaft (9) genau dann, wenn es eine Primärzerlegung

$$(12) \quad \mathfrak{U}^{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{J}_i \in B} \mathfrak{D}_i$$

mit

$$(13) \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{J}}^{(0)} \not\subseteq (0)_{\mathfrak{J}} \quad (\mathfrak{J} \in C)$$

gibt.

Beweis. Es gebe ein Ideal \mathfrak{U} von R mit der Eigenschaft (9). Aus der Primärzerlegung (1) erhält man die Primärzerlegung (12). Ist $C = \emptyset$, so ist (12) identisch mit (1), und die Bedingung (13) ist dann (formal) erfüllt; denn es gibt ja kein $\mathfrak{J} \in C$.

Falls $C \neq \text{emptyset}$, so erhält man aus Primärzerlegung (12) für jedes $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_j \in C$

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{J}}^{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{J}_i \in B, \mathfrak{J}_i \subseteq \text{frakJ}} \mathfrak{D}_i \supseteq \bigcap_{\mathfrak{J}_i \in B} \mathfrak{D}_i \not\subseteq \mathfrak{D}_j,$$

und wegen $(0)_{\mathfrak{J}} \subseteq \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_j$ gilt (13).

Es gebe umgekehrt eine Primärzerlegung (12) mit (13).

Ist $C = \emptyset$, so ist $P = B$, und man hat (9) für $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(0)}$. In diesem Fall ist die Voraussetzung über die Existenz der Primärzerlegung (12) mit (13) unnötig; denn wir haben bereits festgestellt, dass man in diesem Fall die Primärzerlegung von (0) erhält, indem man die zu Primidealen aus $P \setminus \text{Ass}(\mathfrak{U})$ gehörenden Primärkomponenten weglässt.

Sei nun $C \neq \emptyset$. Die Ideale aus P kann man so numerieren, dass die ersten m die Menge B die übrigen $n - m$ die Menge C bilden und dass man dabei hat $\mathfrak{J}_i \not\subseteq \mathfrak{J}_j$ ($i > j = m + 1, \dots, n - 1$).

Wir setzen $k = n - m$ und zeigen durch Induktion in bezug auf k , dass es ein Ideal \mathfrak{U} von R mit der Eigenschaft (9) gibt.

Die letzte Behauptung ist richtig für $k = 1$. Aus Primärzerlegung (12) ergibt sich, nämlich, wegen (13)

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{J}_{m+1}}^{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}_{m+1}} \mathfrak{D}_i \not\subseteq (0)_{\mathfrak{J}_{m+1}}.$$

Nach (6) gibt es also ein \mathfrak{J}_{m+1} -primäres Ideal \mathfrak{D}_{m+1} mit der Eigenschaft

$$(14) \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{J}_{m+1}}^{(0)} \not\subseteq \mathfrak{D}_{m+1}.$$

Dann ist aber

$$(15) \quad \mathfrak{U}^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{m+1} \mathfrak{D}_i$$

eine Primärzerlegung. Ist nämlich $\bigcup_{i=1}^m \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{D}_{m+1}$, dann ist wegen (14)

$$\bigcap_{i \leq m, \mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}_{m+1}} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{J}_{m+1},$$

und das nicht möglich.

Hat man für ein $j \leq m$

$$\bigcap_{m+1 \geq i \neq j} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{D}_j,$$

dann hat man wegen $\mathfrak{J}_{m+1} \not\subseteq \mathfrak{J}_j$, $\bigcap_{m \geq i \neq j} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{D}_j$, was bedeuten würde, dass (12) keine Primärzerlegung ist.

Nehmen wir nun an, die Behauptung wäre gültig für k und zeigen wir, dass sie auch für $k + 1$ richtig ist.

Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Primärzerlegung

$$(16) \quad \mathfrak{U}^{(k)} = \bigcap_{i=1}^{m+k} \mathfrak{D}_i$$

mit

$$(17) \quad \mathfrak{J}_i = \text{rad}(\mathfrak{D}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m+k).$$

Wir behaupten, dass es ein \mathfrak{J}_{m+k+1} -primäres Ideal \mathfrak{D}_{m+k+1} mit

$$(18) \quad \mathfrak{U}^{(k)} \not\subseteq \mathfrak{D}_{m+k+1}$$

gibt. Sonst hätte man

$$(19) \quad \mathfrak{U}^{(k)} \subseteq (0)_{\mathfrak{J}_{m+k+1}}.$$

Aufgrund von (13) sieht man aber leicht, dass es nicht möglich ist. Aus

$$\mathfrak{U}^{(k)} = \mathfrak{U}^{(0)} \cap \left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k} \mathfrak{D}_i \right)$$

und

$$\bigcap_{i=m+1}^{m+k} \mathfrak{D}_i \not\subseteq \mathfrak{J}_0 \quad (\mathfrak{J}_0 \in \text{Ass}((0)_{\mathfrak{J}_{m+k+1}}))$$

folgt nämlich

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{J}_{m+k+1}}^{(0)} \subseteq (0)_{\mathfrak{J}_{m+k+1}},$$

im Gegensatz zu (13).

Ist das \mathfrak{J}_{m+k+1} -primäre Ideal \mathfrak{D}_{m+k+1} so gewählt, dass es der Bedingung (18) genügt, so zeigen wir gleich, dass

$$(20) \quad \mathfrak{U}^{(k+1)} = \bigcap_{i=m+1}^{m+k} \mathfrak{D}_i$$

eine Primärzerlegung ist, was bedeutet, dass unsere Behauptung für $k+1$ richtig ist.

Aufgrund von (18) braucht man nur nachzuprüfen, dass

$$(21) \quad \bigcap_{j \neq i \leq m+k+1} \mathfrak{D}_i \not\subseteq \mathfrak{D}_j \quad (j = 1, 2, \dots, m+k).$$

Da für $j \leq m+k$, $\mathfrak{J}_{m+k+1} \not\subseteq \mathfrak{J}_j$, hätte man sonst

$$\bigcap_{j \neq i \leq m+k} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{D}_j,$$

und deswegen wäre (16) keine Primärzerlegung.

Somit ist der Satz bewiesen.

3. Bemerkungen und Ergänzungen. *Bemerkung 1.* Für die Primärzerlegung (12) ist die Bedingung (13) genau dann erfüllt, wenn für jedes $\mathfrak{J} \in C$ entweder

$$(22) \quad B_{\mathfrak{J}} = \{\mathfrak{J}_i \in B : \mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}\} \subset \{\mathfrak{J}' \in \text{Ass}(0) : \mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}\}$$

oder es mindestens ein $\mathfrak{J}_i \in B_{\mathfrak{J}}$ gibt, so dass die \mathfrak{J}_i -primäre Komponente \mathfrak{D}_i von $\mathfrak{U}^{(0)}$ in keiner Primärzerlegung von (0) auftritt.

Bemerkung 2. Gilt für jedes $\mathfrak{J} \in C$ entweder

$$(23) \quad A_{\mathfrak{J}} = \{\mathfrak{J}_i \in A : \mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}\} \cup \{\mathfrak{J}' \in \text{Min}(0) : \mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}\}$$

oder ist mindestens eines der Ideale $\mathfrak{J}_i \in A_{\mathfrak{J}}$ nicht die Primärkomponente von (0) , so gilt (13) für das Ideal (12), wobei

$$(24) \quad \mathfrak{D}_i = \mathfrak{J}_i \quad (\mathfrak{J}_i \in A)$$

$$(25) \quad \mathfrak{D}_i \mathfrak{J}_i\text{-primäre Komponente von } (0) \quad (\mathfrak{J}_i \in B \setminus A).$$

Aufgrund der Bemerkung 2 aus dem Satz ergibt sich diese

Folgerung. Sei P eine endliche Menge (8) der Primideale eines kommutativen Noetherschen Ringes R , so dass unter Bezeichnung (10) kein Ideal aus

$$(26) \quad A' = \left\{ \mathfrak{J}_i \in A : \mathfrak{J}_i \subseteq \bigcup_{\mathfrak{J} \in C} \mathfrak{J} \right\}$$

primäre Komponente vom Nullideal (0) ist. Dann gibt es ein Ideal \mathfrak{U} von R mit der Eigenschaft (9).

Bemerkung 3. Die Bedingung in voriger Folgerung ist sicherlich erfüllt, wenn $A' = \emptyset$, also insbesondere wenn $A = \emptyset$. Die Folgerung umfasst somit den in der Einleitung erwähnten Spezialfall $A = \emptyset$. Für $C = \emptyset$ ist nach (26) $(0) \in A'$ oder $A' = \emptyset$, und die Bedingung der Folgerung ist wiederum erfüllt, falls $n > 1$; denn für $n > 1$ kann nicht $(0) \in A$ sein. Die Folgerung deckt also auch den Spezialfall $C = \emptyset$ (für $n > 1$).

Bemerkung 4. Die Bedingung der obigen Folgerung ist nur hinreichend. In dem Polynomring $K[x, y, z]$ sind nämlich (x) , (x, y) und (x, y, z) Primideale. Ausserdem ist $(x) \cap (x, y)^3$ eine Primärzerlegung mit assoziierten Primidealen (x) und (x, y) , die in dem Primideal (x, y, z) enthalten sind. Deswegen hat das Nullideal von

$$R = K[x, y, z]/(x) \cap (x, y)^3$$

die Primärzerlegung

$$(0) = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{D}'_2,$$

mit assoziierten Primidealen

$$\mathfrak{J}_1 = (x)/(x) \cap (x, y)^3, \quad \mathfrak{J}_2 = (x, y)/(x) \cap (x, y)^3,$$

wobei

$$\mathfrak{D}'_2 = (x, y)^3/(x) \cap (x, y)^3.$$

Das Ideal

$$\mathfrak{J}_3 = (x, y, z)/(x) \cap (x, y)^3$$

von R ist ein Primideal und enthält die Primideale $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$.

Nehmen wir nun $n = 3$, $P = \{\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3\}$. Dann hat man

$$A = \{\mathfrak{J}_1\}, \quad B = \{\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2\}, \quad C = \{\mathfrak{J}_3\}.$$

Ausserdem ist $A' = A$, und die Bedingung aus der Folgerung ist nicht erfüllt. Das Ideal

$$\mathfrak{D}_2 = (x, y)^2 / (x) \cap (x, y)^3$$

ist \mathfrak{J}_2 -primär, tritt aber als \mathfrak{J}_2 -primäre Komponente von (0) nicht auf. Deswegen erfüllt nach Bemerkung 1 das Ideal

$$\mathfrak{U}^{(0)} = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{D}_2$$

die Bedingung von unserem Satz, und es gibt somit eine Primärzerlegung

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{D}_2 \cap \mathfrak{D}_3$$

mit assoziierten Primidealen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. V. Geramita, Ch. Smal, *Introduction to homological methods in commutative rings*, Queen's papers in pure and appl. mathematics, No 43, Kingston, Ontario, 1976.
- [2] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading-Menlo Park - London - Don Mills, 1969.

Prirodno-matematički fakultet
71000 Sarajevo
Jugoslavija

(Eingegangen den 10 06 1982)